Řešené příklady na Fourierovy řady

1. Najděte Fourierovu řadu pro (periodické prodloužení)
$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in \langle 0,2); \\ -1, & t \in \langle 2,4). \end{cases}$$
Určete součet této řady.

2. Najděte Fourierovu řadu pro (periodické prodloužení)
$$f(t) = \begin{cases} t-1, & t \in \langle 0,2); \\ 3-t, & t \in \langle 2,4). \end{cases}$$
Určete součet této řady.

3. Najděte sinovou Fourierovu řadu pro (periodické prodloužení)
$$f(t) = \begin{cases} t-1, & t \in \langle 0,2); \\ 3-t, & t \in \langle 2,4). \end{cases}$$
Určete součet této řady.

4. Najděte kosinovou Fourierovu řadu pro (periodické prodloužení)
$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in \langle 0,1); \\ 0, & t \in \langle 1,4). \end{cases}$$
Určete součet této řady.

5. Najděte Fourierovu řadu pro (periodické prodloužení)
$$f(t) = 1 - t^2,\ t \in \langle -1,1).$$
Určete součet této řady.

Řešení:

1. Parametry: Délka periody je $T = 4$, frekvence $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$.

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,dt = \frac{1}{2}\Big(\int_0^2 1\,dt - \int_2^4 1\,dt\Big) = 0,$$

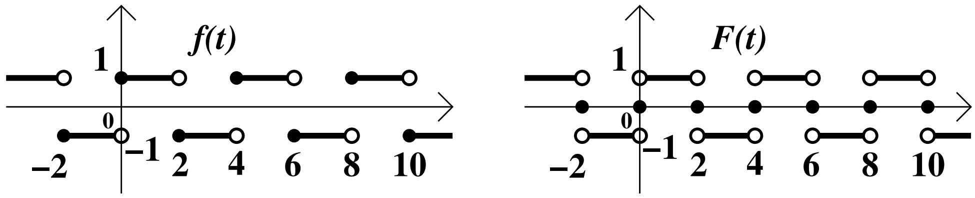
$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)\,dt = \frac{1}{2}\Big(\int_0^2 \cos\big(k\tfrac{\pi}{2}t\big)\,dt - \int_2^4 \cos\big(k\tfrac{\pi}{2}t\big)\,dt\Big)$$
$$= \frac{1}{2}\Big[\frac{2}{k\pi}\sin\big(k\tfrac{\pi}{2}t\big)\Big]_0^2 - \frac{1}{2}\Big[\frac{2}{k\pi}\sin\big(k\tfrac{\pi}{2}t\big)\Big]_2^4 = 0,$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)\,dt = \frac{1}{2}\Big(\int_0^2 \sin\big(k\tfrac{\pi}{2}t\big)\,dt - \int_2^4 \sin\big(k\tfrac{\pi}{2}t\big)\,dt\Big)$$
$$= \frac{1}{2}\Big[-\frac{2}{k\pi}\cos\big(k\tfrac{\pi}{2}t\big)\Big]_0^2 - \frac{1}{2}\Big[-\frac{2}{k\pi}\cos\big(k\tfrac{\pi}{2}t\big)\Big]_2^4 = \frac{1}{k\pi}\big[-\cos(k\pi) + \cos(0) + \cos(2k\pi) - \cos(k\pi)\big]$$
$$= \frac{1}{k\pi}\big[-(-1)^k + 1 + 1 - (-1)^k\big] = \frac{2}{k\pi}[1-(-1)^k] = \begin{cases} 0, & k \text{ sudé}, \\ \frac{4}{k\pi}, & k \text{ liché}. \end{cases}$$

Lichá čísla lze vyjádřit jako $k = 2i+1$, číslům $k = 1,3,5,7,\dots$ odpovídají $i = 0,1,2,3,\dots$. Pro ně pak vyjde $a_k = \dfrac{4}{(2i+1)\pi}$. Výslednou řadu podle toho přepíšeme, a protože je tradicí indexovat pomocí k, přejdeme zase od i ke k.
Proto

