Cvičné příklady na Fourierovy řady
Stručná řešení

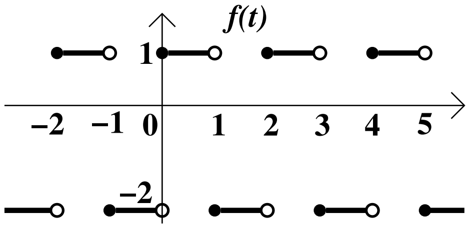
1. Fourierova řada: $T=2$, $\omega=\pi$. $\qquad a_0=\frac{2}{2}\Big(\int\limits_0^1 1dt-2\int\limits_1^2 1dt\Big)=-1.$

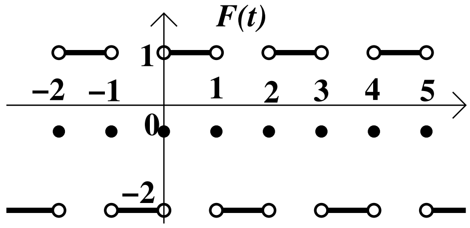
$a_k=\frac{2}{2}\Big(\int\limits_0^1\cos(k\pi t)\,dt-2\int\limits_1^2\cos(k\pi t)\,dt\Big)=0.$

$b_k=\frac{2}{2}\Big(\int\limits_0^1\sin(k\pi t)\,dt-2\int\limits_1^2\sin(k\pi t)\,dt\Big)=\frac{3}{k\pi}[1-(-1)^k]=\begin{cases}0, & k \text{ sudé},\\ \frac{6}{k\pi}, & k \text{ liché}.\end{cases}$

$f\sim-\frac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{3}{k\pi}[1-(-1)^k]\sin(k\pi t)=-\frac{1}{2}+\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{6}{(2k+1)\pi}\sin((2k+1)\pi t).$

Součet: Periodické prodloužení f vlevo, součet řady vpravo:





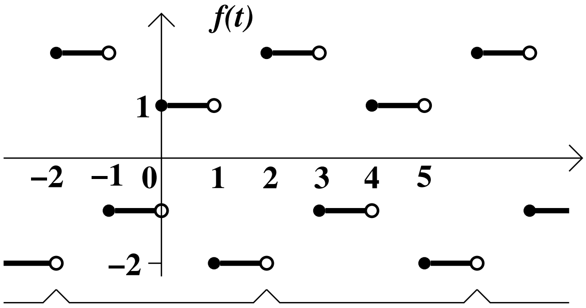
Poznámka: f je tvaru "lichá"$-\frac{1}{2}$, proto i řada je tvaru "sinová"$-\frac{1}{2}$.

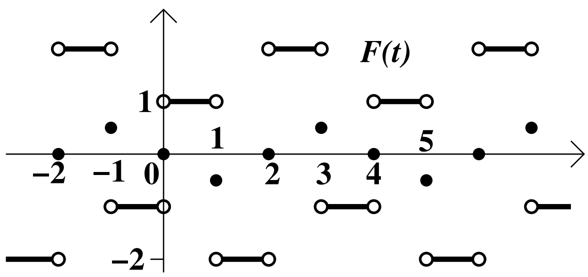
sinová Fourierova řada: $L=2$, $T=4$, $\omega=\frac{\pi}{2}$. $\qquad a_k=0.$

$b_k=\frac{2}{2}\Big(\int\limits_0^1\sin\big(k\frac{\pi}{2}t\big)\,dt-2\int\limits_1^2\sin\big(k\frac{\pi}{2}t\big)\,dt\Big)=\frac{2}{k\pi}\big[1+2(-1)^k-3\cos\big(k\frac{\pi}{2}\big)\big].$

$f\sim\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k\pi}\big[1+2(-1)^k-3\cos\big(k\frac{\pi}{2}\big)\big]\sin\big(k\frac{\pi}{2}t\big).$

Součet: **Liché** periodické prodloužení f vlevo, součet řady vpravo:



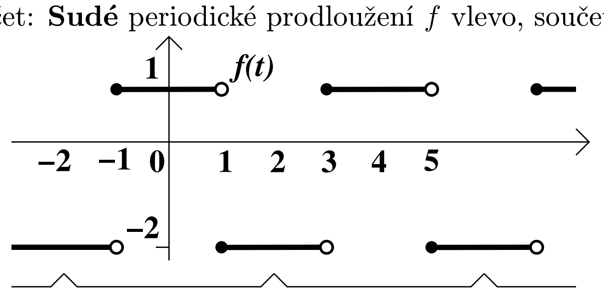


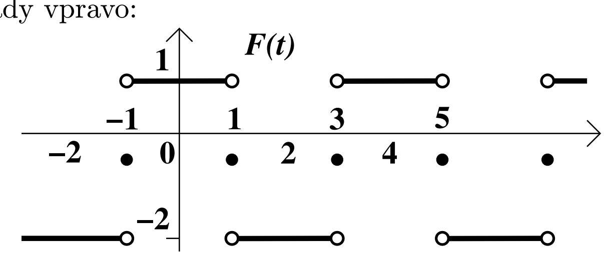
kosinová Fourierova řada: $L=2$, $T=4$, $\omega=\frac{\pi}{2}$. $\qquad b_k=0$, $a_0=-1$ (viz Fourierova řada).

$a_k=\frac{2}{2}\Big(\int\limits_0^1\cos\big(k\frac{\pi}{2}t\big)\,dt-2\int\limits_1^2\cos\big(k\frac{\pi}{2}t\big)\,dt\Big)=\frac{6}{k\pi}\sin\big(k\frac{\pi}{2}\big)=\begin{cases}0, & k \text{ sudé},\\ (-1)^n\frac{6}{k\pi}, & k \text{ liché},\ k=2n+1.\end{cases}$

$f\sim-\frac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{6}{k\pi}\sin\big(k\frac{\pi}{2}\big)\cos\big(k\frac{\pi}{2}t\big)=-\frac{1}{2}+\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{6}{(2k+1)\pi}\cos\big((2k+1)\frac{\pi}{2}t\big).$

Součet: **Sudé** periodické prodloužení f vlevo, součet řady vpravo:



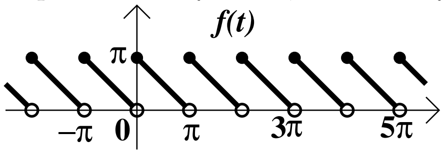


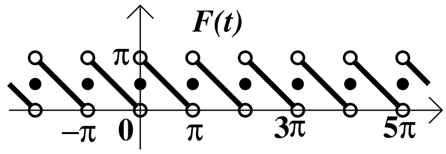
2. Fourierova řada: $T=\pi$, $\omega=2$. $\qquad a_0=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(\pi-t)dt=\pi.$

$a_k=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(\pi-t)\cos(2kt)\,dt=0$, $b_k=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(\pi-t)\sin(2kt)\,dt=\frac{1}{k}$ (pomocí per partes).

$f\sim\frac{\pi}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin(2kt).$

Součet: Periodické prodloužení f vlevo, součet řady vpravo:



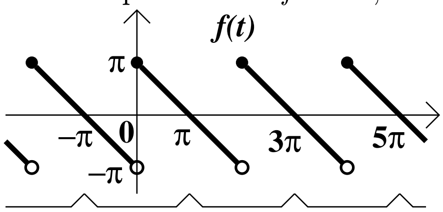


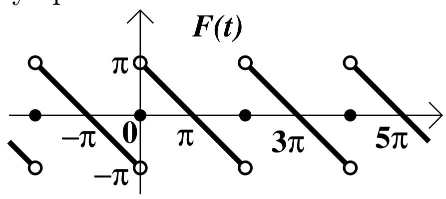
Poznámka: f je tvaru “lichá”$+\frac{\pi}{2}$, proto i řada je tvaru “sinová”$+\frac{\pi}{2}$.

sinová Fourierova řada: $L=\pi$, $T=2\pi$, $\omega=1$. $a_k=0$.

$b_k=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(\pi-t)\sin(kt)\,dt=\frac{2}{k}$ (pomocí per partes). $f\sim\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k}\sin(kt)$.

Součet: **Liché** periodické prodloužení f vlevo, součet řady vpravo:

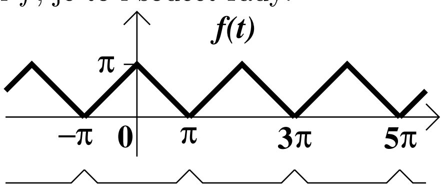




kosinová Fourierova řada: $L=\pi$, $T=2\pi$, $\omega=1$. $b_k=0$, $a_0=\pi$.