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k\cos(k\omega t) + b_k\sin(k\omega t)\big) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k\pi}[1-(-1)^k]\sin\big(k\tfrac{\pi}{2}t\big) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{(2k+1)\pi}\sin\big((2k+1)\tfrac{\pi}{2}t\big).$$

Jaký je součet řady? Nejprve si nakreslíme periodické prodloužení dané funkce f (vlevo). Na tuto funkci pak aplikujeme Jordanovo kritérium. Podle něj konverguje výsledná řada k funkci f všude, kde je f spojitá (tedy její periodické prodloužení). V bodech nespojitosti funkce f konverguje řada k průměru $\frac{1}{2}\big(f(t^+)+f(t^-)\big)$. Výsledek: vpravo je funkce, ke které konverguje naše Fourierova řada, tj. její součet.



2. Parametry: Délka periody je $T=4$, frekvence $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{2}$.

$$a_0=\frac{2}{T}\int\limits_0^T f(t)\,dt=\frac{1}{2}\Big(\int\limits_0^2 t-1\,dt+\int\limits_2^4 3-t\,dt\Big)=0.$$

$$a_k=\frac{2}{T}\int\limits_0^T f(t)\cos(k\omega t)\,dt=\frac{1}{2}\Big(\int\limits_0^2 (t-1)\cos\big(k\tfrac{\pi}{2}t\big)\,dt+\int\limits_2^4 (3-t)\cos\big(k\tfrac{\pi}{2}t\big)\,dt\Big)=\langle\!\langle \text{ per partes } \rangle\!\rangle$$

$$=\frac{1}{2}\Big[(t-1)\frac{2}{k\pi}\sin\big(k\tfrac{\pi}{2}t\big)\Big]_0^2-\frac{1}{2}\frac{2}{k\pi}\int\limits_0^2\sin\big(k\tfrac{\pi}{2}t\big)\,dt+\frac{1}{2}\Big[(3-t)\frac{2}{k\pi}\sin\big(k\tfrac{\pi}{2}t\big)\Big]_2^4+\frac{1}{2}\frac{2}{k\pi}\int\limits_2^4\sin\big(k\tfrac{\pi}{2}t\big)\,dt$$

$$=0+\Big[\frac{2}{k^2\pi^2}\cos\big(k\tfrac{\pi}{2}t\big)\Big]_0^2+0-\Big[\frac{2}{k^2\pi^2}\cos\big(k\tfrac{\pi}{2}t\big)\Big]_2^4$$

$$=\frac{2}{k^2\pi^2}[\cos(k\pi)-\cos(0)]-\frac{2}{k^2\pi^2}[\cos(2k\pi)-\cos(k\pi)]$$

$$=\frac{2}{k^2\pi^2}[(-1)^k-1]-\frac{2}{k^2\pi^2}[1-(-1)^k]=\frac{4}{k^2\pi^2}[(-1)^k-1]=\begin{cases}0, & k \text{ sudé},\\ -\frac{8}{k^2\pi^2}, & k \text{ liché}.\end{cases}$$

$$b_k=\frac{2}{T}\int\limits_0^T f(t)\sin(k\omega t)\,dt=\frac{1}{2}\Big(\int\limits_0^2 (t-1)\sin\big(k\tfrac{\pi}{2}t\big)\,dt+\int\limits_2^4 (3-t)\sin\big(k\tfrac{\pi}{2}t\big)\,dt\Big)=\langle\!\langle \text{ per partes } \rangle\!\rangle$$

$$=\frac{1}{2}\Big[-(t-1)\frac{2}{k\pi}\cos\big(k\tfrac{\pi}{2}t\big)\Big]_0^2+\frac{1}{2}\frac{2}{k\pi}\int\limits_0^2\cos\big(k\tfrac{\pi}{2}t\big)\,dt$$

$$-\frac{1}{2}\Big[(3-t)\frac{2}{k\pi}\cos\big(k\tfrac{\pi}{2}t\big)\Big]_2^4-\frac{1}{2}\frac{2}{k\pi}\int\limits_2^4\cos\big(k\tfrac{\pi}{2}t\big)\,dt$$

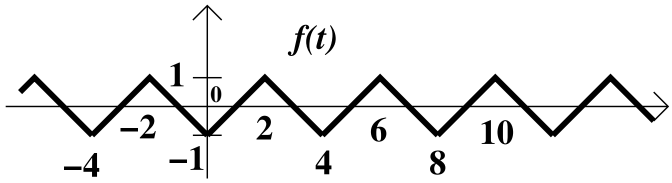
$$=-\frac{1}{k\pi}[\cos(k\pi)+\cos(0)]+\Big[\frac{2}{k^2\pi^2}\sin\big(k\tfrac{\pi}{2}t\big)\Big]_0^2+\frac{1}{k\pi}[\cos(2k\pi)+\cos(k\pi)]-\Big[\frac{2}{k^2\pi^2}\sin\big(k\tfrac{\pi}{2}t\big)\Big]_2^4=0.$$

Lichá čísla lze vyjádřit jako $k=2i+1$, číslům $k=1,3,5,7,\dots$ odpovídají $i=0,1,2,3,\dots$. Pro ně pak vyjde $a_k=-\dfrac{8}{(2i+1)\pi}$. Výslednou řadu podle toho přepíšeme, a protože je tradicí indexovat pomocí k, přejdeme zase od i ke k.
Proto

$$f\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k\cos(k\omega t)+b_k\sin(k\omega t)\big)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2\pi^2}[(-1)^k-1]\cos\big(k\tfrac{\pi}{2}t\big)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-8}{(2k+1)\pi}\cos\big((2k+1)\tfrac{\pi}{2}t\big).$$

Jaký je součet řady? Nejprve si nakreslíme periodické prodloužení dané funkce f. Na tuto funkci pak aplikujeme Jordanovo kritérium. Podle něj konverguje výsledná řada k funkci f všude, kde je f spojitá (tedy její periodické prodloužení). Protože je naše prodloužení f všude spojité, je součtem řady přímo tato funkce.



Protože je prodloužení f funkce sudá, měla by vyjít řada kosinová, což se také stalo.

3. Parametry: Délka zadaného úseku funkce je $L = 4$, po vytvoření liché funkce překlopením vznikne funkce s periodou $T = 8$, pro sinovou řadu proto používáme speciální frekvenci $\omega = \frac{\pi}{2T} = \frac{\pi}{L} = \frac{\pi}{4}$ a klasické vzorce s L namísto T.
Sinová řada má $a_0 = a_k = 0$.

$$b_k = \frac{2}{L}\int\limits_0^L f(t)\sin(k\omega t)\,dt = \frac{1}{2}\Big(\int\limits_0^2 (t-1)\sin\big(k\tfrac{\pi}{4}t\big)\,dt + \int\limits_2^4 (3-t)\sin\big(k\tfrac{\pi}{4}t\big)\,dt\Big) = \langle\!\langle \text{ per partes } \rangle\!\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\Big[-(t-1)\frac{4}{k\pi}\cos\big(k\tfrac{\pi}{4}t\big)\Big]_0^2 + \frac{1}{2}\,\frac{4}{k\pi}\int\limits_0^2 \cos\big(k\tfrac{\pi}{4}t\big)\,dt$$

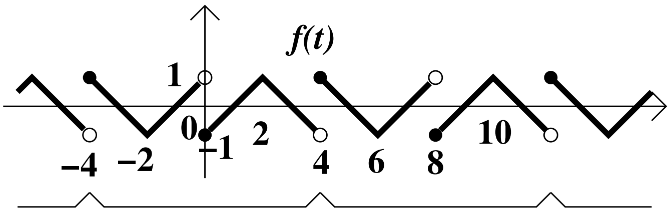
$$-\frac{1}{2}\Big[(3-t)\frac{4}{k\pi}\cos\big(k\tfrac{\pi}{4}t\big)\Big]_2^4 - \frac{1}{2}\,\frac{4}{k\pi}\int\limits_2^4 \cos\big(k\tfrac{\pi}{4}t\big)\,dt$$