$a_k=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(\pi-t)\cos(kt)\,dt=\frac{4}{k^2\pi}$ (pomocí per partes). $f\sim\frac{\pi}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2\pi}\cos(kt)$.

Součet: **Sudé** periodické prodloužení f, je to i součet řady:



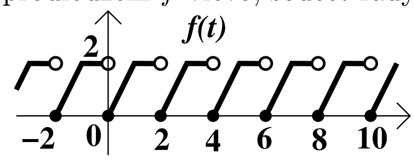
3. Fourierova řada: $T=2$, $\omega=\pi$. $a_0=\frac{2}{2}\Big(\int\limits_0^1 2t\,dt+2\int\limits_1^2 1\,dt\Big)=3$.

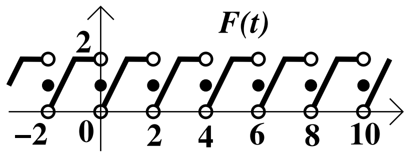
$$a_k=\frac{2}{2}\Big(\int\limits_0^1 2t\cos(k\pi t)\,dt+2\int\limits_1^2\cos(k\pi t)\,dt\Big)=\frac{2}{k\pi}[(-1)^k-1]=\begin{cases}0, & k \text{ sudé},\\ -\frac{4}{k\pi}, & k \text{ liché}\end{cases} \text{ (pomocí per partes).}$$

$$b_k=\frac{2}{2}\Big(\int\limits_0^1 2t\sin(k\pi t)\,dt+2\int\limits_1^2\sin(k\pi t)\,dt\Big)=-\frac{2}{k\pi} \text{ (pomocí per partes).}$$

$$f\sim\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{2}{k\pi}[(-1)^k-1]\cos(k\pi t)-\frac{2}{k\pi}\sin(k\pi t)\Big)=\frac{\pi}{2}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-4}{(2k+1)\pi}\cos((2k+1)\pi t)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k\pi}\sin(k\pi t).$$

Součet: Periodické prodloužení f vlevo, součet řady vpravo:



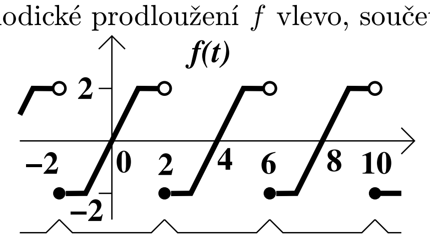


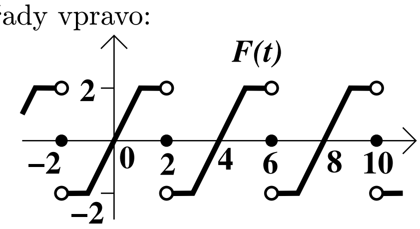
sinová Fourierova řada: $L=2$, $T=4$, $\omega=\frac{\pi}{2}$. $a_k=0$.

$$b_k=\frac{2}{2}\Big(\int\limits_0^1 2t\sin\big(k\tfrac{\pi}{2}t\big)\,dt+2\int\limits_1^2\sin\big(k\tfrac{\pi}{2}t\big)\,dt\Big)=\frac{4}{k^2\pi^2}\sin\big(k\tfrac{\pi}{2}\big)-\frac{4}{k\pi}(-1)^k \text{ (pomocí per partes).}$$

$$f\sim\sum_{k=1}^{\infty}\Big[\frac{4}{k^2\pi^2}\sin\big(k\tfrac{\pi}{2}\big)-\frac{4}{k\pi}(-1)^k\Big]\sin\big(k\tfrac{\pi}{2}t\big).$$

Součet: **Liché** periodické prodloužení f vlevo, součet řady vpravo:



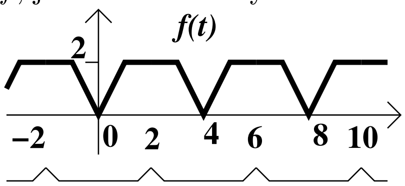


kosinová Fourierova řada: $L=2$, $T=4$, $\omega=\frac{\pi}{2}$. $b_k=0$, $a_0=3$.