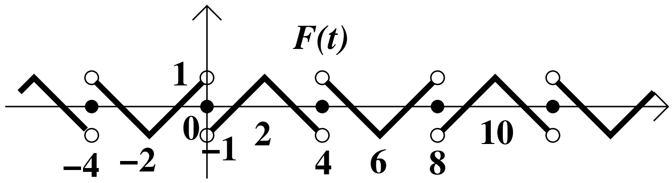
$$= -\frac{2}{k\pi}\big[\cos\big(k\tfrac{\pi}{2}\big) + \cos(0)\big] + \Big[\tfrac{8}{k^2\pi^2}\sin\big(k\tfrac{\pi}{4}t\big)\Big]_0^2 + \frac{2}{k\pi}\big[\cos(k\pi) + \cos\big(k\tfrac{\pi}{2}\big)\big] - \Big[\tfrac{8}{k^2\pi^2}\sin\big(k\tfrac{\pi}{4}t\big)\Big]_2^4$$
$$= \frac{2}{k\pi}[(-1)^k - 1] + \tfrac{16}{k^2\pi^2}\sin\big(k\tfrac{\pi}{2}\big).$$

Pro k sudé vyjde 0. Pokud je k liché, první člen dá $\frac{-4}{k\pi}$, zatímco druhý člen dává $(-1)^i\dfrac{16}{k^2\pi^2}$ pro $k = 2i+1$. Proto pro k liché, $k = 2i+1$ dostaneme $b_k = \dfrac{-4}{(2i+1)\pi} + (-1)^i\dfrac{16}{(2i+1)^2\pi^2}$. Jako obvykle namísto i zase použijeme k.
Proto

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k\cos(k\omega t) + b_k\sin(k\omega t)\big) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big[\frac{2}{k\pi}[(-1)^k - 1] + \frac{16}{k^2\pi^2}\sin\big(k\tfrac{\pi}{2}\big)\Big]\sin\big(k\tfrac{\pi}{4}t\big)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\Big[\tfrac{-4}{(2k+1)\pi} + (-1)^k\frac{16}{(2k+1)^2\pi^2}\Big]\sin\big((2k+1)\tfrac{\pi}{4}t\big).$$

Jaký je součet řady? Nejprve daný tvar překlopíme kolem obou os, čímž vznikne lichá funkce, rozšířením tohoto základního tvaru pak vznikne **liché** periodické prodloužení dané funkce f (vlevo). Na tuto funkci pak aplikujeme Jordanovo kritérium. Podle něj konverguje výsledná řada k funkci f všude, kde je f spojitá (tedy její periodické prodloužení). V bodech nespojitosti funkce f konverguje řada k průměru $\dfrac{1}{2}\big(f(t^+) + f(t^-)\big)$. Výsledek: vpravo je funkce, ke které konverguje naše Fourierova řada, tj. její součet.





Alternativa: Je možné vůbec si nepamatovat onen speciální vzorec pro sinovou/kosinovou Fourierku, ale aplikovat normální Fourierku na ten prodloužený základní tvar f na lichý dvojnásobek (viz obrázek vlevo). Dostane se $T = 8$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{4}$. Ještě je třeba najít formulky pro části přímek dávající základní periodu lichého prodloužení a pak už se jede, pro b_k vyjde

$$b_k = \frac{2}{T}\int\limits_{-L}^{L} f(t)\sin(k\omega t)\,dt$$

$$= \frac{1}{4}\Big(\int\limits_{-4}^{-2}(-t-3)\sin\big(k\tfrac{\pi}{4}t\big)\,dt + \int\limits_{-2}^{0}(t+1)\sin\big(k\tfrac{\pi}{4}t\big)\,dt + \int\limits_{0}^{2}(t-1)\sin\big(k\tfrac{\pi}{4}t\big)\,dt + \int\limits_{2}^{4}(3-t)\sin\big(k\tfrac{\pi}{4}t\big)\,dt\Big).$$

To vypadá děsně, asi je lepší si pamatovat ten speciální vzoreček pro sinovou/kosinovou řadu. Tahle alternativa se dá trochu ulehčit úvahou, že když je $f(t)$ lichá na $\langle -4,4)$, je $f(t)\sin\big(k\frac{\pi}{4}t\big)$ sudá na $\langle -4,4)$, proto stačí integrovat přes pravou půlku a vzít to dvakrát:

$$b_k = 2\cdot\frac{2}{T}\int\limits_{0}^{L} f(t)\sin(k\omega t)\,dt = \frac{1}{2}\Big(\int\limits_{0}^{2}(t-1)\sin\big(k\tfrac{\pi}{4}t\big)\,dt + \int\limits_{2}^{4}(3-t)\sin\big(k\tfrac{\pi}{4}t\big)\,dt\Big).$$

Tohle je ovšem přesně ten vzorec, který jsme dostali hned speciálním vzorečkem, takže je asi opravdu nejlepší si pamatovat tu speciální frekvenci $\omega = \frac{\pi}{L}$ pro sinovou/kosinovou řadu.

4. Parametry: Délka úseku je $L = 4$, vidíme, že ona specifikace $f(t) = 0$ na $\langle 1,4)$ je důležitá, protože nám řekne, jak velká bude perioda.
Pro kosinovou řadu nejprve vytvoříme překlopením sudou funkci s periodou $T = 8$, použijeme pak speciální frekvenci $\omega = \frac{\pi}{2T} = \frac{\pi}{L} = \frac{\pi}{4}$ a klasické vzorce s L namísto T.

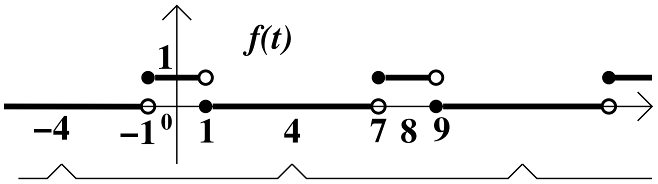
Kosinová řada má $b_k = 0$. $a_0 = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int\limits_{0}^{L} f(t)\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} 1\,dt = \frac{1}{2}$.

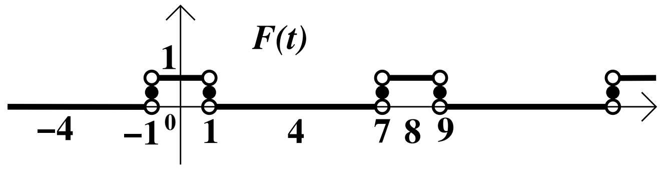
$$a_k = \frac{2}{L}\int\limits_{0}^{L} f(t)\cos(k\omega t)\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}\cos\big(k\tfrac{\pi}{4}t\big)\,dt = \frac{1}{2}\Big[\frac{4}{k\pi}\sin\big(k\tfrac{\pi}{4}t\big)\Big]_0^1 = \frac{2}{k\pi}\sin\big(k\tfrac{\pi}{4}\big).$$

Tohle nepůjde napsat rozumněji, protože když dosazujeme postupně $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, dostaneme 0, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 0, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, -1, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, 0, což je příliš nepravidelné.
Proto

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k\cos(k\omega t) + b_k\sin(k\omega t)\big) = \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k\pi}\sin\big(k\tfrac{\pi}{4}\big)\cos\big((2k+1)\tfrac{\pi}{4}t\big).$$

Jaký je součet řady? Nejprve daný tvar překlopíme kolem osy y, čímž vznikne sudá funkce, rozšířením tohoto základního tvaru pak vznikne **sudé** periodické prodloužení dané funkce f (vlevo). Na tuto funkci pak aplikujeme Jordanovo kritérium. Podle něj konverguje výsledná řada k funkci f všude, kde je f spojitá (tedy její periodické prodloužení). V bodech nespojitosti funkce f konverguje řada k průměru $\dfrac{1}{2}\big(f(t^+) + f(t^-)\big)$. Výsledek: vpravo je funkce, ke které konverguje naše Fourierova řada, tj. její součet.





5. Parametry: Délka periody je $T = 2$. Tato funkce není zadána na intervalu typu $\langle 0, T)$, ale na jiném, ovšem posunutí intervalu nevadí, Fourierova řada se normálně spočítá. Frekvence je $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$.

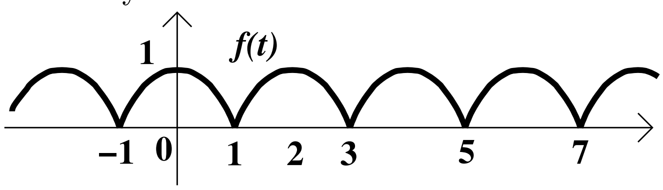
$$a_0 = \frac{2}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt = \int\limits_{-1}^{1} 1 - t^2 dt = \frac{4}{3}.$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(k\omega t)\,dt = \int\limits_{-1}^{1} (1-t^2)\cos(k\pi t)\,dt = \langle\!\langle \text{ per partes } \rangle\!\rangle$$
$$= \Big[\frac{1}{k\pi}(1-t^2)\sin(k\pi t)\Big]_{-1}^{1} + \frac{2}{k\pi}\int\limits_{-1}^{1} t\sin(k\pi t)\,dt = 0 + \Big[-\frac{2}{k^2\pi^2}t\cos(k\pi t)\Big]_{-1}^{1} + \frac{2}{k^2\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\cos(k\pi t)\,dt$$
$$= -\frac{2}{k^2\pi^2}[\cos(k\pi)+\cos(-k\pi)] + \Big[\frac{2}{k^3\pi^3}\sin(k\pi t)\Big]_{-1}^{1} = -\frac{2}{k^2\pi^2}[\cos(k\pi)+\cos(k\pi)] + 0$$
$$= -(-1)^k\frac{4}{k^2\pi^2}.$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(k\omega t)\,dt = \int\limits_{-1}^{1} (1-t^2)\sin(k\pi t)\,dt = \langle\!\langle \text{ per partes } \rangle\!\rangle$$
$$= \Big[-\frac{1}{k\pi}(1-t^2)\cos(k\pi t)\Big]_{-1}^{1} - \frac{2}{k\pi}\int\limits_{-1}^{1} t\cos(k\pi t)\,dt = 0 - \Big[\frac{2}{k^2\pi^2}t\sin(k\pi t)\Big]_{-1}^{1} + \frac{2}{k^2\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\sin(k\pi t)\,dt$$
$$= -\frac{2}{k^2\pi^2}[\sin(k\pi)+\sin(-k\pi)] + \Big[-\frac{2}{k^3\pi^3}\cos(k\pi t)\Big]_{-1}^{1} = 0 - \frac{2}{k^3\pi^3}[\cos(k\pi)-\cos(-k\pi)]$$
$$= -\frac{2}{k^3\pi^3}[\cos(k\pi)-\cos(k\pi)] = 0.$$

Proto
$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k\cos(k\omega t) + b_k\sin(k\omega t)\big) = \frac{2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{4}{k^2\pi^2}\cos(k\pi t).$$

Jaký je součet řady? Nejprve si nakreslíme periodické prodloužení dané funkce f. Na tuto funkci pak aplikujeme Jordanovo kritérium. Podle něj konverguje výsledná řada k funkci f všude, kde je f spojitá (tedy její periodické prodloužení). V našem případě je f spojitá všude, takže to periodické prodloužení je zároveň součtem řady.



Všimněte si, že daná funkce je po prodloužení sudá, proto je vzniklá řada přirozeně kosinová. Kdybychom si to prodloužení rovnou nakreslili, nemuseli jsme počítat b_k a šlo rovnou psát $b_k = 0$. Protože interval $\langle -1, 1)$ jde na obě strany počátku, už dopředu to rozhodne o symetrii. Vidíme, že řada kosinová udělat půjde, protože funkce $f(t) = 1 - t^2$ je na intervalu $\langle -1, 1)$ sudá, ale lichou z f neuděláme, takže sinová řada by nešla.