$$a_k=\frac{2}{2}\Big(\int\limits_0^1 2t\cos\big(k\tfrac{\pi}{2}t\big)\,dt+2\int\limits_1^2\cos\big(k\tfrac{\pi}{2}t\big)\,dt\Big)=\frac{8}{k^2\pi^2}\Big[\cos\big(k\tfrac{\pi}{2}\big)-1\Big] \text{ (pomocí per partes).}$$

$f \sim \frac{3}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{8}{k^2\pi^2}\big[\cos\big(k\frac{\pi}{2}\big) - 1\big]\cos\big(k\frac{\pi}{2}t\big).$

Součet: **Sudé** periodické prodloužení f, je to i součet řady:



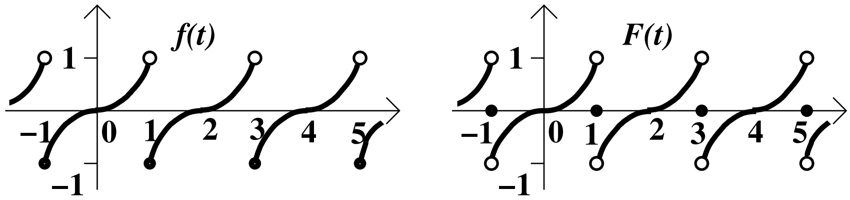
4. Fourierova řada: $T = 2$, $\omega = \pi$. $a_0 = \frac{2}{2}\int\limits_{-1}^{1} t^3\,dt = 0.$

$a_k = \frac{2}{2}\int\limits_{-1}^{1} t^3\cos(k\pi t)\,dt = 0$ (per partes třikrát).

$b_k = \frac{2}{2}\int\limits_{-1}^{1} t^3\sin(k\pi t)\,dt = -\frac{2}{k\pi}(-1)^k + \frac{12}{k^3\pi^3}$ (per partes třikrát).

$f \sim \sum\limits_{k=1}^{\infty}\big[\frac{12}{k^3\pi^3} - (-1)^k\frac{2}{k\pi}\big]\sin(k\pi t).$

Součet: Periodické prodloužení f vlevo, součet řady vpravo:



sinová, kosinová Fourierova řada: Funkce byla zadána na intervalu, který "překračuje" počátek, tedy zahrnuje kladná i záporná čísla. Nemáme proto možnost si funkci upravit tak, aby byla symetrická, můžeme jen doufat, že nějakou symetrii už měla ze zadání. Vidíme, že je lichá, proto i její rozšíření je liché a máme tedy řadu sinovou, kosinovou nelze udělat.

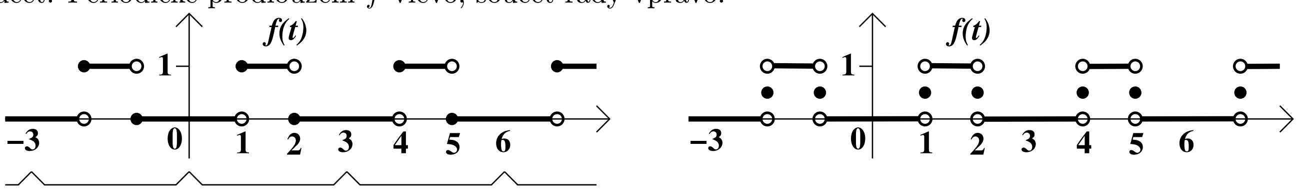
5. Fourierova řada: $T = 3$, $\omega = \frac{2}{3}\pi$. $a_0 = \frac{2}{3}\int\limits_{1}^{2} 1dt = \frac{2}{3}.$

$a_k = \frac{2}{3}\int\limits_{1}^{2}\cos\big(\frac{2}{3}k\pi t\big)\,dt = \frac{1}{k\pi}\big[\sin\big(\frac{4\pi}{3}k\big) - \sin\big(\frac{2\pi}{3}k\big)\big].$

$b_k = \frac{2}{3}\int\limits_{1}^{2}\sin\big(\frac{2}{3}k\pi t\big)\,dt = \frac{1}{k\pi}\big[\cos\big(\frac{2\pi}{3}k\big) - \cos\big(\frac{4\pi}{3}k\big)\big].$

$f \sim \frac{1}{3} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\big[\frac{1}{k\pi}\big[\sin\big(\frac{4\pi}{3}k\big) - \sin\big(\frac{2\pi}{3}k\big)\big]\cos\big(\frac{2}{3}k\pi t\big) + \frac{1}{k\pi}\big[\cos\big(\frac{2\pi}{3}k\big) - \cos\big(\frac{4\pi}{3}k\big)\big]\sin\big(\frac{2}{3}k\pi t\big)\big].$

Součet: Periodické prodloužení f vlevo, součet řady vpravo:



Při pohledu na obrázek vidíme, že výsledné prodloužení je sudé, měla by tedy vzniknout sudá řada. Je tomu tak? Podívejme se na koeficient b_k. Díky periodicite jej stačí prozkoumat pro $k = 1, 2, 3$ a vidíme, že vždy vyjde nula. Opravdu tedy máme kosinovou řadu:

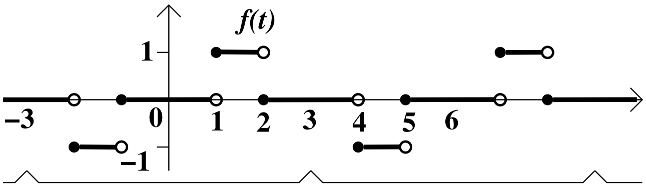
$f \sim \frac{1}{3} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\pi}\big[\sin\big(\frac{4\pi}{3}k\big) - \sin\big(\frac{2\pi}{3}k\big)\big]\cos\big(\frac{2}{3}k\pi t\big).$

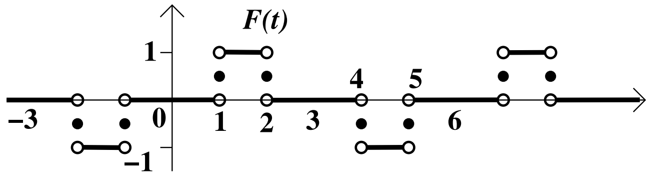
sinová Fourierova řada: $L = 3$, $T = 6$, $\omega = \frac{\pi}{3}$. $a_k = 0.$

$b_k = \frac{2}{3}\int\limits_{1}^{2}\sin\big(\frac{\pi}{3}kt\big)\,dt = \frac{2}{k\pi}\big[\cos\big(\frac{\pi}{3}k\big) - \cos\big(\frac{2\pi}{3}k\big)\big].$

$f \sim \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k\pi}\big[\cos\big(\frac{\pi}{3}k\big) - \cos\big(\frac{2\pi}{3}k\big)\big]\sin\big(\frac{\pi}{3}kt\big).$

Součet: **Liché** periodické prodloužení f vlevo, součet řady vpravo:





kosinová Fourierova řada: Již jsme vlastně jednu dostali v první části. Teď to ale zkusíme standardním způsobem. $L = 3$, $T = 6$, $\omega = \frac{\pi}{3}$. $\quad b_k = 0$, $a_0 = \frac{2}{3}$ (viz Fourierova řada).

$a_k = \frac{2}{3}\int\limits_1^2 \cos\bigl(\frac{\pi}{3}kt\bigr)\,dt = \frac{2}{k\pi}\bigl[\sin\bigl(\frac{2\pi}{3}k\bigr) - \sin\bigl(\frac{\pi}{3}k\bigr)\bigr]$.

$f \sim \frac{1}{3} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi}\bigl[\sin\bigl(\frac{2\pi}{3}k\bigr) - \sin\bigl(\frac{\pi}{3}k\bigr)\bigr]\cos\bigl(\frac{\pi}{3}kt\bigr)$.

Součet viz předtím. Proč máme jiný vzorec? On vlastně jiný není. Snadno se nahlédne, že pro lichá k jsou koeficienty rovny nule (díky periodicitě to stačí ověřit pro $k = 1, 3, 5$). Když napíšeme $k = 2n$, dostaneme stejnou řadu jako předtím.

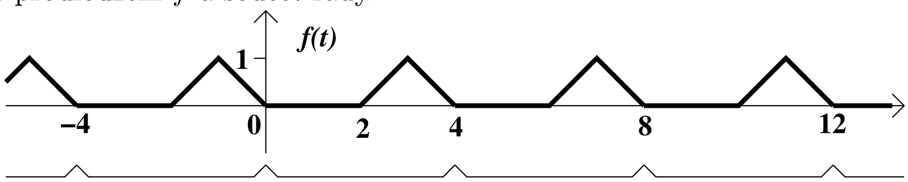
6. Fourierova řada: $T = 4$, $\omega = \frac{\pi}{2}$. $\qquad a_0 = \frac{2}{4}\Bigl(\int\limits_2^3 (t-2)dt + \int\limits_3^4 (4-t)dt\Bigr) = 1.$

$a_k = \frac{2}{4}\Bigl(\int\limits_2^3 (t-2)\cos\bigl(\frac{\pi}{2}kt\bigr)\,dt + \int\limits_3^4 (4-t)\cos\bigl(\frac{\pi}{2}kt\bigr)\,dt\Bigr) = \frac{2}{k^2\pi^2}\bigl[2\cos\bigl(\frac{3\pi}{2}k\bigr) - \cos(\pi k) - \cos(2\pi k)\bigr]$.

$b_k = \frac{2}{4}\Bigl(\int\limits_2^3 (t-2)\sin\bigl(\frac{\pi}{2}kt\bigr)\,dt + \int\limits_3^4 (4-t)\sin\bigl(\frac{\pi}{2}kt\bigr)\,dt\Bigr) = \frac{4}{k^2\pi^2}\sin\bigl(\frac{3\pi}{2}k\bigr)$.

$f \sim \frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \bigl[\frac{2}{k^2\pi^2}\bigl[2\cos\bigl(\frac{3\pi}{2}k\bigr) - 1 - (-1)^k\bigr]\cos\bigl(\frac{\pi}{2}kt\bigr) + \frac{4}{k^2\pi^2}\sin\bigl(\frac{3\pi}{2}k\bigr)\sin\bigl(\frac{\pi}{2}kt\bigr)\bigr]$.

Součet: Periodické prodloužení f a součet řady:

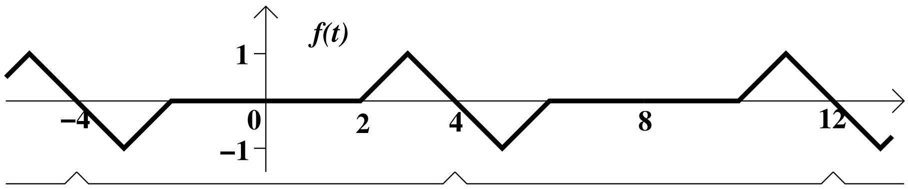


sinová Fourierova řada: $L = 4$, $T = 8$, $\omega = \frac{\pi}{4}$. $\qquad a_k = 0$.

$b_k = \frac{2}{4}\Bigl(\int\limits_2^3 (t-2)\sin\bigl(\frac{\pi}{4}kt\bigr)\,dt + \int\limits_3^4 (4-t)\sin\bigl(\frac{\pi}{4}kt\bigr)\,dt\Bigr) = \frac{8}{k^2\pi^2}\bigl[2\sin\bigl(\frac{3\pi}{4}k\bigr) - \sin\bigl(\frac{\pi}{2}k\bigr)\bigr]$

$f \sim \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{8}{k^2\pi^2}\bigl[2\sin\bigl(\frac{3\pi}{4}k\bigr) - \sin\bigl(\frac{\pi}{2}k\bigr)\bigr]\sin\bigl(\frac{\pi}{4}kt\bigr)$.

Součet: **Liché** periodické prodloužení f a součet řady:



kosinová Fourierova řada: $L = 4$, $T = 8$, $\omega = \frac{\pi}{4}$. $\qquad b_k = 0$, $a_0 = 1$ (viz Fourierova řada).

$a_k = \frac{2}{4}\Bigl(\int\limits_2^3 (t-2)\cos\bigl(\frac{\pi}{4}kt\bigr)\,dt + \int\limits_3^4 (4-t)\cos\bigl(\frac{\pi}{4}kt\bigr)\,dt\Bigr) = \frac{8}{k^2\pi^2}\bigl[2\cos\bigl(\frac{3\pi}{4}k\bigr) - \cos\bigl(\frac{\pi}{2}k\bigr) - \cos(\pi k)\bigr]$.

$f \sim \frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{8}{k^2\pi^2}\bigl[2\cos\bigl(\frac{3\pi}{4}k\bigr) - \cos\bigl(\frac{\pi}{2}k\bigr) - (-1)^k\bigr]\cos\bigl(\frac{\pi}{4}kt\bigr)$.

Součet: **Sudé** periodické prodloužení f a součet řady: