ANALÝZA VE VÍCE PROMĚNNÝCH

PETR HÁJEK

Tento text je osnovou jednosemestrální přednášky analýzy více proměnných, která pokrývá diferenciální a integrální počet, a krátkého úvodu do funkčních řad. Předpokládá se znalost základru analýzy jedné proměnné a základru lineární algebry. Předpokládaný rozsah je 26-30 přednášek (90 min),

Cílem přednášky je seznámit studenta s hlavními pojmy a metodami této oblasti, s drurazem na porozumění jejich geometrickému významu, při současném udržení matematické přesnosti na přijatelné úrovni pro použití v běžných aplikacích.

Text byl sestaven na základě dvojice skript Hamhalter-Tišer, s některými modifikacemi.

1. Úvod

Opakování některých základních pojmru a vlastností-zejména reálná čísla, reálné funkce a derivace z konceptuálního hlediska.

V tomto kurzu vycházíme z intuitivní představy o reálných číslech, jejichž modelem je reálná osa $I\!R$ s operacemi $+$, $\times$ a uspořádáním $<$. Reálná čísla lze vybudovat vycházeje z racionálních čísel s použitím principu (axiomu) úplnosti. Tento princip hraje hlavní roli při budování a aplikacích analýzy. Opakování pojmru z předcházejícího kurzu MA1:

Nekonečná posloupnost (resp. řada) a její limita, konvergence, spojitost funkce jedné reálné proměnné, derivace, lokální a absolutní extrém, určitý a neurčitý integral, $\max A$, $\min A$, $\sup A$, $\inf A$.

Definice 1.1. *(Princip úplnosti)*
Každá shora omezená podmnožina $A \subset I\!R$ má supremum $\sup A \in I\!R$.

Tento princip lze ekvivalentně formulovat také následujícím zprusobem, který umožňuje vytvářet nové objekty v analýze pomocí limitního procesu.

Definice 1.2. *(Princip úplnosti-alternativní formulace)*
Každá omezená posloupnost $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ v $I\!R$ má konvergentní podposloupnost $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$, $\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = x \in I\!R$.

Jedním z drusledkru úplnosti reálných čísel je existence řešení rovnic pro spojité funkce.

Věta 1.3. *(Nabývání mezihodnot)*
Nechť f je spojitá $[a,b]$, $f(a) < C < f(b)$. Potom existuje $c \in (a,b)$ takové, že $f(c) = C$.

Drukaz. Polož $c = \sup\{x, f(x) \le 0\}$. □

Příklad: funkce $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = x^2$ nenabývá mezihodnot (např. 2). Podobně, $f(x) = x^2 - 2$ nenabývá svého minima.

Věta 1.4. *(Věta o existenci extrému)*
Nechť f je spojitá na $[a,b]$. Potom existuje $c \in [a,b]$ takové, že $f(c) = \max\{f(x) : x \in [a,b]\}$.

Definice 1.5. *Říkáme, že funkce $f : (a,b) \to I\!R$ je třídy C^k pokud f je spojitě diferencovatelná až do řádu k, t.j. $f', f'', \ldots, f^{(k)}$ existují a jsou spojité na (a,b).*

Věta 1.6. *(Základní věta integrálního počtu)*
Nechť f je třídy C^1 na $[a,b]$. Potom platí

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt$$

Věta 1.7. *(Věta o střední hodnotě)*
Nechť f je spojitá $[a,b]$, a třídy C^1 na (a,b). Potom existuje $c \in (a,b)$ takové, že $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Drukaz. První krok pro případ $f(a) = f(b)$ (Rolleova věta) s použitím maxima. Druhý krok odečíst lineární funkci. □

Příklady. Polynomy, trigonometrické funkce, exponenciální funkce, racionální funkce, logaritmus, a též funkce od nich odvozené s pomoci běžných algebraických operací a operace skládání jsou třídy C^∞ na svých definičních oborech.

Definice 1.8. *(Symbol $o(t^k)$)*
Říkáme, že funkce ϕ, která je definovaná v okolí nuly, $\phi(0) = 0$, splňuje vztah

$$\phi(t) = o(t^k) \Leftrightarrow \lim_{t\to 0} \frac{\phi(t)}{t^k} = 0.$$

Je zřejmé, že $\phi(t) = o(t^k) \Leftrightarrow \phi(t) = \psi(t)t^k$, pro nějaké ψ, $\lim_{t\to 0} \psi(t) = 0$.

Tvrzení 1.9. *(Taylorova formule 1. řádu)*
$f(x+t) = f(x) + At + o(t)$ platí právě když $f'(x)$ existuje a je rovno A.

Drukaz.

Věta 1.10. *(Taylorova formule 2. řádu)*
Nechť f je funkce spojitá na $[a,b]$, a třídy C^2 na (a,b), $x \in (a,b)$. Potom platí

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + R(a,h),$$

kde

$$|R(a,h)| \le \sup_{t\in[0,1]} |f''(a+th) - f''(a)|h^2.$$

Speciálně tedy platí

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 + o(h^2)$$

Drukaz. Použijeme opakovaně základní větu analýzy 1.6

$$f(a+h) = f(a) + \int_a^{a+h} f'(t)dt = f(a) + f'(a)h + \int_a^{a+h} (f'(t) - f'(a))dt$$

$$= f(a) + f'(a)h + \int_a^{a+h} \Big(\int_a^t f''(\tau)d\tau\Big)dt$$

$$= f(a) + f'(a)h + \int_a^{a+h} \Big(f''(a)(t-a) + \int_a^t f''(\tau) - f''(a)d\tau\Big)dt$$

$$= f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + R(a,h),$$

kde

$$|R(a,h)| \leq \sup_{t\in[0,1]} |f''(a+th) - f''(a)|h^2$$

Speciálně, je vidět že $R(a,h) = o(|h|^2)$.

□

Drusledek 1.11. *Nechť funkce f třídy C^1 má lokální extrém v bodě x. Pak platí $f'(x) = 0$. Nechť funkce f třídy C^2 splňuje $f'(x) = 0, f''(x) \neq 0$. Potom f má v bodě x lokální extrém.*

Obecný tvar Taylorovy formule, d**r**uležitý pro práci s mocninnými řadami.

Věta 1.12. *(Taylorova formule k-tého řádu)*
Nechť f je funkce spojitá na $[a,b]$, a třídy C^{k+1} na (a,b), $x \in (a,b)$. Potom platí

$$f(a+h) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} f^{(i)}(a)h^i + \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\eta)h^{k+1},$$

pro nějaké $\eta \in [a,b]$. Speciálně tedy platí

$$f(x+h) = \sum_{i=0}^{k+1} \frac{1}{i!} f^{(i)}(x)h^i + o(h^{k+1})$$

Zjednodušeně lze říci, že hlavními výsledky našeho kurzu bude zobecnění Taylorovy formule a Základní věty analýzy na případ funkcí více proměnných.

2. Nekonečné řady

Vycházíme z předpokladu znalosti pojmu konvergence posloupnosti, tedy posloupnost čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu A pokud platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(|a_n - A| < \varepsilon). \tag{1}$$

Jak plyne z úplnosti reálných čísel, posloupnost je konvergentní právě když je Cauchyovská, tedy platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n, m > N)(|a_n - a_m| < \varepsilon). \tag{2}$$

Budeme pracovat s formálními výrazy tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, které se nazývají nekonečné řady. Hlavní otázka je, zda tyto nekonečné sumy mohou mít nějaký přesný smysl a hodnotu.

Definice 2.1. *Říkáme, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní řada, pokud platí že posloupnost částečných součtru $(s_k)_{k=1}^{\infty}$, $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ je konvergentní. Tato limita se nazývá součet řady. V opačném případě říkáme, že řada je divergentní.*

Lze snadno ověřit, že řada je konvergentní právě když platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n, m > N)(|s_n - s_m| < \varepsilon) \tag{3}$$

Tvrzení 2.2. *Pokud je řada konvergentní pak její členy konvergují k nule.*

Opačná implikace neplatí:

$$\sum (-1)^n, \quad \sum \sin n$$

$$\sum \frac{1}{n}$$

Hlavní příklad konvergentní řady je geometrická řada.

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}$$

konverguje právě když $|q| < 1$.

Definice 2.3. *Říkáme, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní řada pokud je řada obsahující absolutní hodnoty $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergentní.*

Tvrzení 2.4. *Každá absolutně konvergentní řada je konvergentní.*

Tvrzení 2.5. *(Srovnávací kritérium) Nechť $\sum a_n$ je absolutně konvergentní řada, $|b_n| \leq |a_n|$ platí pro všechna dostatečně velká $n \in \mathbb{N}$. Potom $\sum b_n$ je také absolutně konvergentní.*

Použitím porovnání s geometrickou řadou získáme známá kritéria absolutní konvergence:
podílové, odmocninové.

$$\sum \frac{1}{n!}, \quad \sum \frac{n^2}{3^n}, \quad \sum \left(\frac{4}{n+2}\right)^n$$

Tvrzení 2.6. *(Integrální kritérium) Nechť $a_n \geq 0$ je nerostoucí řada, a nechť $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ je nerostoucí spojitá funkce taková, že $f(n) = a_n$. Potom $\sum a_n$ je absolutně konvergentní právě když $\int_0^{\infty} f(t) < \infty$.*

Příklad. Dokažte, že řada $\sum \frac{1}{n^2}$ je absolutně konvergentní.

3. Funkční řady

Definice 3.1. *Funkční řada je formální nekonečný součet funkcí $f_k : D \to I\!R$, kde $D \subset I\!R$, označený*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t), \quad t \in D. \tag{4}$$

Říkáme, že funkční řada je konvergentní v bodě $t \in D$ pokud řada (4), po dosazení hodnoty $t \in D$, konverguje. Říkáme, že funkční řada je bodově konvergentní na D, pokud je tato řada konvergentní v každém bodě $t \in D$. Tedy, pokud platí

$$(\forall t \in D)(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in I\!N)(\forall n, m > N)(|\sum_{k=1}^{n} f_k(t) - \sum_{k=1}^{m} f_k(t)| < \varepsilon) \tag{5}$$

Říkáme, že funkční řada je stejnoměrně konvergentní na D, pokud platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in I\!N)(\forall n, m > N)(\forall t \in D)(|\sum_{k=1}^{n} f_k(t) - \sum_{k=1}^{m} f_k(t)| < \varepsilon) \tag{6}$$

Věta 3.2. *(Spojitost řad funkcí) Pokud řada spojitých funkcí f_k na množině D konverguje stejnoměrně k funkci*

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t),$$

potom je funkce f spojitá na D.

Jednoduché kritérium stejnoměrné konvergence následuje.

Věta 3.3. *Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$ je konvergentní řada s nezápornými členy. Pokud řada spojitých funkcí f_k na množině $D \subset I\!R$ splňuje $\sup_{t \in D} |f_k(t)| < d_k$, potom je funkční řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)$ stejnoměrně konvergentní ke spojité funkci na D.*

Věta 3.4. *(Integrace a derivování řad funkcí) Pokud řada spojitých funkcí f_k na intervalu $[a, b]$ konverguje stejnoměrně k funkci*

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t),$$

pak platí pro každé $x \in [a, b]$

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x f_k(t)dt.$$

Pokud jsou $f'_k(t)$ spojité, a konvergují na tomto intervalu stejnoměrně, pak platí pro každé $t \in [a, b]$

$$f'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(t)$$

Hlavními konkrétními příklady funkčních řad jsou mocninné řady a Fourierovy řady, kterým se budeme věnovat v dalším textu.

4. Mocninné řady a Taylorrův rozvoj

Mocninná řada se středem x_0 je formální funkční řada tvaru

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k. \tag{7}$$

Za určitých podmínek, tato řada konverguje a funkce f je tedy dobře definována na nějaké množině.

Definice 4.1. *Poloměr konvergence mocninné řady (7) je dán formulí*

$$R = \frac{1}{\limsup |a_k|^{\frac{1}{k}}}.$$

Věta 4.2. *Pro libovolné $0 < r < R$ řada (7) stejnoměrně konverguje na intervalu $(x_0 - r, x_0 + r)$. Pro $t \notin [x_0 - R, x_0 + R]$ řada (7) diverguje.*

Tato věta tedy přesně popisuje množinu bodrů na které mocninná řada má smysl (až na dvojici krajních bodrů intervalu konvergence, kde konvergence mrůže ale nemusí nastat).

Věta 4.3. *Pro libovolné $0 < r < R$ řada (7) na intervalu $(x_0 - r, x_0 + r)$ reprezentuje funkci třídy C^∞. Navíc platí*

$$a_k = \frac{f^k(x_0)}{k!}.$$

Příklady

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k, \quad t \in (-1, 1)$$

Derivováním a substitucí získáme

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} - \dots, \quad t \in (-1, 1)$$

$$\frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) t^k, \quad t \in (-1, 1)$$

Definice 4.4. *(Analytická funkce)*

Říkáme, že funkce f je analytická v okolí bodu $(x_0 - r, x_0 + r)$ právě když je C^∞ hladká a platí

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \quad x \in (x_0 - r, x_0 + r).$$

Nekonečná řada v rozvoji f se nazývá Taylorova řada f se středem v bodě x_0. Lze ukázat, že analytická funkce v okolí bodu $(x_0 - r, x_0 + r)$ je automaticky analytická v nějakém okolí každého bodu z tohoto intervalu. Zde je třeba si uvědomit, že změna bodu x_0 vede ke změně Taylorovy formule.

Příklady

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

$$f(x) = (1+x)^\alpha$$

Položme $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$, potom

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

Speciálně

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^k$$

Použitím $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ dostaneme

$$\arcsin x = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

Operace s mocninnými řadami:
Sčítání , derivování, integrace, kompozice.

5. Fourierovy řady

Motivace z lineární algebry a Euklidovského prostoru (prostoru se skalárním součinem).

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$$
$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

Věta 5.1. *(Orthogonalita trigonometrického systému) Je-li $k, m \in I\!N$, $\omega > 0, T = \frac{2\pi}{\omega}$ pak*

$$\int_0^T \sin k\omega t\cos m\omega t = \int_0^T \cos k\omega t\cos m\omega t = \int_0^T \sin k\omega t\sin m\omega t = 0$$

pro $k \neq m$, jinak $\frac{T}{2}$.

Definice 5.2. *Pro $\omega > 0$ a $a_k, b_k \in I\!R$ nazýváme řadu*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\omega t + b_k\sin k\omega t)$$

trigonometrickou řadou.

Věta 5.3. *Nechť*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\omega t + b_k\sin k\omega t)$$

a tato řada konverguje stejnoměrně. Potom platí

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos k\omega t,\ b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin k\omega t$$

Definice 5.4. *Nechť f je periodická po částech spojitá funkce s periodou T. Řadu*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\omega t + b_k\sin k\omega t)$$

kde

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos k\omega t,\ b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin k\omega t$$

nazýváme Fourierovou řadou funkce f.

Věta 5.5. *Nechť f je periodická po částech spojitá funkce s periodou T. Pokud $a_k, b_k = 0, k \in I\!N$ potom $f = 0$ na $[0, T]$.*

Drukaz. Předpokládejme, že f je spojitá v okolí a a platí $f(a) > 0$, $T = 2\pi$. Zvolme $p(t) = \varepsilon + \cos(t-a)$, pro vhodné $\varepsilon > 0$, tak že $p_k(t) = p(t)^k > 1$ pouze na malém okolí a. Dostaneme $\lim_{k\to\infty}\int_0^T f(t)p_k(t) \to \infty$. Protože $p_k(t)$ je trigonometrický polynom, lze ho přepsat jako lineární kombinaci $\sin nt, \cos nt$, a tedy musí existovat $n \in I\!N$ takové ze $a_n \neq 0$ nebo $b_n \neq 0$. $\square$

Věta 5.6. *Nechť f je periodická funkce s periodou T třídy C^2. Potom $a_k, b_k = O(\frac{1}{k^2})$. Fourierova řada funkce f konverguje stejnoměrně na $[0,T]$ k funkci f.*

*D***r***ukaz.* $T = 2\pi$ pro jednoduchost. Per partes:

$$a_k = \int_0^T f(t)\cos kt = [f(t)\frac{1}{k}\sin kt]_0^{2\pi} - \frac{1}{k}\int_0^T f'(t)\sin kt = \frac{1}{k}\int_0^T f'(t)\sin kt =$$

$$= [f(t)\frac{1}{k^2}\cos kt]_0^{2\pi} + \frac{1}{k^2}\int_0^T f''(t)\cos kt = \frac{1}{k^2}\int_0^T f''(t)\cos kt$$

□

Následující silnější věta bez d**r**ukazu.

Věta 5.7. *Nechť f je periodická po částech spojitá funkce s periodou T, která má po částech spojitou derivaci. Potom její Fourierova řada konverguje bodově k součtu $s(t) = \frac{1}{2}(f(t+) + f(t-))$. Pokud je f' spojitá, pak řada konverguje stejnoměrně na $[0,T]$ k funkci f.*

Příklady.

$$\cos t = \frac{2}{\pi} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(16k^2-1)\pi}(\cos 4kt - 4k\sin 4kt), \quad t \in (0, \frac{\pi}{2})$$

$$t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k}\sin kt, \quad t \in (-\pi, \pi)$$

$$t^2 = \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{k^2\pi^2}\cos k\pi t, \quad t \in (-1,1)$$

$$f(t) = t,\ 0 \le t \le 1, 1,\ 1 \le t \le 2,\ \frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{\cos k\pi - 1}{k^2\pi^2}\cos k\pi t - \frac{1}{k\pi}\sin k\pi t), \quad t \in (0,2)$$

$$f(t) = |t| = \frac{1}{2} - \sum_{k=0}^{\infty}(\frac{4}{\pi^2(2k+1)^2}\cos(2k+1)\pi t, \quad t \in (-1,1)$$

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{if } 0 \le t < \frac{\pi}{2}, \\ 1 & \frac{\pi}{2} < t < \pi, \end{cases} = \frac{2+\pi}{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{-2}{\pi(4k^2-1)}\cos 2kt + (\frac{4k(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)} + \frac{1-(-1)^k}{k\pi})\sin 2kt), \quad t \in (0,\pi)$$

6. Množiny v $I\!R^n$ a funkce více proměnných

Množina $I\!R^n$ spolu s obvyklými operacemi po složkách tvoří základní příklad lineárního (vektorového) prostoru dimenze n.

Definice 6.1. *Skalární součin vektorru* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ *z* $I\!R^n$ *je roven*

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

Definice 6.2. *(Euklidovský prostor)*

Lineární prostor $I\!R^n$ *spolu se skalárním součinem* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *vytváří strukturu které říkáme Euklidovský prostor. Délka (nebo norma) vektoru je definována takto:*

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Použitím Pythagorovy věty je zřejmé, že takto definovaná délka vektoru odpovídá délce vektoru ve fyzikálním smyslu.

Z fyzikálního hlediska, prvky Euklidovského prostoru $I\!R^n$ lze považovat buď za body, potom užijeme k jejich označení velká písmena $P, Q, \ldots$ nebo za vektory (s prvním bodem v počátku). vektory označujeme buď tučně $\mathbf{x}$ nebo šipkou $\overrightarrow{x}$. Budeme bude $P = (p_1, \ldots, p_n), Q = (q_1, \ldots, q_n)$ dvojice bodru, potom $\overrightarrow{PQ} = (p_1 - q_1, \ldots, p_n - q_n)$ je vektor touto dvojicí určený. Pro Euklidovskou vzdálenost těchto bodru platí

$$\operatorname{dist}(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + \cdots + (p_n - q_n)^2}.$$

Definice 6.3. *(Konvergence v Euklidovském prostoru)*

Říkáme, že posloupnost bodru $\{(x_1^k, \ldots, x_n^k)\}_{k=1}^{\infty}$ *z* $I\!R^n$ **konverguje** *k bodu* $(x_1, \ldots, x_n)$ *pokud skalární posloupnost* $\{\|(x_1^k, \ldots, x_n^k) - (x_1, \ldots, x_n)\|\}_{k=1}^{\infty}$ *konverguje k* 0.

Tvrzení 6.4. *Posloupnost* $\{(x_1^k, \ldots, x_n^k)\}_{k=1}^{\infty}$ *v* $I\!R^n$ *konverguje k bodu* $(x_1, \ldots, x_n)$ *právě tehdy když každá z posloupností* $\{x_j^k\}_{k=1}^{\infty}$ *konverguje k* x_j*, tedy pruvodní posloupnost vektoru konverguje po složkách.*

Drukaz. □

Definice 6.5. *Říkáme, že množina* $M \subset I\!R^n$ *je omezená, pokud existuje* $R > 0$ *takové, že* $\forall x \in M,\ \|x\| < R$.

Věta 6.6. *Každá nekonečná omezená posloupnost* $\{x^k\} \subset I\!R^n$ *obsahuje konvergentní podposloupnost.*

Drukaz. Vyberme $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset M$, $x_k = (x_k^1, \ldots, x_k^n)$ posloupnost navzájem rruzných prvkru z M. Přejdeme postupně k podposloupnostem této posloupnosti použitím principu úplnosti tak, aby posloupnosti jednotlivých souřadnic konvergovaly. □

Definice 6.7. *Kruhové okolí bodu* x*: pro* $\delta > 0$,

$$U_\delta(x) = \{y; \|x - y\| < \delta\}$$

Definice 6.8. *Nechť* $M \subset I\!R^n$*. Potom bod* $x \in I\!R^n$ *se nazývá*

vnitřní bod *pokud*

$$U_\delta(x) \subset M, \text{pro nějaké } \delta > 0$$

vnější bod *pokud*

$$U_\delta(x) \cap M = \emptyset, \text{ pro nějaké } \delta > 0$$

hraniční bod *pokud současně platí*

$$U_\delta(x) \cap M \neq \emptyset, U_\delta(x) \cap (I\!R^n \setminus M) \neq \emptyset \text{ pro každé } \delta > 0$$

Fakt 6.9. *Pro libovolnou množinu $M \subset I\!R^n$ každý bod $x \in I\!R^n$ splňuje právě jednu z předchozích podmínek.*

Příklady.

Definice 6.10. **Vnitřek množiny** *M° je definován jako množina všech vnitřních bodru M.* **Hranice množiny** *∂M je definována jako množina všech hraničních bodru.* **Uzávěr množiny** *M je definován jako $\overline{M} = M \cup \partial M$. Říkáme, že množina $M \subset I\!R^n$ je* **otevřená**, *pokud $M = M^\circ$. Říkáme, že množina $M \subset I\!R^n$ je* **uzavřená**, *pokud $M = \overline{M}$.*

Příklady.

$\{p_1, \dots, p_k\} \subset I\!R^2$ $\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ $\{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$ nadrovina v$I\!R^n$

Fakt 6.11. *Sjednoceni systému otevřených množin je otevřená množina.*

Fakt 6.12.

$$\overline{M} = \{x \in I\!R^n; \forall\delta > 0,\ U_\delta(x) \cap M \neq \emptyset\}$$

Drusledek 6.13. *Pro každou množinu platí $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$, tedy uzávěr libovolné množiny je uzavřená množina. M je uzavřená právě když $I\!R^n \setminus M$ je otevřená.*

Věta 6.14. *$M \subset I\!R^n$ je uzavřená a omezená právě když každá nekonečná posloupnost $\{x^k\} \subset M$ obsahuje konvergentní podposloupnost jejíž limita leží v M.*

Drusledek 6.15. *Funkce $f : [a,b] \to I\!R$ je spojitá právě když její graf je uzavřená množina.*

7. Limity a spojitost funkcí více proměnných

Pod pojmem funkce více proměnných budeme rozumět funkce typu

$$f : D \to I\!R^m, \text{ kde } D \subset I\!R^n.$$

Obvykle je f zadáno formulí

$$f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

kde f_j jsou reálné funkce s definičním oborem D (a hodnotami v $I\!R$).

Pokud definiční obor D není specifikován, bere se obvykle maximální možný kde má funkční zadání smysl.

Graf funkce je podmnožina $I\!R^n \times I\!R^m$ která obsahuje právě body $(x, f(x))$. Lze ji nakreslit pouze pro malá n, m, použití rruzných řezru a vrstevnic, nebo užitím symetrie.

Příklady.

Hlavní příklady jsou $f : I\!R^n \to I\!R$, $f : I\!R^n \to I\!R^n$ a dále lineární funkce reprezentovatelné pomocí matic.

$$f(x, y) = ax^2 + by^2, \quad a, b \in I\!R$$

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

$$f(x, y) = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

$$f(x, y) = \sin(x + y)$$

$$f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$$

Definice 7.1. *Říkáme, že funkce $f : D \to I\!R^m$, $D \subset I\!R^n$, má v bodě $x \in \overline{D}$* **limitu** *a pokud platí*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall y \in D \setminus \{x\}, \; \|y - x\| < \delta \implies \|f(y) - a\| < \varepsilon$$

Příklady. (e.g. polární souřadnice, nebo jiná metrika $\max\{|x|, |y|\}$)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = 0 \;\; (polrn)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin^3(x + y)}{x^2 + y^2} = 0 \;\; (\max\{|x|, |y|\}, \lim \frac{\sin t}{t} = 1)$$

Pokud limita existuje, existují všechny limity podél spojitých křivek blížících se k bodu limity, $t \to (x(t), y(t))$, kde $(x(t), y(t)) = a \Leftrightarrow t = 0$, a tyto limity jsou si rovny. Tedy platí

$$\lim_{t\to 0} f(x(t), y(t)) = \lim_{(x,y)\to a} f(x, y)$$

Tato podmínka vsak není prakticky použitelná pro ověření existence limity. Lze ji použít jako podmínku nutnou, tedy k drukazu neexistence limity.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4} neex. x = 0, x = y$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} neex. x = 0, x^2 = y$$

Definice 7.2. *Říkáme, že funkce $f : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ je* **v bodě** $x \in D$ **spojitá** *pokud se její funkční hodnota rovná limitě.*

Věta 7.3. *Funkce $f = (f_1, \ldots, f_n) : D \to \mathbb{R}^n$ je spojitá v bodě $a \in D$ právě když všechny funkce f_j jsou spojité v bodě a.*

Díky této větě stačí tedy vždy zkoumat spojitost skalárních funkcí.

Věta 7.4. *(Věta o kompozici spojitých funkcí)*
Nechť $A \subset \mathbb{R}^n, B \subset \mathbb{R}^m, C \subset \mathbb{R}^k$, $f : A \to B, h : B \to C$ jsou funkce s vlastnostmi: f je spojitá v bodě $a \in A$, h je spojitá v bodě $b = f(a)$. Potom $h \circ f$ je spojitá v bodě $a \in A$.

Speciálně tedy platí

Drusledek 7.5. *Nechť $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$. Potom funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \phi(x_j)$$

je spojitá v každém bodě $(x_1, \ldots, a, \ldots, x_n)$.

Věta 7.6. *Nechť $A \subset \mathbb{R}^n, B \subset \mathbb{R}^m$, $f : A \to B, g : A \to B$ jsou funkce spojité v bodě $a \in A$. Potom $f + g$ je spojitá v $a \in A$, pokud $B = \mathbb{R}$ potom též $fg, \frac{f}{g}$ jsou spojité v bodě $a \in A$ (u podílu pokud $g(a) \neq 0$).*

Díky těmto větám mružeme snadno najít limity funkci které jsou spojité.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{y+1} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{1+xy}{xy-1} = 3$$

Definice 7.7. *Říkáme, že funkce $f : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ je* **spojitá** *pokud je spojitá v každém bodě $x \in D$.*

Použitím všech předchozích vět o spojitosti funkcí dostáváme výsledek, že každá "rozumně"definovaná funkce více proměnných (pomocí formule obsahující obvykle spojité funkce jedné proměnné) je spojitá ve svém definičním oboru.

Př.

$$f(x, y, z) = \sin(x^2 - \frac{y}{z})$$

8. Stejnoměrná spojitost funkcí více proměnných

Věta 8.1. *Spojitá funkce $f : D \to \mathbb{R}$ na omezené uzavřené množině $D \subset \mathbb{R}^n$ je omezená (tedy její obor hodnot tvoří omezenou množinu) a nabývá svého maxima a minima.*

Definice 8.2. *Funkce $f : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ je* **stejnoměrně spojitá** *pokud platí*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0,\ \ \|y - x\| < \delta \implies \|f(y) - f(x)\| < \varepsilon$$

Příklady:

$$f(x) = \sin x, f(x) = x^2, f(x) = \tan x$$

Následující věta bude použita při konstrukci integrálu.

Věta 8.3. *Nechť $D \subset \mathbb{R}^n$ je uzavřená omezená podmnožina, $f : D \to \mathbb{R}^m$ je spojitá. Potom f je stejnoměrně spojitá na D.*

9. Parciální derivace prvního řádu

Definice 9.1. *(Směrová derivace)*

Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená podmnožina. **Směrová derivace** *funkce $f : U \to \mathbb{R}$ v bodě $a \in U$ ve směru h je dána výrazem*

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{h}}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t}.$$

Jako zkrácené značení se též užívá $\partial_h f(a)$. použitím Tvrzení 1.9 získáme

Tvrzení 9.2.

$$f(a+th) = f(a) + Kt + o(t) \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \mathbf{h}}(a) \text{ existuje a je rovno } K.$$

Příklad.

$$f(x,y) = x^2 + y^2, a = (1,0), h = (1,1)$$

Tvrzení 9.3. *Nechť $t \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}^n$ potom*

$$\frac{\partial f}{\partial (th)}(a) = t\frac{\partial f}{\partial h}(a)$$

Drukaz.

$$f(a+\tau th) = f(a) + \frac{\partial f(a)}{\partial (th)}\tau + o(\tau)$$

$$f(a+\tau th) = f(a) + \frac{\partial f(a)}{\partial (h)}t\tau + o(t\tau)$$

□

Tvrzení 9.4. *Pokud funkce f má spojitou směrovou derivaci ve směru h v každém bodě úsečky $a(a+h)$, pak platí*

$$f(a+h) - f(a) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \mathbf{h}}(a+th)dt$$

Drukaz. Položme $\phi(t) = f(a+th)$, $t \in [0,1]$. Podle základní věty analýzy

$$f(a+h) - f(a) = \phi(1) - \phi(0) = \int_0^1 \phi'(t)dt = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \mathbf{h}}(a+th)dt$$

□

Odtud plyne následující Věta o střední hodnotě.

Tvrzení 9.5. *Pokud funkce f má spojitou směrovou derivaci ve směru h v každém bodě úsečky $a(a+h)$, pak existuje $\tau \in [0,1]$ takové, že*

$$f(a+h) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{h}}(a+\tau h)$$

Speciální případ, derivace ve směru souřadnicových vektorru,

Definice 9.6. *(Parciální derivace)*

Nechť e_j je jednotkový souřadnicový vektor, potom budeme používat historické značení:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \frac{\partial f}{\partial e_j}(a)$$

Definice 9.7. *Nechť $U \subset I\!R^n$ je otevřená podmnožina.* **Gradient** *skalární funkce $f : U \to I\!R$ v bodě $a \in U$ je vektor (pokud parciální derivace existují)*

$$gradf(a) = \big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\big)$$

Z historických druvodru je více druhru značení. Užívá se též např. ∇,
Příklady.

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - (x^2 + y^2) + xy$$

$$f(x,y) = \sin(x + xy^2)$$

V tomto kurzu budeme pro zjednodušení jazyka a značení ztotožňovat lineární zobrazení $L : I\!R^n \to I\!R^m$ s jeho reprezentující maticí tvaru $m \times n$.

Definice 9.8. *Nechť $U \subset I\!R^n$ je otevřená podmnožina.* **Derivace** *(ve starší terminologii* **totální diferenciál**, *nebo* **diferenciál***) funkce $f : U \to I\!R$ je lineární zobrazení (resp. matice) $L : I\!R^n \to I\!R$ s vlastností*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - Lh}{\|h\|} = 0.$$

Pokud derivace (diferenciál) existuje, značíme jí $df(a) = L$, $df(a)[h] = Lh$.

Je zřejmé, že pokud derivace existuje, je určena jednoznačně. Speciální případ derivace pro reálně hodnotové funkce

Tvrzení 9.9. *Nechť $U \subset I\!R^n$ je otevřená podmnožina. Funkce $f : U \to I\!R$ má derivaci v bodě $a \in U$ právě když existuje lineární zobrazení (matice) $L : I\!R^n \to I\!R$ takové, že*

$$f(a+h) = f(a) + Lh + o(\|h\|).$$

V tomto případě navíc platí $df(a) = L$.

Je zřejmé, že derivace je určena jednoznačně, a implikuje spojitost funkce v daném bodě. Dále je zřejmé, že Taylorova formule 1. řádu poskytuje nejlepší lineární aproximaci funkce v okolí bodu.

Věta 9.10. *Nechť $U \subset I\!R^n$ je otevřená podmnožina. Pokud $f : U \to I\!R$ má derivaci v bodě $a \in U$, pak má v tomto bodě všechny směrové derivace a pro každé h platí*

$$df(a)[h] = \partial_h f(a) = gradf(a) \cdot h \tag{8}$$

Tedy gradient tvoří maticovou reprezentaci derivace (resp. vektorovou reprezentaci při použití skalárního součinu) a platí .

$$f(a+h) = f(a) + gradf(x) \cdot h + o(\|h\|).$$

Drukaz. Podle Tvrzení 9.9 víme, že platí pro matici L reprezentující $df(a)$

$$f(a+th) = f(a) + tLh + o(\|h\|t).$$

Pro pevné h, $K = Lh$ a $t \to 0$ tedy máme

$$f(a+th) = f(a) + Kt + o(t).$$

Aplikací Tvrzení 9.2 tedy

$$L(h) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{h}}(a)$$

Volbou $h = e_i$ získáváme

$$L(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

Tedy maticová reprezentace L derivace $df(a)$ splňuje $L = gradf(a)$ a (8) plyne neboť $df(a)[h] = Lh = gradf(a) \cdot h$.

$\square$

10. Gradient a derivace prvního řádu

Věta 10.1. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená podmnožina. Pokud jsou všechny parciální derivace $f : U \to \mathbb{R}$ v bodě $a \in U$ spojité, potom má f v tomto bodě derivaci.*

Drukaz. použitím věty o střední hodnotě 9.5 a 9.3

$$f(a+h)-f(x) = f(a+(h_1,\dots,h_n))-f(a+(0,h_2,\dots,h_n))+f(a+(0,h_2,\dots,h_n))-$$

$$-f(a+(0,0,h_3,\dots,h_n))+\dots-f(a) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_j}(a^j+\tau_j h_j e_j)h_j$$

kde $a^j = a+(0,\dots,0,h_{j+1},\dots,h_n)$. Ze spojitosti parciálních derivací máme

$$f(a+h)-f(a) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)h_j + o(\|h\|)$$

a výsledek plyne z věty 9.9. □

Najděte nejlepší lineární aproximaci funkce $f(x,y,z) = x^3+xy^2+z$ v okolí bodu $(0,1,2)$.

Definice 10.2. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená podmnožina. Pokud jsou všechny parciální derivace všech složek funkce $f = (f_1,\dots,f_m) : U \to \mathbb{R}^m$ spojité, potom říkáme že funkce je třídy C^1.*

Reformulace Tvrzení 9.4.

Tvrzení 10.3. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená podmnožina, $f : U \to \mathbb{R}$ je třídy C^1, a úsečka $a(a+h)$ leží uvnitř U, pak platí*

$$f(a+h)-f(a) = \int_0^1 df(a+th)[h]dt$$

Příklady pro použití gradientu k získání geometrických vlastnosti grafu funkce.

Tvrzení 10.4. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená podmnožina. Nechť $f : U \to \mathbb{R}$ má v bodě a diferenciál $df(a) = grad\ f(a)$. Potom vektor gradientu dává směr nejrychlejšího rrustu funkce. Vektor $(df(a),-1)$ je kolmý na graf funkce f v bodě a (normálový vektor).*

Drukaz. Nechť h je jednotkový vektor, $\|h\| = 1$, potom

$$f(a+h) = f(a) + grad\ f(a)\cdot h + o(\|h\|) = f(a) + \|grad\ f(a)\|\|h\|\cos(\phi) + o(\|h\|)$$

kde ϕ je úhel sevřený vektory $grad\ f(a)$ a h. Nejrychlejší rrust je tedy zřejmý. Nyní položme $x = a+h$,

$$x_{n+1} = f(x) = f(a) + grad\ f(a_1,\dots,a_n)\cdot(h_1,\dots,h_n) + o(\|h\|) =$$

$$= f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(a)}{\partial x_i}(x_i-a_i) + o(\|h\|)$$

$$-(x_{n+1}-f(a)) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(a)}{\partial x_i}(x_i-a_i) = o(\|h\|)$$

Normálový vektor $(df,-1)$ nadroviny v $\mathbb{R}^{n+1}$ (tečné ke grafu f v bodě a)

$$-(x_{n+1}-f(a)) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(a)}{\partial x_i}(x_i-a_i) = 0$$

je tedy kolmý na graf f. □

Najděte tečnou rovinu ke grafu funkce $f(x,y) = x^3 + y^3$ v bodě $(x,y) = (1,2)$.

Najdete úhel pod kterým se protínají grafy funkcí $f(x,y) = x^3 + y^3$, $g(x,y) = x^2 + y^2 + 4$ v bodě $(x,y) = (1,2)$

Definice 10.5. *Nechť $V \subset \mathbb{R}^n$, $f : V \to \mathbb{R}$. Říkáme, že f má v bodě $a \in V$* **absolutní maximum** *(resp. minimum), pokud $f(a) = \max_{x \in V} f(x)$ (resp $\min$).*

Říkáme že f má v bodě $a \in V$ **lokální maximum** *(resp. minimum), pokud existuje $\delta > 0$ takové, že $f(a) = \max_{x \in V \cap U_\delta(a)} f(x)$ (resp $\min$). Pokud f má v bodě $a \in V$ bud lokální maximum nebo minimum, říkáme že má v a* **lokální extrém***.*

Je zřejmé, že absolutní extrémy jsou automaticky též lokálními extrémy.

Tvrzení 10.6. *Nechť $V \subset \mathbb{R}^n$, $f : V \to \mathbb{R}$ má v bodě $a \in V^\circ$ lokální extrém a diferenciál $df(a)$. Potom $df(a) = 0$.*

Bod**r**um kde derivace je nulová říkáme kritické body. Je tedy zřejmé, že nutná podmínka pro existenci lokálního extrému ve vnitřním bodě definičního oboru je vlastnost býti kritickým bodem.

Příklad. Najděte kritické body funkce $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$. (vyjde sedlo $(0,0)$ a dvě lokální minima $(1,1), (-1,-1)$ k těmto závěr**r**um je nutné použít druhou derivaci)

Věta 10.7. *Nechť $V \subset \mathbb{R}^n$ je uzavřená omezená množina, $f : V \to \mathbb{R}$ je spojita funkce třídy C^1 na V°. Potom f nabývá svých absolutních extrém***r***u, a tyto body se nacházejí buď na hranici ∂V, nebo jsou vnitřními body V a v tomto případě jsou též kritickými body f.*

V obecném případě je k analýze chování funkce na hranici potřeba technika Lagrangeových multiplikátor**r**u, se kterou se seznámíme později. Někdy lze hranici analyzovat přímo.

Příklad: najděte extrémy funkce $f(x,y) = x^2 - 2x + y^2 - 2y$ v trojúhelníku $(0,0), (0,3), (3,0)$.

11. Obecná derivace prvního řádu a řetězové pravidlo

Definice 11.1. *(Obecný případ derivace)*

Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená podmnožina. Derivace (ve starší terminologii totální diferenciál) funkce $f : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ je lineární zobrazení (resp. matice $m \times n$) $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ s vlastností

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - Lh}{\|h\|} = 0.$$

Pokud derivace (diferenciál) existuje, značíme jí $df(a) = L$, $df(a)[h] = Lh$.

Tvrzení 11.2. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená podmnožina. Funkce $f : U \to \mathbb{R}^m$ má v bodě $a \in U$ derivaci právě když existuje lineární zobrazeni $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ takové, že*

$$f(a+h) = f(a) + Lh + o(\|h\|). \tag{9}$$

V tomto případě navíc platí $df(a) = L$.

Lze snadno vidět, že derivace představuje nejlepší lineární aproximaci funkce na okolí bodu, v tom smyslu, že rovnice (9) určuje jednoznačně zobrazení L.

Drusledek 11.3. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená podmnožina. Pokud je funkce $f : U \to \mathbb{R}^m$ v bodě $a \in U$ diferencovatelná, potom je v tomto bodě též spojitá.*

Věta 11.4. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená podmnožina. Pokud $f = (f_1, \dots, f_m) : U \to \mathbb{R}^m$ je třídy C^1 na okolí bodu $a \in U$, potom má f v bodě a diferenciál, a platí*

$$df(a) = \begin{pmatrix} df_1(a) \\ \vdots \\ df_m(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Tato matice se nazývá Jacobiho matice v bodě a. Dále platí lineární aproximační formule

$$f(a+h) = f(a) + df(a)[h] + o(\|h\|) = f(a) + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix} + o(\|h\|)$$

Součet diferencovatelných funkcí je opět diferencovatelná funkce.

Věta 11.5. *(Derivování složených funkcí)*

Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená podmnožina. Pokud funkce $f = (f_1, \dots, f_m) : U \to \mathbb{R}^m$ je v bodě a diferencovatelná a funkce $g = (g_1, \dots, g_k) : V \to \mathbb{R}^k$, $V \subset \mathbb{R}^m$ je v bodě $f(a)$ diferencovatelná, potom složená funkce $h = g \circ f : U \to \mathbb{R}^k$ je diferencovatelná v bodě a a její Jacobiho matice je rovna součinu Jacobiho matic reprezentujících $dh(a) = dg(f(a))df(a)$, tedy platí (položme $b = f(a)$)

$$dh(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(b) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(b) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial y_1}(b) & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial y_m}(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Po rozepsání tedy dostaneme pro případ $k = 1$:

$$h(x_1, \dots, x_n) = g(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_j} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

12. Parciální derivace vyššího řádu a Hessián

Derivace vyšších řádu jsou obecně definovány jako homogenní polynomy odpovídajícího stupně. Budeme se pro jednoduchost zabývat případem funkcí s hodnotami pouze v $I\!R$, a derivacemi druhého řádu.

Definice 12.1. *Nechť $f : U \to I\!R$ je funkce jejíž parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ (jakožto funkce proměnné $x \in U$) je opět diferencovatelná v bodě $a \in U$ podle proměnné x_i. Opakováním operace parciálních derivací získáme parciální derivace druhého řádu*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x_j})}{\partial x_i}(a)$$

V případě $i = j$ se používá zkrácený zápis $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

Věta 12.2. *Nechť $f : U \to I\!R$, $U \subset I\!R^n$ otevřená množina, $a \in U$. Jestliže derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ jsou spojité, pak jsou si rovny, tedy platí*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Drukaz. Mružeme předpokládat, že $n = 2, i = 1, j = 2$. Drukaz spočívá v úpravě dvěma zprusoby výrazu V pro $\delta \to 0$

$$V = f(x_1 + \delta, x_2 + \delta) - f(x_1 + \delta, x_2) - f(x_1, x_2 + \delta) + f(x_1, x_2)$$

Zavedeme funkci

$$\alpha(t) = f(x_1 + \delta, x_2 + t) - f(x_1, x_2 + t)$$

Potom

$$V = \alpha(\delta) - \alpha(0)$$

Podle věty o střední hodnotě existuje $\tau \in (0, \delta)$ tak, že

$$V = \alpha'(\tau)\delta = \delta\frac{\partial}{\partial x_2}[f(x_1{+}\delta, x_2{+}\tau){-}f(x_1, x_2{+}\tau)] = \delta[\frac{\partial}{\partial x_2}f(x_1{+}\delta, x_2{+}\tau){-}\frac{\partial}{\partial x_2}f(x_1, x_2{+}\tau)]$$

Ještě jednou použijeme větu o střední hodnotě a dostaneme, že existuje $\eta \in (0, \delta)$ pro něž platí

$$V = \delta^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f(x_1 + \eta, x_2 + \tau)$$

Prohozením role souřadnic dostaneme analogicky

$$V = \delta^2 \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} f(x_1 + \tilde{\eta}, x_2 + \tilde{\tau})$$

K dokončení drukazu použijeme spojitost těchto derivací. □

Definice 12.3. *Nechť $U \subset I\!R^n$ je otevřená podmnožina, $f : U \to I\!R$. Říkáme, že funkce f je třídy C^2 pokud všechny parciální derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ existují a jsou spojité na U.*

Definice 12.4. *Nechť $U \subset I\!R^n$ je otevřená množina, $f : U \to I\!R$ je třídy C^2, $a \in U$. Potom Hessiánem f v bodě a nazýváme symetrickou matici*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_n \partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Homogenní kvadratický polynom $P(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2+\sum\sum_{i<j}2a_{ij}x_ix_j$ v n proměnných lze jednoznačně vyjádřit s použitím symetrické matice ($a_{ij}=a_{ji}$)

$$P(x_1,\dots,x_n)=\begin{pmatrix}x_1 & \dots & x_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

Je zřejmé, že tato korespondence mezi homogenními kvadratickými polynomy a symetrickými maticemi je vzájemně jednoznačná.

Definice 12.5. *Nechť $U\subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $f:U\to\mathbb{R}$ je třídy C^2, $a\in U$. Potom definujeme druhou derivaci $d^2f(a)$ funkce f jako homogenní kvadratický polynom, reprezentovaný Hessiánem, pro který platí*

$$d^2f(a)[h]=\begin{pmatrix}h_1 & \cdots & h_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1\partial x_n}(a)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_n\partial x_n}(a)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\ \ddots\\ h_n\end{pmatrix}$$

Poznámka. Pro zjednodušení jazyka a značení budeme v dalším textu místy ztotožňovat druhou derivaci $d^2f(a)$ s Hessiánem (tyto objekty jsou ve vzájemně jednoznačném vztahu), tedy budeme psát (formálně nepřesně)

$$d^2f(a)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1\partial x_n}(a)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_n\partial x_n}(a)\end{pmatrix}$$

Věta 12.6. *(Taylorruv polynom 2 řádu)*

Nechť $U\subset\mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $f:U\to\mathbb{R}$ je třídy C^2, $a\in U$. Pak platí odhad

$$f(a+h)=f(a)+df(a)[h]+\frac{1}{2}d^2f(a)[h]+o(\|h\|^2) \tag{10}$$

Drukaz. Pro pevné $a\in U, v\in\mathbb{R}^n, \|v\|=1$, položme $\phi(t)=f(a+tv)$. Potom s použitím Věty 9.10 máme

$$\phi'(t)=\partial_v f(a+tv)=\mathrm{grad} f(a+tv)\cdot v=\sum_{j=1}^n\frac{\partial f(a+tv)}{\partial x_j}v_j$$

$$\phi''(t)=\partial_v(\phi'(t))=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a+tv)v_iv_j$$

Je zřejmé, že ϕ je třídy C^2, takže podle Věty 1.10

$$\phi(t)=\phi(0)+\phi'(0)t+\frac{1}{2}\phi''(0)t^2+R(0,t),$$

kde chyba splňuje nerovnost

$$|R(0,t)|\le\sup_{\tau\in[0,1]}|\phi''(\tau t)-\phi''(0)|t^2.$$

Tedy platí

$$f(a+tv)=f(a)+\sum_{j=1}^n\frac{\partial f(a)}{\partial x_j}tv_j+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a+tv)tv_itv_j+R(0,t)$$

Označíme-li $h=tv$ a dosadíme do této formule, máme

$$f(a+h) = f(a) + df(a)[h] + \frac{1}{2}d^2f(a)[h] + R(0,t)$$

K dokončení d**r**ukazu věty zbývá odvodit, že chyba $R(0,t)$ splňuje $o(\|h\|^2)$. Tento krok využívá pojmu normy matice, který jsme nezavedli a je tedy poněkud nad rámec našeho výkladu. Označíme-li A_τ Hessián f v bodě $a + \tau tv$,

$$A_\tau = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(a+\tau tv) & \cdots & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_n}(a+\tau tv) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a+\tau tv) & \cdots & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_n \partial x_n}(a+\tau tv) \end{pmatrix}$$

Potom odhad chyby $R(0,t)$ lze přepsat následovně (vektor v píšeme jako sloupcový)

$$|R(0,t)| \leq \sup_{\tau\in[0,1]} |v^T(A_\tau - A_0)v|t^2.$$

Vidíme tedy (f je třídy C^2), že bez ohledu na konkrétní hodnotu v,

$$|R(0,t)| \leq \sup_{\tau\in[0,1]} \|A_\tau - A_0\|\|v\|^2t^2 = \sup_{\tau\in[0,1]} \|A_\tau - A_0\|\|h\|^2 = o(\|h\|^2).$$

Odhad chyby je přitom uniformní ve všech směrech, což dokončuje d**r**ukaz.

□

Maticový zápis formule (10), kdy ztotožníme df s řádkovou maticí gradientu a d^2f s maticí Hessiánu, a vektor h je sloupcový, bude vypadat takto:

$$f(a+h) = f(a) + df(a)h + \frac{1}{2}h^T d^2f(a)h + o(\|h\|^2) \tag{11}$$

13. Aplikace Hessiánu na lokální extrémy

Z lineární algebry víme, že pro dvě báze $\{u_1, \dots, u_n\}, \{v_1, \dots, v_n\}$ vektorového prostoru X dimenze n existuje jednoznačně určená čtvercová matice $A = (a_{ij})$ taková, že pro každý prvek $u \in X$, který má vyjádření $u = \sum_{i=1}^n x_i u_i = \sum_{i=1}^n y_i v_i$, platí

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \tag{12}$$

Je přitom zřejmé, že j-tý sloupec A vyjadřuje vektor v_j zapsaný s pomocí báze $\{u_i\}$, tedy $v_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} u_i$.

Předpokládejme, že $F : X \to I\!R$ je funkce, kterou je možno vyjádřit pro každý vektor $u = \sum_{i=1}^n x_i u_i = \sum_{i=1}^n y_i v_i$ pomocí obvyklé formule s použitím souřadnic následovně (zde jsou $f, g : I\!R^n \to I\!R$ nějaké jednoznačně určené funkce):

$$F(u) = f(x_1, \dots, x_n) = g(y_1, \dots, y_n).$$

Z transformační formule 12 je zřejmé, že platí

$$f(\sum_{j=1}^n a_{1j} y_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{nj} y_j) = g(y_1, \dots, y_n) \tag{13}$$

Předpokládejme nyní, že chceme studovat nějakou funkci $f : I\!R^n \to I\!R$, třídy C^2. Považujeme kanonickou jednotkovou bázi $\{e_i\}$ prostoru $I\!R^n$ za bázi $\{u_i\}$ z předchozího výkladu (v prostoru X dimenze n, $F(\sum x_i u_i) = f(x_1, \dots, x_n)$), a máme k dispozici ještě další bázi $\{v_i\}$ prostoru X. Potom formule (13) vyjadřuje transformaci vyjádření funkce f z pruvodního souřadného systému s bází $\{u_i\}$ do nového vyjádření g s pomoci souřadného systému s bází $\{v_i\}$. Funkce $g : I\!R^n \to I\!R$, je kompozicí $g = f \circ A$, je tedy třídy C^2 (zde jsme ztotožnili matici A s lineárním zobrazením z $I\!R^n$ do $I\!R^n$, které je maticí A určeno). Máme tedy k dispozici dvě rruzné funkce $f, g : I\!R^n \to I\!R$, které ovšem reprezentují totéž zobrazení F, a mohou být tedy použity ke studiu F $(= f)$, speciálně k hledání lokálních extrémru. Derivováním složené funkce (13) v bodě $y \in I\!R^n$ vyjde

$$dg(y) = (\frac{\partial g(y)}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial g(y)}{\partial y_n}) = (\sum_{i=1}^n \frac{\partial f(Ay)}{\partial x_i} a_{i1}, \dots, \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(Ay)}{\partial x_i} a_{in}) \tag{14}$$

Což lze přepsat maticově

$$dg(y) = df(Ay)A = (\frac{\partial f(Ay)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(Ay)}{\partial x_n}) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{15}$$

$$d^2 g(y) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(Ay) a_{i1} a_{j1} & \cdots & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(Ay) a_{i1} a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(Ay) a_{in} a_{j1} & \cdots & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(Ay) a_{in} a_{jn} \end{pmatrix}$$

Což lze opět přepsat maticově $d^2 g(y) = A^T d^2 f(Ay) A$, tedy (ztotožněním Hessiánu s druhou derivací) získáme

$$d^2g(y) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(Ay) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(Ay) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(Ay) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(Ay) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

máme tedy transformovanou Taylorovu formuli (11) pro g, vyjádřenou maticově (předpokládáme, že vektor h je sloupcový a d^2f je Hessián-tedy matice)

$$g(y+h) = g(y) + df(Ay)Ah + \frac{1}{2}h^T A^T d^2 f(Ay)Ah + o(\|h\|^2)$$

Nyní jsme tedy v situaci, kdy vhodnou transfomací souřadnic A mružeme dosáhnout diagonalizace Hessiánu. K tomuto cíli je třeba použít věty z lineární algebry.

Připomeňme, že báze $\{\mathbf{u_1}, \dots, \mathbf{u_n}\}$ v $\mathbb{R}^n$ se nazývá ortonormální pokud její členové jsou jednotkové a navzájem kolmé vektory. Ortonormální báze ma význačnou vlastnost. Nechť $\mathbf{u_j} = (u_{1j}, \dots, u_{nj})$. Pokud zvolíme

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Potom $U^{-1} = U^T$. Pro hledání diagonální reprezentace Hessiánu tedy mružeme užít teorii podobnosti matic, a zejména vlastních čísel a vlastních vektorru. Toto vše je drusledkem jedné z hlavních vět lineární algebry:

Věta 13.1. *(Věta o hlavních osách)*

Pro každou symetrickou matici $H = (h_{ij})$ existuje orthonormální matice $A = (a_{ij})$ taková, že $A^THA = A^{-1}HA$ je diagonální matice, tedy

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Posloupnost vlastních čísel $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ je přitom určena jednoznačně.

Jako okamžitý drusledek věty získáváme, že pro každý kvadratický homogenní polynom $P(x_1, \dots, x_n)$

$$P(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

existuje orthonormální báze taková, že formule pro polynom v nových souřadnicích má tvar $P \circ U(y) = Q(y_1, \dots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$.

$$P \circ U(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2.$$

Příklad odvozený od polynomu $2x^2 + 2y^2 + 2xy$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Najdeme vlastní čísla $3, 1$ a vektory $(1, 1), (-1, 1)$ Orthogonální transformace bude tedy

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

a platí

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Definice 13.2. *Nechť $H = (h_{ij})$ je symetrická matice, s posloupností vlastních čísel $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Říkáme, že H je*

$$\textit{pozitivně definitní pokud } \lambda_n > 0,$$
$$\textit{negativně definitní pokud } \lambda_1 < 0,$$
$$\textit{indefinitní pokud } \lambda_1 > 0,\ \lambda_n < 0.$$

Povšimněme si, že případ $\lambda_1 = 0$ nebo $\lambda_n = 0$ není zahrnut.

Základní problém při diagonalizaci matice spočívá v tom, že vyžaduje řešení rovnice n tého stupně, pro které neexistuje vzorec pokud je n větší než čtyři.

Definitnost lze však testovat bez výpočtu vlastních čísel pomocí následující věty.

Věta 13.3. *(Sylvestrovo kritérium)*

Matice H je pozitivně definitní právě tehdy když jsou všechny hlavní subdeterminanty matice H kladné, tj.

$$d_m = det \begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1} & \cdots & h_{mm} \end{pmatrix} > 0, \quad m \leq n,$$

H je negativně definitní právě tehdy když $d_1 < 0$ a celá posloupnost $\{d_m\}_{m=1}^n$ střídá po každém kroku znaménka.

H je indefinitní jestlize $d_n \neq 0$ a posloupnost $\{d_m\}_{m=1}^n$ nesplňuje některou z předchozích podmínek. (Tato podmínka je postačující ale nikoliv nutná)

Jedním z drusledkru je následující kritérium pro lokální extrémy.

Věta 13.4. *Nechť $f : U \to I\!R$, $U \subset I\!R^n$ je otevřená množina, $a \in U$. Předpokládejme, že f má všechny derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$ spojité, a platí $df(a) = 0$. Pokud Hessián $d^2 f(a)$ je pozitivně definitní, potom f nabývá lokálního minima v a. Pokud Hessián $d^2 f(a)$ je negativně definitní, potom f nabývá lokálního maxima v a. Pokud Hessián $d^2 f(a)$ je indefinitní, potom f nenabývá lokálního extrému.*

Drukaz. Stačí provést transformaci Taylorovy formule f 2 řádu do nových souřadnic ve kterých je Hessián diagonální. □

Příklady na absolutní a lokální extrémy.

Zjistěte body lokálních extrémru:

$$z = x(3 - x^2) - y^2$$

2 kritické body, max a sedlo.

$$z = (x - y)^2 + 2(y + 1)^2 + 1 = x^2 + 3y^2 - 2xy + 4y + 3$$

$$z = x^3 + y^3 + 9xy + 27$$
$$z = xe^{y + x \sin x}$$

Zjistěte body absolutních extrém**r**u na množinách:

$$z = e^{xy}, \quad x + y = 1$$
$$z = x - 2y - 3, \quad 0 \leq x, y \leq 1, 0 \leq x + y \leq 1$$

14. Implicitní funkce a Lagrangeovy multiplikátory

V praxi je častý případ kdy vzájemnou závislost několika proměnných lze vyjádřit rovnicí
$$f(x_1, \dots, x_n) = 0.$$
Příklad: body na kružnici, nebo na sféře $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

V této situaci, obecně řečeno, nelze předpokládat že některá proměnná je funkcí ostatních. Lokálně to však platit mruže. Geometricky intuitivně řečeno, množiny bodru které splňují tuto rovnici tvoří plochy v $I\!R^n$. Jejich studium je umožněno lokálním nahrazením pomocí lineární aproximace

Věta 14.1. *(Věta o implicitní funkci)*

Nechť $U \subset I\!R^n$ je otevřená Množina, $F : U \to I\!R$ je třídy C^1, $F(a) = 0$, a předpokládejme ze některá parciální derivace $\frac{\partial F}{\partial x_j}(a)$ je nenulová. Potom existuje okolí $U_\delta(a)$ na kterém existuje jednoznačně definována funkce třídy C^1
$$x_j = h(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n),$$
taková, že platí
$$F(x_1, \dots, x_{j-1}, h(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n), x_{j+1}, \dots, x_n) = 0$$
a normálový vektor ke grafu takto implicitně zadané funkce má tvar $gradF$.

Větu nebudeme dokazovat, ale předpokládame-li že implicitní funkce existuje, výpočet jejícho gradientu lze provést následovně. Předpokládejme, že $\frac{\partial F}{\partial x_n}(a)$ je nenulová,
$$x_n = h(x_1, \dots, x_{n-1}), \ \ F(x_1, \dots, x_{n-1}, h(x_1, \dots, x_{n-1})) = 0$$
$$gradF(x_1, \dots, x_{n-1}, h(x_1, \dots, x_{n-1})) = (\frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_n}\frac{\partial h}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial F}{\partial x_n}\frac{\partial h}{\partial x_{n-1}}) = 0$$
Takže
$$\frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial x_n}\frac{\partial h}{\partial x_i} = 0, \ \ i = 1, \dots, n-1$$
$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial x_n}}$$
a normálový vektor ke grafu h má tvar
$$(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial x_n}}, \dots, -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_{n-1}}}{\frac{\partial F}{\partial x_n}}, -1)$$

Věta o implicitní funkci nám říká, že nulová množina C^1 funkce F je vlastně sjednocením nějakého systému grafru C^1 funkcí (pokud víme, že $gradF$ je všude nenulový). Jde tedy skutečně o plochu v intuitivním smyslu.

Příklad.

Příklad: Najděte $y'(0)$, kde $y(0) = 2$,
$$xe^y + ye^x - 2 = 0$$
Nalezněte tečnou rovinu k elipsoidu
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Druležitá situace při hledání extrému funkce $f : U \to \mathbb{R}$ nastává když chceme najít extrémy vzhledem k jisté podmnožině definičního oboru f, typicky definované nějakou rovnicí.

Př. Najděte maximální obsah který mruže mít obdélník se zadaným pevným obvodem. Najdete minimální hodnotu $f(x, y) = x + y$ na jednotkové kružnici.

Věta 14.2. *(Lagrangeovy multiplikátory) Jestliže $f, g_j : U \to \mathbb{R}$, $j = 1, ...k$, jsou spojitě diferencovatelné funkce na otevřené množině $U \subset \mathbb{R}^n$. Nechť*

$$M = \cap_{j=1}^{k} \{x \in U : g_j(x) = 0\}$$

Předpokládejme, že $dg_j(x)$, $j = 1, ..k$, jsou lineárně nezávislé pro všechna $x \in M$. Jestliže a je bodem lokálního extrému f vzhledem k M, pak existují λ_j, $j = 1, ..k$ taková, že platí

$$df(a) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j dg_j(a)$$

Drukaz. Dokážeme v případě $k = 1$. Podle věty o implicitní funkci, BUNO existuje $x_n = h(x_1, \ldots, x_{n-1})$ takové že

$$g(x_1, \ldots, x_{n-1}, h(x_1, \ldots, x_{n-1})) = 0$$

Takže

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial x_n} \frac{\partial h}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n-1$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x_i}}{\frac{\partial g}{\partial x_n}}$$

Kritický bod funkce

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, h(x_1, \ldots, x_{n-1})) : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$$

ma nulový gradient, takže platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial h}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n-1$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\frac{\partial f}{\partial x_n}}$$

Takže

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\frac{\partial g}{\partial x_i}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_n}}{\frac{\partial g}{\partial x_n}}, \quad i = 1, \ldots, n-1$$

a pro $\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_n}}{\frac{\partial g}{\partial x_n}}$ platí

$$gradf = \lambda gradg.$$

□

15. Lagrangeovy multiplikátory aplikace, absolutní extrémy

Příklady.

Najděte absolutní extrémy (absolutní extrémy existují na kompaktech):

$$z(x,y) = x^2 - y^2, \;\; x^2 + y^2 = 1$$

$$u(x,y,z) = xyz, \;\; x^2 + y^2 + z^2 = 1, \; x + y + z = 0$$

V rovině $2x - z = 0$ nalezněte bod, pro nějž je součet čtvercru vzdáleností od bodu $(1,1,1)$ a $(2,3,4)$ co nejmenší.

Nalezněte vzdálenost paraboly $y = x^2$ od přímky $y = x - 2$.

Dokažte nerovnost $\frac{x^n+y^n}{2} \geq (\frac{x+y}{2})^n$.

Najděte extrémy funkce $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ je-li $x^2 + y^2 + z^2 \leq 100$.

16. Dvojný integrál pres obdélník

Motivace: objemy těles v prostoru, hmotnost dvourozměrných nehomogenních útvarru apod. Diskuse pojmu obsahu v rovině (resp. objemu v prostoru).

1. obsah obdélníka (objem kvádru)
2. obsah konečného sjednocení obdélníkru (s prázdnými prruniky vnitřkru)- nezávislost na rozkladu (resp. pro kvádry)
3. obsah pod grafem funkce-limitní proces (objem pod grafem)

Problém zavedení obsahu pro obecnou podmnožinu v rovině, resp. prostoruhlavní role aditivity-diskuse.

Zavedení dvojného integrálu pro spojité funkce.

Nechť $D = [a, b] \times [c, d]$ je obdélník, $f : D \to I\!R$ spojitá funkce.

Definice 16.1. *Nechť $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$. Potom systém obdélníkru $\mathcal{D}$ $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, který pokrývá D, se nazývá dělením D.*

$$\|\mathcal{D}\| = \max\{x_{i+1} - x_i, y_{j+1} - y_j\}$$

Se nazývá norma dělení $\mathcal{D}$.

Definice 16.2. *Nechť $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$ vytváří dělení $\mathcal{D}$ obdélníku D. Nechť $f : D \to I\!R$ je spojitá funkce. Potom zavádíme*

$$S^*(f, \mathcal{D}) = \sum_i \sum_j \max\{f(x, y) : (x, y) \in [x_{i+1} - x_i] \times [y_{j+1} - y_j]\}$$

$$S_*(f, \mathcal{D}) = \sum_i \sum_j \min\{f(x, y) : (x, y) \in [x_{i+1} - x_i] \times [y_{j+1} - y_j]\}$$

které se nazývají horní , resp. dolní součet f přes dělení $\mathcal{D}$.

Je jasné, že platí

$$S^*(f, \mathcal{D}) \geq S_*(f, \mathcal{D})$$

Nechť $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$ vytváří dělení $\mathcal{D}$, $a = x_0 < u_1 < \cdots < u_N = b$, $c = v_0 < v_1 < \cdots < v_M = d$ vytváří dělení $\mathcal{R}$. Říkáme že dělení $\mathcal{R}$ je zjemněním dělení $\mathcal{D}$, jestliže $\{x_i\} \subset \{u_i\}, \{y_j\} \subset \{v_j\}$.

Tvrzení 16.3. *Nechť f je spojitá na D, dělení $\mathcal{R}$ je zjemněním dělení $\mathcal{D}$. Potom*

$$S_*(f, \mathcal{D}) \leq S_*(f, \mathcal{R}) \leq S^*(f, \mathcal{R}) \leq S_*(f, \mathcal{D})$$

Tvrzení 16.4. *Nechť f je spojitá na D, a dvě libovolná dělení $\mathcal{R}$, $\mathcal{D}$ jsou zadána. Potom*

$$S_*(f, \mathcal{D}) \leq S^*(f, \mathcal{R})$$

Drukaz. Plyne z předchozí věty s použitím společného zjemnění k těmto dvěma zjemněním. □

Věta 16.5. *Nechť $f : D \to I\!R$ je spojitá funkce. Potom pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení $\mathcal{D}$ s normou nejvýše δ platí*

$$S^*(f, \mathcal{D}) \leq S_*(f, \mathcal{D}) + \varepsilon$$

následující limity tudíž existují a jsou si rovny

$$\lim_{\|\mathcal{D}\| \to 0} S^*(f, \mathcal{D}) = \lim_{\|\mathcal{D}\| \to 0} S_*(f, \mathcal{D})$$

Drukaz: plyne ze stejnoměrné spojitosti f na D.

Definice 16.6. *(Definice dvojného integrálu pro obdélník)*

Nechť $f : D \to I\!R$ je spojitá funkce. Potom dvojný integrál přes D je definován následovně

$$\int\int_D f dS = \lim_{\|\mathcal{D}\|\to 0} S^*(f,\mathcal{D}) = \lim_{\|\mathcal{D}\|\to 0} S_*(f,\mathcal{D})$$

Věta 16.7. *(Fubiniho věta)*

Dvojný integrál přes obdélník $D = [a,b]\times[c,d]$ lze vyčíslit jako opakovaný integrál

$$\int\int_D f dS = \int_c^d (\int_a^b f(x,y)dx)dy = \int_a^b (\int_c^d f(x,y)dy)dx$$

Drukaz. Plyne z konstrukce integrálu, přesněji řečeno ze stejnoměrné spojitosti f která zaručí, že funkce $y \to \int_a^b f(x,y)dx$ je (stejnoměrně) spojitá a opakovaná integrace ma smysl. □

Příklady. Integrujte $f(x,y) = \frac{1}{(1+2x+3y)^2}$ přes obdélník $0 \le x \le 1$, $1 \le y \le 2$.

$$\int_0^1 \int_1^2 \frac{1}{(1+2x+3y)^2} dydx$$

$$\int_1^2 \frac{1}{(1+2x+3y)^2} dy = [-\frac{1}{3}\frac{1}{1+2x+3y}]_1^2 = \frac{1}{3}\frac{1}{4+2x} - \frac{1}{3}\frac{1}{7+2x}$$

$$\frac{1}{3}\int_0^1 (\frac{1}{4+2x} - \frac{1}{7+2x})dx = \frac{1}{3}\frac{1}{2}[\log(4+2x) - \log(7+2x)]_0^1 = \frac{1}{6}(\log 6 - \log 9 - \log 4 + \log 7) = \frac{1}{6}\log(\frac{7}{6})$$

Integrujte $f(x,y) = x^y$ pro $x > 0$ a $f(0,y) = 0$ přes obdélník $0 \le x \le 1$, $1 \le y \le 2$. Všimněte si, že tato funkce je spojitá.

$$\int_0^1 \int_1^2 x^y dydx = \int_0^1 \int_1^2 e^{y \log x} dydx$$

$$\int_1^2 e^{y\log x} dy = [\frac{1}{\log x} e^{y \log x}]_1^2 = \frac{x^2 - x}{\log x}$$

Další krok integrace naráží na problém nalezení primitivní funkce k $\frac{x}{\log x}$ (integrály tohoto typu lze převést na výrazy typu nekonečných řad). Diskuse existence primitivních funkci, e.g. $e^{x^2}, \sin x^2, \frac{1}{\log x}, \sqrt{1+x^3}$ etc. Tato teorie je velmi obsáhlá, v praxi použít tabulky integrálru apod.

Zvolme opačné pořadí integrace

$$\int_1^2 \int_0^1 x^y dxdy$$

$$\int_0^1 x^y dx = [\frac{1}{y+1} x^{y+1}]_0^1 = \frac{1}{y+1}$$

$$\int_1^2 \int_0^1 x^y dx dy = \int_1^2 \frac{1}{y+1} = [\log(y+1)]_1^2 = \log(\frac{3}{2})$$

17. Dvojný integrál přes základní oblast

Praxe vyžaduje pojem dvojného integrálu přes obecnější oblasti. Konstrukci nebudeme provádět, jde o technickou modifikaci předchozího případu.

Věta 17.1. *Základní oblastí typu $[x,y]$ (resp. typu $[y,x]$) budeme nazývat uzavřenou množinu $D \subset \mathbb{R}^2$ pro kterou existují interval $[a,b]$ a dvojice spojitých funkcí $s_1(t) \leq s_2(t)$ pro $t \in [a,b]$ tak, že*

$$D = \{(x,y) : x \in [a,b], s_1(x) \leq y \leq s_2(x)\}, \tag{16}$$

resp.

$$D = \{(x,y) : y \in [a,b], s_1(y) \leq x \leq s_2(y)\}. \tag{17}$$

Příklad.

$D = \{(x,y) : x \in [0,1], x^2 \leq y \leq x\}$ je typu $[x,y]$, a zároveň typu $[y,x]$, kde $D = \{(x,y) : y \in [0,1], y \leq x \leq \sqrt{y}\}$.

$D = \{(x,y) : x \in [-1,1], -x^2 \leq y \leq 1+x^2\}$ je typu $[x,y]$, ale nikoliv typu $[y,x]$.

Definice 17.2. *(Existence dvojného integrálu pro základní oblast)*

Nechť D je základní oblast v $\mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Potom dvojný integrál přes D $\int\int_D f dS$ existuje jako limitní hodnota limitního procesu obdobného případu kdy D je obdélník.

Poznámka. Pro konstantní funkci $f = 1$ je dvojný integrál roven plošnému obsahu D.

Věta 17.3. *(Fubiniho věta)*

Nechť D je základní oblast typu (16) (resp. (17)), $f : D \to \mathbb{R}$ spojitá funkce. Pak platí

$$\int\int_D f(x,y)dS = \int_a^b \Big(\int_{s_1(x)}^{s_2(x)} f(x,y)dy\Big)dx.$$

resp.

$$\int\int_D f(x,y)dS = \int_a^b \Big(\int_{s_1(y)}^{s_2(y)} f(x,y)dx\Big)dy.$$

Příklady na sestavování a výpočet integrálu.

$$\int\int_D \frac{x}{y} dS, \quad D = \{(x,y) :\ 1 \leq y \leq x \leq 2\} \tag{18}$$

$$\int\int_D \frac{x}{y} dS = \int_1^2 \int_1^x \frac{x}{y} dydx = \int_1^2 [x \log y]_1^x dx = \int_1^2 x \log x dx = 2 \log 2 - \frac{3}{4}.$$

$$\int\int_D ye^x dS, \quad D = \{(x,y) :\ y^2 \leq x \leq y+2\} \tag{19}$$

$$\int_{-1}^2 \int_{y^2}^{y+2} ye^x dxdy = \int_{-1}^2 [ye^x]_{y^2}^{y+2} dy = \int_{-1}^2 [ye^{y+2} - ye^{y^2}]dy = [ye^{y+2} - e^{y+2} - \frac{1}{2}e^{y^2}]_{-1}^2 = \frac{1}{2}e^4 + \frac{5}{2}e$$ [redacted]

$$\iint_D \sin y^2 dS, \quad D = \{(x,y):\ 0 \le y \le 1, 0 \le x \le y\} \tag{20}$$

$$\int_0^1 \int_0^y \sin y^2 dxdy = \int_0^1 [x \sin y^2]_0^y dy = \int_0^1 y \sin y^2 dy = \frac{1}{2}[-\cos y^2]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Při opačném pořadí opět vzniknou problémy, neboť vnitřní integrál $\int_0^1 \int_x^1 \sin y^2 dydx$ nelze nalézt.

Obecněji, pro oblast $D \subset I\!R^2$, kterou lze napsat jako konečné sjednocení základních oblastí $D = \cup_{j=1}^k D_j$, které nemají žádný společný vnitřní bod, lze zavést dvojný integrál obdobně, a platí

$$\iint_D f dS = \sum_{j=1}^k \iint_{D_j} f dS$$

Tato definice nezávisí na konkrétním rozkladu-nebudeme dokazovat.

Příklad. Vyjádřete jako opakovaný integrál.

$$\iint_D f dS, \quad D \text{ je omezeno křivkami } x = 2, y = x, xy = 1 \tag{21}$$

$$\iint_D f dS, \quad D \text{ je mezikruží } 1 \le x^2 + y^2 \le 4 \tag{22}$$

$$\iint_D f dS, \quad D \text{ splňuje } x^4 \le y^2 \le x^2 \tag{23}$$

Změňte pořadí integrace (a vypočtěte, pokud je to možné):

$$\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} f dxdy$$

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} f dydx + \int_1^3 \int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f dydx$$

$$\int_0^2 \int_0^{2x^2} f dydx + \int_2^4 \int_0^{10-x} f dydx + \int_4^7 \int_{x-4}^{10-x} f dydx$$

$$\int_0^1 \int_x^1 \sin y^2 dydx, \quad \int_0^1 \int_x^1 \sin(x^2) dydx$$

$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y} dydx$$

18. Dvojný integrál substituce

Nyní přejdeme k substituci (změně proměnných) ve dvojném integrálu. Substituce vychází z výsledku z lineární algebry pro lineární zobrazení. Nechť $\mathbf{u_j} = (u_{1j}, \ldots, u_{nj})$ jsou vektory v $I\!R^n$. Potom z lineární algebry víme že objem rovnoběžnostěnu R vytvořeného těmito vektory je roven

$$objem(R) = |Det \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}|$$

Tvrzení 18.1. *Nechť $L : I\!R^n \to I\!R^n$ je lineární zobrazení reprezentované maticí A. Potom $|DetA|$ je objem obrazu $L(D)$ jednotkové krychle $D = [0,1]^n$ v $I\!R^n$.*

Definice 18.2. *Nechť $U \subset I\!R^n$ je otveřená neprázdná množina, $\Phi : U \to I\!R^n$ je zobrazení, které má derivaci $d\Phi(a)$ v bodě $a \in U$. Absolutní hodnota determinantu Jacobiho matice (tedy derivace)*

$$\Delta_\Phi(a) = |Det \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}|$$

se nazývá Jakobián zobrazení v bodě a.

Věta 18.3. *(Věta o substituci v integrálu)*

Nechť $U, V \subset I\!R^2$ jsou dvě oblasti integrace, $\Phi : U \to V$ je prosté zobrazení se spojitou derivací na $V = \Phi(U)$, $f : V \to I\!R$. Potom

$$\int\!\!\int_V f dS = \int\!\!\int_U \Delta_\Phi \cdot f \circ \Phi dS$$

Polární souřadnice: diskuse zobrazení

$$\Phi : U = (0, 2\pi) \times (0, \infty) \to I\!R^2 \setminus \text{ polopřímka } [0, \infty) \times \{0\} = V$$
$$x(\phi, \rho) = \rho \cos \phi, \;\; y(\phi, \rho) = \rho \sin \phi, \;\Delta_\Phi = \rho$$

$$\int\!\!\int_E \sin(x^2 + y^2) dS, \;\; E = \{(x, y) : 1 \le x^2 + y^2 \le 16\} \tag{24}$$

$$\int\!\!\int_T \sqrt{x^2 + y^2}, \;\; T = \{(x, y) \in I\!R^2 : x^2 + (y + 2)^2 \le 4\} = \tag{25}$$

$$\int_\pi^{2\pi} \int_0^{-4\sin\phi} \rho^2 d\rho d\phi = \int_\pi^{2\pi} [\frac{1}{3}\rho^3]_0^{-4\sin\phi} d\phi = -\frac{1}{3}4^3 \int_\pi^{2\pi} \sin^3 \phi d\phi =$$

$$-\frac{1}{3}4^3 \int_\pi^{2\pi} (1 - \cos^2 \phi) \sin \phi d\phi = -\frac{1}{3}4^3 [\frac{1}{3}\cos^3 \phi - \cos \phi]_\pi^{2\pi} = \frac{4^4}{3^2}$$

$$\int\!\!\int_T \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \;\; T = \{(x, y) \in I\!R^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\} \tag{26}$$

Dokažte (použitím dvojného integrálu a polárních souřadnic)

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$$

Převeďte do polárních souřadnic.

$$\int_0^2 \int_0^y f dx dy$$

$$\int_0^1 \int_2^{\sqrt{9-y^2}} f dy dx$$

$$\int_{-1}^1 \int_0^{|y|} f dx dy$$

19. Trojný integrál

Trojný integrál přes základní oblasti v $\mathbb{R}^3$. Fyzikální motivací je například výpočet hmotnosti trojrozměrného tělesa s proměnnou hustotou.

Definice 19.1. *Základní oblast V v $\mathbb{R}^3$ typu $[x,y,z]$ je oblast ohraničená shora a zdola grafy spojitých funkcí $h_2(x,y), h_1(x,y)$ nad základní oblastí D typu $[x,y]$ v $\mathbb{R}^2$. (nad $[a,b]$ ohraničená dvěma grafy spojitých funkcí $s_1(x), s_2(x)$): Permutací pořadí x,y,z získáme základní oblasti všech ostatních typu.*

Trojný integrál lze definovat obdobně jako dvojný integral. Pro výpočet lze opět použít následující Fubiniho větu.

Věta 19.2. *(Fubiniho věta)*
Trojný integrál spojité funkce nad základní oblastí V typu $[x,y,z]$ v $\mathbb{R}^3$ splňuje

$$\int\int\int_V f(x,y,z)dV = \int_a^b \int_{s_1(x)}^{s_2(x)} \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)dzdydx$$

Trojný integrál pro obecnější oblasti, které jsou sjednocením konečně mnoha základních oblastí, které nemají žádný společný vnitřní bod lze získat použitím aditivity. Výsledný integrál na rozkladu nezávisí. Diskuse.
Příklady-sestavování integrál**ru**, na dva kroky.
Předpokládáme, že V je zadáno několika rovnicemi ploch (resp. nerovnicemi).

♣ Metoda 1. Řezy kolmé k vybranému směru x, y, z. V tomto případě interpretujeme integral $\int[\int\int_D]$

Výpočet objemu čtyřbokého jehlanu s vrcholy $(\pm 1, \pm 1, 0)$, $(0,0,h)$. Zvol směr z.

Výpočet objemu rotačního jehlanu s vrcholy $(\pm 1, \pm 1, 0)$, $(0,0,h)$. Zvol směr z.

♣ Metoda 2. Nalezeni $S \subset \mathbb{R}^2$ a dvojice funkcí $h_1, h_2 : S \to \mathbb{R}$. Interpetujeme $\int\int_D[\int]$. Tento postup je vhodný pokud mezi podmínkami definičního oboru lze najít proměnnou, která se vyskytuje právě ve dvou podmínkách ve formě vztahu $z = h_1(x,y), z = h_2(x,y)$.

Pokud V je základní oblast, potom metoda 2 bude vest k řesení, obecně ovšem nemusí taková proměnná existovat, např. pro mezikoulí

$$\{(x,y,z) : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$$

Nejjednodušší případ-integral přes kvádr $[a,b]\times[c,d]\times[e,f]$. Spočítejte hmotnost krychle $[0,a]^3$, jejíž hustota je rovna $\rho(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Trojboký jehlan ve speciální poloze: Najděte

$$\int\int\int_E \frac{1}{(1+x+y+z)^3} dV \tag{27}$$

kde E je omezeno plochami $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$.

$$\int\int\int_E (x+2)dV \tag{28}$$

kde E je omezeno plochami $y = x^2, x = z, x = y, z = 0$. $(z = h_1, h_2)$

$$\int\int\int_E xyzdV \tag{29}$$

kde E je omezeno plochami $y = x^2, x = y^2, z = xy, z = 0$. ($z = h_1, h_2$)

Sestavte

$$\iiint\limits_E f dV$$

kde E je kulový vrchlík omezený plochami $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq \frac{1}{2}$.

20. Trojný integrál substituce

Substituce v trojném integrálu.

Věta 20.1. *(Věta o substituci v integrálu) Nechť $U, V \subset I\!R^3$ jsou dvě oblasti integrace, $\Phi : U \to V$ je prosté zobrazení se spojitou derivací na $V = \Phi(U)$, $f : V \to I\!R$. Potom*

$$\int\int\int_{\Phi(U)} f dS = \int\int\int_{U} \Delta_\Phi f \circ \Phi dS$$

♣ Cylindrické souřadnice (polární souřadnice v x, y): $\rho > 0, \phi \in (0, 2\pi), z \in I\!R$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(\rho, \phi, z) = \begin{pmatrix} \rho\cos\phi \\ \rho\sin\phi \\ z \end{pmatrix}$$

$$d\Phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\rho\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \rho\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Odtud $\Delta_\Phi = \rho$.
Příklady.
Těleso E je ohraničeno plochami $x^2 + y^2 = 1, z = 4, z = 1 - x^2 - y^2$. Jeho hustota je přímo úměrná vzdálenosti bodu od osy válce. Najděte hmotnost tělesa.

Oznacime $f(x, y, z)$ hustotu, potom $f(x, y, z) = K\sqrt{x^2 + y^2} = K\rho$.

$$m = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{1-\rho^2}^4 Kr^2 dz d\rho d\phi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 K\rho^2[4 - (1 - \rho^2)] d\rho d\phi = \frac{12\pi K}{5}$$

♣ Sférické souřadnice: $\rho \geq 0, \phi \in (0, 2\pi), \vartheta \in (0, \pi)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(\rho, \phi, \vartheta) = \begin{pmatrix} \rho\sin\vartheta\cos\phi \\ \rho\sin\vartheta\sin\phi \\ \rho\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$d\Phi = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\phi & -\rho\sin\vartheta\sin\phi & \rho\cos\vartheta\cos\phi \\ \sin\vartheta\sin\phi & \rho\sin\vartheta\cos\phi & \rho\cos\vartheta\sin\phi \\ \cos\vartheta & 0 & -\rho\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

platí $\Delta_\Phi = \rho^2 \sin\vartheta$.

Spočítejte objem koule o poloměru r.

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r} \rho^2 \sin\vartheta d\rho d\vartheta d\phi = \frac{4\pi}{3} r^3$$

Najděte objem tělesa ohraničeného plochami $z \geq \sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2+z^2 \leq z$, $y \geq 0$.

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\cos\vartheta} \rho^2 \sin\vartheta d\rho d\vartheta d\phi = \frac{8}{3}\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3\theta \sin\vartheta d\vartheta d\phi = \frac{\pi}{2}$$

Další příklady na použití transformace souřadnic.

♣

$$\int\int\int_E \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} dV, \quad E=\{(x,y,z):\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$$

21. Křivky v R^n

Definice 21.1. *Množina $C \subset I\!R^n$ se nazývá oblouk, jestliže existuje spojité zobrazení*

$$\phi : [a,b] \to I\!R^n$$

na množinu C s vlastnostmi:

1. ϕ je na $[a,b)$ prosté, $\phi(b) \notin \phi((a,b))$, (pokud $\phi(a) = \phi(b)$ potom říkáme, že křivka je uzavřená.)

2. $\phi'(t) = [\phi_1'(t), \dots, \phi_n'(t)]$ je spojitá a nenulová na (a,b), a má limity v krajních bodech.

Parametrizaci splňující tyto podmínky budeme nazývat krátce hladká parametrizace.

Geometrický význam ϕ' je tečný vektor ke křivce, diskuse.

Příklady.

Graf funkce $y = f(x), x \in [a,b]$.

$$C = \{(x,y) : x = a_1 t + b_1, y = a_2 t + b_2\}$$

$$C = \{(x,y) : x^2 + y^2 = a^2\}$$

$$C = \{(\cos t, \sin t, t) : t \in I\!R\}$$

$$C = \{(x,y,z) : z = x^2 + y^2, \ \ z = x + y\}$$

Věta 21.2. *Nechť $C \subset I\!R^n$ je oblouk s hladkými parametrizacemi $\phi : [a,b] \to C, \psi : [c,d] \to C$. Potom existuje jednoznačně definovaná spojitě diferencovatelná monotonní funkce s nenulovou derivaci $h : [a,b] \to [c,d]$,*

$$\phi(t) = \psi(h(t)).$$

Říkáme, že h převádí hladkou parametrizaci ϕ na ψ. Pokud je h rostoucí, říkáme že parametrizace jsou souhlasné, pokud je klesající říkáme že jsou nesouhlasné.

Drukaz. Položme $h = \psi^{-1} \circ \phi$. Potom h je spojitá a na, zbývá ověřit diferencovatelnost, tedy existenci

$$\omega(t) = \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0}, \ t, t_0 \in (a,b).$$

Zvolme

$$\Phi(t) = \frac{\phi(t) - \phi(t_0)}{t - t_0}, \ \ \Psi(t) = \frac{\psi \circ h(t) - \psi \circ h(t_0)}{h(t) - h(t_0)}$$

Protože $\phi = \psi \circ h$, máme

$$\Phi(t) = \Psi(t)\omega(t) \tag{30}$$

Protože $\psi'(h(t_0)) \neq 0$ WLOG $\lim_{t \to t_0} \Psi_1(t) \neq 0$. Tedy $\Phi_1(t) = \Psi_1(t)\omega(t)$,

$$h'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \omega(t) = \lim \frac{\Phi_1(t)}{\Psi_1(t)} = \frac{\phi_1'(t_0)}{\psi_1'(h(t_0))}$$

$$\phi'(t_0) = \psi'(h(t_0))h'(t_0) \tag{31}$$

Odtud též vyplývá, že $h'(t_0) \neq 0$. □

Definice 21.3. *Při zadané hladké parametrizaci ϕ oblouku $C \subset I\!R^n$, jednotkový tečný vektor v bodě $x = \phi(t)$ je definován:*

$$\overrightarrow{\tau}(\phi(t)) = \frac{\phi'(t)}{\|\phi'(t)\|}$$

Díky (31) máme (podle znaménka h'):

Tvrzení 21.4. *Pro oblouk $C \subset I\!R^n$ existují právě dvě jednotková tečná pole (navzájem opačná). Přesněji, pokud ϕ a ψ jsou dvě rruzné hladké parametrizace, potom jejich jednotková tečná pole jsou totožná právě když parametrizace jsou souhlasné. Jinak jsou tečná pole opačná.*

Příklad: Najděte jednotkový tečný vektor k oblouku $\mathbf{r}(t) = (2, t, t^2)$ v bodě $(2, 1, 1)$.

Definice 21.5. *Množina $C \subset I\!R^n$ se nazývá křivka, jestliže existuje spojité zobrazení*

$$\phi : [a, b] \to I\!R^n$$

na množinu C takové, že existuje dělení intervalu $[a, b]$ na konečně mnoho po sobě jdoucích podintervalru $[a, c_1], [c_1, c_2], \dots, [c_m, b]$ takových, že na každém z nich je ϕ obloukovou hladkou parametrizací.

Parametrizaci křivky splňující tyto podmínky budeme nazývat krátce hladká parametrizace.

Každé hladké parametrizaci přiřadíme jednotkové po částech spojité tečné pole

$$\overrightarrow{\tau}(\phi(t)) = \frac{\phi'(t)}{\|\phi'(t)\|}$$

Definice 21.6. *Nechť $C \subset I\!R^n$ je křivka s hladkou parametrizací ϕ. Potom dvojice $(C, \overrightarrow{\tau})$ se nazývá orientovaná křivka. Používáme zkrácené značení $(C) = (C, \overrightarrow{\tau})$.*

Intuitivně, orientace je determinována podle směrem prruchodu křivkou od počátečního do koncového bodu. Pokud počáteční bod a koncový bod splývají, je třeba použít tečné pole místo pořadí bodu.

Říkáme, že uzavřená orientovaná křivka (C) v rovině je **pozitivně** (resp. negativně) orientovaná, pokud je orientace **proti** směru hodinových ručiček.

Definice 21.7. *Délka křivky $C \subset I\!R^n$ s parametrizaci $\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t))$, $t \in [a, b]$, je definována:*

$$L = \int_a^b \|\phi'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{(\phi_1'(t))^2 + (\phi_2'(t))^2 + (\phi_3'(t))^2} dt$$

Tvrzení 21.8. *Délka křivky nezáleží na parametrizaci.*

Drukaz. $\phi(t) = \psi(h(t))$ tedy

$$\phi'(t) = (\phi_1'(t), \phi_2'(t), \phi_3'(t)) = h'(t)(\psi_1'(h(t)), \psi_2'(h(t)), \phi_3'(h(t)))$$

$$L = \int_a^b |h'(t)| \sqrt{(\psi_1'(h(t)))^2 + (\psi_2'(h(t)))^2 + (\psi_3'(h(t)))^2} dt$$

substituce $s = h(t)$ (předpokládejme souhlasné orientace, $h' > 0$):

$$= \int_c^d \sqrt{(\psi_1'(s))^2 + (\psi_2'(s))^2 + (\psi_3'(s))^2} ds$$

□

Najděte délku křivky

$$C = \{[\cos t, \sin t, t] : t \in \mathbb{R}\}$$

22. Křivkový integrál 1. a 2. druhu

Definice 22.1. *(křivkový integrál 1. druhu)*

Nechť f je spojitá reálná funkce definovaná na křivce $C \subset I\!R^n$ s hladkou parametrizací $\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t)),\ \ t \in [a, b]$. Potom

$$\int\limits_C f ds = \int\limits_a^b f(\phi(t)) \|\phi'(t)\| dt = \int\limits_a^b f(\phi(t)) \sqrt{(\phi_1'(t))^2 + (\phi_2'(t))^2 + (\phi_3'(t))^2} dt$$

se nazývá se křivkový integrál 1 druhu funkce f podél C.

Tvrzení 22.2. *Křivkový integrál funkce f podél C nezávisí na parametrizaci.*

Drukaz. $\phi(t) = \psi(h(t))$ tedy

$$\phi'(t) = (\phi_1'(t), \phi_2'(t), \phi_3'(t)) = h'(t)(\psi_1'(h(t)), \psi_2'(h(t)), \phi_3'(h(t)))$$

Potom

$$\int\limits_C f ds = \int\limits_a^b f(\phi(t)) \|\phi'(t)\| dt = \int\limits_a^b f(\psi(h(t))) |h'(t)| \sqrt{(\psi_1'(h(t)))^2 + (\psi_2'(h(t)))^2 + (\psi_3'(h(t)))^2} dt$$

substituce $s = h(t)$ (předpokládejme souhlasné orientace, $h' > 0$):

$$= \int\limits_c^d f(\psi(s)) \sqrt{(\psi_1'(s))^2 + (\psi_2'(s))^2 + (\psi_3'(s))^2} ds$$

□

Diskuse-nezávisí ani na orientaci, na rozdíl od Riemannova integrálu na intervalu, kdy změna pořadí mezí mění znaménko integrálu (v Riemanově sumě se sčítá přes rozdíly $f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$, zde se bere délka elementárního kroku která je vždy pozitivní).

Příklady:

$$\int\limits_C x y^4 ds, \text{ C je pravá polovina kružnice } x^2 + y^2 = 16 \tag{32}$$

$$\int\limits_C x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}} ds, \text{ C je asteroida } x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 16 \tag{33}$$

Definice 22.3. *(Vektorové pole)*

Nechť $D \subset I\!R^n$, potom $\overrightarrow{F} : D \to I\!R^n$ se nazývá vektorové pole definované na D.

Definice 22.4. *(křivkový integrál 2. druhu)*

Nechť $\overrightarrow{F}$ je spojité vektorové pole definované na orientované křivce $(C, \overrightarrow{\tau})$. Potom křivkovým integrálem $\overrightarrow{F}$ podél orientované křivky (C) rozumíme křivkový integrál

$$\int\limits_{(C)} \overrightarrow{F} d\overrightarrow{s} = \int\limits_C \overrightarrow{F}(s) \cdot \overrightarrow{\tau}(s) ds$$

Věta 22.5. *Nechť $\overrightarrow{F}$ je spojité vektorové pole definované na orientované křivce $(C, \overrightarrow{\tau})$ s parametrizaci ϕ. Potom platí*

$$\int\limits_{(C)} \overrightarrow{F} d\overrightarrow{s} = \int\limits_C \overrightarrow{F}(s) \cdot \overrightarrow{\tau}(s) ds = \int\limits_a^b \overrightarrow{F}(\phi(t)) \cdot \frac{\phi'(t)}{\|\phi'(t)\|} \|\phi'(t)\| dt =$$

$$= \int_a^b F_1(\phi(t))\phi_1'(t) + F_2(\phi(t))\phi_2'(t) + F_3(\phi(t))\phi_3'(t)dt$$

a tento integrál nezávisí při zachování orientace na parametrizaci.

*D***r***ukaz.* $\phi(t) = \psi(h(t))$ tedy

$$\phi'(t) = (\phi_1'(t), \phi_2'(t), \phi_3'(t)) = h'(t)(\psi_1'(h(t)), \psi_2'(h(t)), \phi_3'(h(t)))$$

$$\int_a^b F_1(\phi(t))\phi_1'(t) + F_2(\phi(t))\phi_2'(t) + F_3(\phi(t))\phi_3'(t)dt$$

$$= \int_a^b F_1(\psi(h(t)))\psi_1'(h(t))h'(t) + F_2(\psi(h(t)))\phi_2'(h(t))h'(t) + F_3(\psi(h(t)))\phi_3'(h(t))h'(t)dt$$

$$= \int_c^d F_1(\psi(t))\psi_1'(s) + F_2(\psi(t))\psi_2'(s) + F_3(\psi(t))\psi_3'(s)ds$$

□

Příklady:

$$\int_{(C)} (x, y, x + y - 1)d\overrightarrow{s}, \quad \text{(C) je orientovaná úsečka } (1,1,1)(2,3,4) \tag{34}$$

$$\int_{(C)} (y, z, x)d\overrightarrow{s}, \quad \text{(C) je pozitivně orientovaná prrusečnice ploch } z = xy, x^2 + y^2 = 1. \tag{35}$$

D**r**uležitá situace nastává pro případ křivkového integrálu vektorového pole zadaného v oblasti prostoru, kdy nás zajímá závislost integrálu na křivce při zachování počátečního a koncového bodu.

Nechť $\overrightarrow{F}(x, y) = (y^3, x^3)$, spočtěte křivkový integrál z bodu $(0,0)$ do bodu $(1,1)$ podél úsečky, resp. paraboly $y = x^2$.

Nechť $\overrightarrow{F}(x, y) = (x^3, y^3)$, spočtěte křivkový integrál z bodu $(0,0)$ do bodu $(1,1)$ podél úsečky, resp. paraboly $y = x^2$.

23. Vektorové pole v $I\!R^n$

Věta 23.1. *(Základní věta pro křivkový integrál)*

Nechť $U \subset I\!R^n$ je otevřená podmnožina, $(C, \overrightarrow{\tau}) \subset U$ je orientovaná křivka vedoucí z bodu A do bodu B, $f : U \to I\!R$ je třídy C^1. Potom

$$\int_{(C)} gradf(s)d\overrightarrow{s} = f(B) - f(A).$$

Drukaz.

$$\int_{(C)} \mathrm{grad}f(s)d\overrightarrow{s} = \int_{C} df(s)\cdot\overrightarrow{\tau}(s)ds = \int_a^b df(\phi(t))\cdot\phi'(t)dt =$$

$$= \int_a^b \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\phi(t))\phi_j'(t)dt = \int_a^b \frac{d}{dt}(f(\phi(t))) = f(\phi(b)) - f(\phi(a))$$

□

Definice 23.2. *Říkáme že vektorové pole $\overrightarrow{F} : U \to I\!R^n$ je potenciální v otevřené množině $U \subset I\!R^n$ pokud existuje funkce $f : U \to I\!R$ třídy C^1 taková, že platí*

$$\overrightarrow{F} = gradf.$$

Říkáme že vektorové pole je konzervativní v oblasti $U \subset I\!R^n$, pokud křivkový integrál

$$\int_{(C)} \overrightarrow{F}d\overrightarrow{s} = f(B) - f(A).$$

podél křivky (C) ležící uvnitř U a spojující body $A, B \in U$ nezávisí na křivce (C).

Podle předchozí věty je zřejmé že potenciální pole je konzervativní.

Definice 23.3. *Říkáme, že otrevřená množina $U \subset I\!R^n$ je souvislá, jestliže každé dva body uvnitř U lze spojit lomenou čarou, která je obsažena v U. Říkáme, že otrevřená množina $U \subset I\!R^n$ je jednoduše souvislá, jestliže každou uzavřenou křivku v U lze spojitě zdeformovat do libovolného bodu v U.*

Věta 23.4. *Nechť $U \subset I\!R^n$ je otevřená souvislá podmnožina, $\overrightarrow{F} : U \to I\!R^n$ je spojité vektorové pole. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní.*

1. $\overrightarrow{F}$ je potenciální

2. $\overrightarrow{F}$ je konzervativní

3. Integrál $\overrightarrow{F}$ přes libovolnou orientovanou uzavřenou jednoduchou křivku (C) v U je roven nule.

Drukaz. 2 a 3 jsou ekvivalentní standartním argumentem. 1 implikuje 3 jsme již dokázali, zbývá 2 implikuje 1. Zvolíme libovolně $x_0 \in U$ a položíme

$$f(x) = \int_{(C)} \overrightarrow{F}d\overrightarrow{s}$$

kde (C) je libovolná orientovaná křivka z x_0 do x. platí

$$f(x + he_j) - f(x) = \int_0^h F(x + te_j)\cdot e_j dt = \int_0^h F_j(x + te_j)dt$$

Podle základní věty analýzy máme

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = F_j(x)$$

a odtud $gradf(x) = F(x)$.

$\square$

Pr. $f(x, y) = x^2 + y^2, df(x, y) = (2x, 2y)$

Obecný případ integrálu přes jednoduchou křivku je popsán v následující větě. Je třeba navíc předpokládat, že $\overrightarrow{F}$ je hladké a oblast je jednoduše souvislá!

24. Greenova věta

Věta 24.1. *(Greenova věta)*
Nechť $D \subset \mathbb{R}^2$ je jednoduše souvislá podmnožina, jejíž hranicí je jednoduchá uzavřená křivka (C), pozitivně orientovaná (tj. proti směru hodinových ručiček). Potom pro libovolné vektorové pole $\overrightarrow{F} = (F_1(x,y), F_2(x,y))$ třídy C^1, platí

$$\int\limits_{(C)} \overrightarrow{F} d\overrightarrow{s} = \int\int\limits_{D} (\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}) dS. \tag{36}$$

Drukaz. Pro základní oblast v obou směrech (tedy současně typu $[x,y]$ i $[y,x]$).

$$D = \{(x,y) : a \le x \le b : g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$

platí (podle základní věty analýzy):

$$\int\int\limits_{D} \frac{\partial F_1}{\partial y} dS = \int\limits_a^b \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) dy dx = \int\limits_a^b F_1(x, g_2(x)) - F_1(x, g_1(x)) dx. \tag{37}$$

Označíme $(C_1), (C_2), (C_3), (C_4)$ orientované části hraniční křivky (C), (C_1) je graf g_1, (C_3) je graf g_2.

Potom použitím parametrizace části C_1, $x \in [a,b], \phi(x) = (x, g_1(x)), \phi'(x) = (1, g_1'(x))$:

$$\int\limits_{(C_1)} (F_1(s), 0) \overrightarrow{\tau}(s) ds = \int\limits_{(C_1)} (F_1(x, g_1(x)), 0)(1, g_1'(x)) dx = \int\limits_a^b F_1(x, g_1(x)) dx$$

Potom použitím parametrizace části C_3, $x \in [b,a], \phi(x) = (x, g_2(x)), \phi'(x) = (-1, -g_2'(x))$:

$$\int\limits_{(C_3)} (F_1(s), 0) \overrightarrow{\tau}(s) ds = -\int\limits_a^b F_1(x, g_2(x)) dx$$

$$\int\limits_{(C_2)} (F_1(s), 0) \overrightarrow{\tau}(s) ds = \int\limits_{(C_4)} (F_1(s), 0) \overrightarrow{\tau}(s) ds = 0$$

Celkem, s užitím (37):

$$\int\limits_{(C)} (F_1(x,y), 0) d\overrightarrow{s} = \int\limits_{(C_1)} + \int\limits_{(C_2)} + \int\limits_{(C_3)} + \int\limits_{(C_4)} = \int\limits_a^b F_1(x, g_1(x)) - F_1(x, g_2(x)) dx = -\int\int\limits_{D} \frac{\partial F_1}{\partial y} dS.$$

Podobným postupem, jelikož oblast je základní v obou směrech,

$$\int\limits_{(C)} (0, F_2(s)) d\overrightarrow{s} = \int\int\limits_{D} \frac{\partial F_2}{\partial x} dS.$$

Sečtením těchto dvou rovností vyjde (36).

□

25. Konzervativní vektorové pole

Definice 25.1. *Říkáme, že pole $\overrightarrow{F}$ tridy C^1 v $U \subset I\!R^2$ je nevírové, pokud platí*

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0.$$

Př. $\overrightarrow{F}(x,y) = (2xy, xy^3)$ není nevírové. $\overrightarrow{F}(x,y) = (3+2xy, x^2-3y^2)$ je nevírové.

Věta 25.2. *Nechť $\overrightarrow{F}$ je vektorové pole třídy C^1 na jednoduše souvislé oblasti $U \subset I\!R^2$. Potom $\overrightarrow{F}$ je konzervativní právě když je nevírové.*

Drukaz. Jedna implikace je z Greenovy věty, druhá plyne ze záměnnosti parciálních derivací. □

Potenciálnost je vlastnost globální, nevírovost je lokální. Věta obecně neplatí bez předpokladu jednoduché souvislosti.

Příklady: nalezení potenciálního pole bud po složkách, nebo s použitím křivkového integrálu.

$$\overrightarrow{F}(x,y) = (3+2xy, x^2-3y^2) \ \text{ v } I\!R^2$$

$$\tfrac{\partial f}{\partial x} = 3 + 2xy,\ f = 3x + x^2y + g(y),\ \tfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 + g'(y) = x^2 - 3y^2.$$

$$g'(y) = -3y^2, \quad f(x,y) = 3x + x^2y - y^3$$

Následující pole je nevírové v $I\!R^2 \setminus \{0\}$, ale není potenciální. Spočti křivkový integrál podél jednotkové kružnice. Je ovšem potenciální na $\{(x,y) : y > 0\}$.

$$\overrightarrow{F}(x,y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}).$$

Definice 25.3. *Nechť $\overrightarrow{F}$ je vektorové pole třídy C^1 v $U \subset I\!R^3$, $(x,y,z) \in U$. Potom jeho rotace je definovaná následovně*

$$\operatorname{rot}\overrightarrow{F}(x,y,z) = det\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{pmatrix} = (\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y})$$

Říkáme že pole je nevírové, jestliže $\operatorname{rot}\overrightarrow{F} = 0$.

Tvrzení 25.4. *Nechť $\overrightarrow{F}$ je vektorové pole třídy C^1 v $I\!R^3$. Potom $\overrightarrow{F}$ je konzervativní právě když je* $\operatorname{rot}\overrightarrow{F} = 0$.

Pr:

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = (y^2, 2xy + e^{3z}, 3ye^{3z})$$

platí $\operatorname{rot} F = 0$. Nechť f je gradient $\overrightarrow{F}$, potom platí:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + e^{3z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3ye^{3z}$$

Tedy

$$f(x,y,z) = xy^2 + g(y,z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + \frac{\partial g}{\partial y}$$

Tedy

$$\frac{\partial g}{\partial y} = e^{3z}, g(y,z) = ye^{3z} + h(z)$$

$$f(x,y,z) = xy^2 + ye^{3z} + h(z)$$

$$\frac{\partial h}{\partial z} = e^{3z} = 3ye^{3z} - 3ye^{3z} = 0$$

tedy

$$f(x,y,z) = xy^2 + ye^{3z}$$

26. Plochy

Definice 26.1. *Množina $M \subset \mathbb{R}^3$ se nazývá elementární plocha, jestliže*

$$M = \{(x,y,z) : z = g(x,y), (x,y) \in D\}$$

kde g je spojitá na základní oblasti D a třídy C^1 na D°. (Nebo podobně pro libovolnou permutaci proměnných.) Krajem plochy se rozumí $g(\partial D) \subset M$.

Elementární plocha je tedy grafem funkce třídy C^1.
Příklad

$$M = \{(x,y,z) : z = \sqrt{1-x^2-y^2},\ (x,y) \in D\} \tag{38}$$

Definice 26.2. *Množina $M \subset \mathbb{R}^3$ se nazývá plocha, pokud existují elementární plochy M_j (tvořící tzv. rozklad M) takové, že $M = \cup_{j=1}^n M_j$, přičemž prrunik $M_i \cap M_j$ je bud křivka, nebo konečná množina.*

příklad. Sféra v $\mathbb{R}^3$, Krychle v $\mathbb{R}^3$.

Definice 26.3. *Nechť $M \subset \mathbb{R}^3$ je elementární plocha zadaná funkcí g na základní oblasti $D \subset \mathbb{R}^2$. Potom obsah plochy M je definován*

$$obsah(M) = \int\int_D \|(grad g, -1)\| dS = \int\int_D \sqrt{1 + (\frac{\partial g}{\partial x})^2 + (\frac{\partial g}{\partial y})^2} dS$$

Pokud M je plocha s rozkladem $M = \cup_{j=1}^n M_j$ na elementární podplochy, potom položíme:

$$obsah(M) = \sum_{j=1}^n obsah(M_j)$$

Diskuse: Definice pro elementární plochu vychází z faktu že vektor $(\text{grad} g, -1)$ je kolmý na graf g a jeho velikost se rovna koeficientu nafouknutí obsahu elementárního obdélníku z D. Definice má tedy geometrický základ a nezávisí na g (směru parametrizace). Definice pro plochu vychází z aditivity integrálu vzhledem na definiční obor.
Spočtěte obsah kulového vrchlíku

$$M = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1, x^2+y^2 \le \frac{1}{2}\}$$

$z = \sqrt{1-x^2-y^2}$

Definice 26.4. *Nechť $M \subset \mathbb{R}^3$ je plocha, $T \subset \mathbb{R}^2$ je základní oblast„ $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) : T \to M \subset \mathbb{R}^3$ je spojitá a třídy C^1 na M°, která je prostá na vnitřku T. Potom říkáme, že Φ je hladká parametrizace (nebo jenom parametrizace pro krátkost) plochy M.*

Př. Plášť válce $x^2 + z^2 = 3^2$, $-1 \le y \le 2$.

$$\Phi(\phi, y) = (3\cos\phi, y, 3\sin\phi).$$

Př. Parametrizace sféry o poloměru r: vycházíme ze sférických souřadnic.

$$\Phi(\phi, \vartheta) = (r\sin\vartheta\cos\phi, r\sin\vartheta\sin\phi, r\cos\vartheta).$$

Význam výrazu $\frac{\partial\Phi}{\partial s}, \frac{\partial\Phi}{\partial t}$. Podle definice,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial s}(s_0,t_0) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(\Phi(s_0+h,t_0) - \Phi(s_0,t_0)) =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}((\Phi_1(s_0{+}h,t_0),\Phi_2(s_0{+}h,t_0),\Phi_3(s_0{+}h,t_0)){-}(\Phi_1(s_0,t_0),\Phi_2(s_0,t_0),\Phi_3(s_0,t_0)))$$

Tedy pokud uvážíme křivku, běžící po povrchu plochy M, která je obrazem proměnné s tedy první souřadnice, s parametrizaci

$$\phi(s) = (\Phi_1(s,t_0),\Phi_2(s,t_0),\Phi_3(s,t_0))$$

Potom platí

$$\phi'(s_0) = \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s_0,t_0)$$

Tedy $\frac{\partial\Phi}{\partial s}(s_0,t_0)$ představuje tečný vektor ke křivce na povrchu M, tedy je též tečnou k ploše M. Totéž platí pro $\frac{\partial\Phi}{\partial t}(s_0,t_0)$.

Výraz

$$\frac{\partial\Phi}{\partial s}\times\frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

je tedy vektor kolmý (normálový) k ploše M. Jeho délka $\|\frac{\partial\Phi}{\partial s}\times\frac{\partial\Phi}{\partial t}\|$ je plocha elementárního elementu plochy, který je obrazem elementu v oblasti parametru, tedy představuje Jakobián zobrazeni Φ.

Větu o substituci 18.3 ve dvojném integrálu (pro případ konstantní funkce $f = 1$) tak mružeme zobecnit na tento případ následovně.

Věta 26.5. *Nechť $M \subset I\!R^3$ je plocha s hladkou parametrizaci $\Phi = (\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3) : T \to M \subset I\!R^3$. Potom platí*

$$obsah(M) = \int\int_T \|\frac{\partial\Phi}{\partial s}\times\frac{\partial\Phi}{\partial t}\| dS$$

Výsledek nezávisí na parametrizaci.

Spočtěte obsah anuloidu s vnitřním poloměrem r a vnějším poloměrem R: Parametrizace:

$$(\alpha,\beta)\to((R+r\cos\beta)\cos\alpha,(R+\cos\beta)\sin\alpha, r\sin\beta)$$

Výsledek: $(4\pi^2 rR)$.

Abstraktnější přístup k plošnému integrálu s použitím parametrizace se zakládá na použití Grammovy matice, kterou znáte z lineární algebry. Pro matici A typu $k\times n$, která reprezentuje lineární zobrazení $L : I\!R^k \to I\!R^n$, $n \geq k$, prostoru s Euklidovskou normou, jsou sloupce obrazy jednotkových vektorru z $I\!R^k$. k-rozměrný objem rovnoběžnostěnu V jimi vytvořeného v $I\!R^n$ je potom vyjádřen

$$\mathrm{Vol}_k(V) = \sqrt{\mathrm{Det} A^T A}.$$

Lze ověřit výpočtem, že pro náš případ vyjde stejná hodnota, tedy

$$\sqrt{\mathrm{Det}(\frac{\partial\Phi}{\partial s}\frac{\partial\Phi}{\partial t})^T(\frac{\partial\Phi}{\partial s}\frac{\partial\Phi}{\partial t})} = \|\frac{\partial\Phi}{\partial s}\times\frac{\partial\Phi}{\partial t}\|$$

27. Plošný integrál 1. druhu

Definice 27.1. *(Plošný integrál 1. druhu)*

Nechť $M \subset I\!R^3$ je elementární plocha zadaná funkcí g na základní oblasti D, a nechť $f : M \to I\!R$ je spojitá. Potom integrál f přes plochu M je definován

$$\int\!\!\int_M f dS = \int\!\!\int_D f(x,y,g(x,y))\sqrt{1+(\frac{\partial g}{\partial x})^2+(\frac{\partial g}{\partial y})^2} dS$$

Věta 27.2. *Nechť $M \subset I\!R^3$ je plocha s hladkou parametrizaci $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) : T \to I\!R^3$, a nechť $f : M \to I\!R$ je spojitá. Potom platí*

$$\int\!\!\int_M f dS = \int\!\!\int_T f(\Phi(s,t))\|\frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t}\| dS$$

Výsledek nezávisí na parametrizaci.

Vypočtěte plošný integrál

$$\int\!\!\int_M (x^2+y^2+z) dS$$

kde M je část rotačního paraboloidu $z = a^2 - x^2 - y^2, x^2+y^2 \leq \frac{a^2}{4}, a > 0$.

(použít cylindrické souřadnice $z = \rho\cos\phi, y = \rho\sin\phi, z = a^2 - \rho^2$)

Určete

$$\int\!\!\int_M \sqrt{x^2+y^2} dS$$

kde M je povrch jednotkové koule. Použít sférické souřadnice k parametrizaci ($r = 1$).

$$\Phi(\phi, \vartheta) = (r\sin\vartheta\cos\phi, r\sin\vartheta\sin\phi, r\cos\vartheta).$$

$$x = r\sin\vartheta\cos\phi \quad y = r\sin\vartheta\sin\phi \quad z = r\cos\vartheta$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \phi} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \phi} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial \phi} \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial \vartheta} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \vartheta} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial \vartheta} \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\sin\vartheta\sin\phi & r\sin\vartheta\cos\phi & 0 \\ r\cos\vartheta\cos\phi & r\cos\vartheta\sin\phi & -r\sin\vartheta \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} = -r^2\sin\vartheta(\sin\vartheta\cos\phi, \sin\vartheta\sin\phi, \cos\vartheta).$$

$$\|\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \psi}\| = r^2\sin\vartheta.$$

28. Plošný integrál 2. druhu

Definice 28.1. *Nechť $M \subset \mathbb{R}^3$ je plocha. Pokud existuje jednotkové spojité normálové vektorové pole $\overrightarrow{n}$, které každému vnitřnímu bodu plochy přiřadí jednotkový normálový vektor $\overrightarrow{n}$ k ploše M, potom říkáme že $\overrightarrow{n}$ zadává orientaci plochy M. Dvojice $(M, \overrightarrow{n})$ se nazývá orientovaná plocha.*

Příklady:

♣ Hranice ∂T tělesa $T \subset \mathbb{R}^3$ (v intuitivním smyslu, tedy T si představujeme jako fyzikální třírozměrný objekt) tvoří obvykle orientovatelnou plochu.

♣ Mobiruv pás nelze orientovat.

♣ Druležitá poznámka: v praxi se pracuje s plochami, které nejsou hladké (jen po částech hladké)-např. povrch krychle. Pro tyto plochy je třeba pojem orientace oslabit, ve smyslu existence orientace pro libovolně blízké hladké aproximace těchto ploch. Nebudeme detailně analyzovat.

Tvrzení 28.2. *Pokud $M \subset \mathbb{R}^3$ je elementární plocha, která je grafem funkce g*

$$M = \{(x, y, z) : z = g(x, y), (x, y) \in D\}$$

potom existují dvě orientace splňující jednu z formuli

$$\overrightarrow{n} = \frac{(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1)}{\|(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1)\|}$$

$$\overrightarrow{n} = \frac{(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), \frac{\partial g}{\partial y}(x, y), -1)}{\|(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), \frac{\partial g}{\partial y}(x, y), -1)\|}$$

Pokud M je hranicí základního tělesa v $\mathbb{R}^3$, potom lze definovat jeho orientaci vnitřním, nebo vnějším normálovým polem (bez drukazu).

Definice 28.3. *(Plošný integrál 2. druhu)*

Nechť $M \subset \mathbb{R}^3$ je orientovaná plocha s normálovým polem $\overrightarrow{n}$, která je sjednocením orientovaných elementárních ploch M_j. Plošný integrál spojitého vektorového pole $\overrightarrow{F} : M \to \mathbb{R}^3$ je definován

$$\int\int_{(M)} \overrightarrow{F} d\overrightarrow{S} = \int\int_{M} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n} dS = \int\int_{M_1} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}_1 dS + \cdots + \int\int_{M_k} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}_k dS$$

Tomuto plošnému integrálu se říká někdy ve fyzice tok vektorového pole plochou.

Tvrzení 28.4. *Pokud $M \subset \mathbb{R}^3$ je elementární plocha, která je grafem funkce g*

$$M = \{(x, y, z) : z = g(x, y), (x, y) \in D\}$$

potom (při horní orientaci plochy M):

$$\int\int_{(M)} \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{S} = \int\int_{D} \overrightarrow{F}(x, y, g(x, y)) \cdot (-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1) dS$$

Drukaz. platí

$$\overrightarrow{n} = \frac{(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1)}{\|(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1)\|}$$

použitím Definice 27.1 dojde k vykrácení jmenovatele. □

Pr. Spočtěte tok pole $\overrightarrow{F}(x,y,z)=(y,x,z)$ přes hranici tělesa ohraničeného paraboloidem $z=1-x^2-y^2$ a rovinou $z=0$ s vnější orientací.

Rozdělíme na horní část a dolní část, obě dané grafem funkcí $z=1-x^2-y^2$, resp. $z=0$. Výsledek $\frac{\pi}{2}$.

Horní integrál bude (parametrizace jako graf funkce):

$$\int\int_D (y,x,g(x,y))\cdot(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y),-\frac{\partial g}{\partial y}(x,y),1)dS$$

kde $D=\{(x,y):x^2+y^2\le 1,\ g(x,y)=1-x^2-y^2$.

Tvrzení 28.5. *Nechť M je elementární plocha daná funkcí g na základní oblasti D. Nechť $\Phi=(\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3):T\to\mathbb{R}^3$ je hladká parametrizace plochy M, taková, že vektorový součin $\frac{\partial\Phi}{\partial s}\times\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ je nenulový ve všech vnitřních bodech D. Potom orientace pomocí normálového vektoru splňuje následující (nebo -1 násobek)*

$$\overrightarrow{n}=\frac{\frac{\partial\Phi}{\partial s}\times\frac{\partial\Phi}{\partial t}}{\|\frac{\partial\Phi}{\partial s}\times\frac{\partial\Phi}{\partial t}\|}$$

Věta 28.6. *Nechť $(M,\overrightarrow{n})$ je orientovaná plocha a Nechť $\overrightarrow{F}:M\to\mathbb{R}^3$ je spojité vektorové pole. Nechť $\Phi=(\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3):T\to\mathbb{R}^3$ je hladká parametrizace plochy M, taková že vektorový součin $\frac{\partial\Phi}{\partial s}\times\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ je nenulový ve všech vnitřních bodech D a je pozitivním násobkem jednotkového normálového vektoru $\overrightarrow{n}$. Potom platí*

$$\int\int_M \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}dS=\int\int_T F(\Phi(s,t))\cdot(\frac{\partial\Phi}{\partial s}\times\frac{\partial\Phi}{\partial t})dS$$

Výsledek nezáleží na parametrizaci.

Pr.

$$\int\int_{(M)}(\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z})d\overrightarrow{S} \tag{39}$$

(M) je povrch elipsoidu $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ s poloosami a,b,c, orientovaný vnějším normálovým polem.

$$x=a\sin\theta\cos\phi\quad y=b\sin\theta\sin\phi\quad z=c\cos\theta$$

$$\Phi(\phi,\vartheta)=(a\sin\vartheta\cos\phi,b\sin\vartheta\sin\phi,c\cos\vartheta).$$
$$x=a\sin\vartheta\cos\phi\quad y=b\sin\vartheta\sin\phi\quad z=c\cos\vartheta$$

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\phi} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial\phi} & \frac{\partial\Phi_3}{\partial\phi}\\ \frac{\partial\Phi_1}{\partial\vartheta} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial\vartheta} & \frac{\partial\Phi_3}{\partial\vartheta}\\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a\sin\vartheta\sin\phi & b\sin\vartheta\cos\phi & 0\\ a\cos\vartheta\cos\phi & b\cos\vartheta\sin\phi & -c\sin\vartheta\\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\end{pmatrix}$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\times\frac{\partial\Phi}{\partial\psi}=-\sin\vartheta(bc\sin\vartheta\cos\phi,ac\sin\vartheta\sin\phi,ab\cos\vartheta).$$

Vidíme, že pole je orientováno dovnitř, musíme tedy změnit znaménko.

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\vartheta(\frac{1}{a\sin\vartheta\cos\phi},\frac{1}{b\sin\vartheta\sin\phi},\frac{1}{c\cos\vartheta})\cdot(bc\sin\vartheta\cos\phi,ac\sin\vartheta\sin\phi,ab\cos\vartheta)d\vartheta d\phi=$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\vartheta(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c})d\vartheta d\phi=4\pi(\frac{bc}{b}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c})$$

Pr.

$$\int\int\limits_{(M)} (x^2, y^2, z^2) d\overrightarrow{S},$$

(M) je povrch koule $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$ orientovaný vnějším normálovým polem.

$$\Phi(\phi, \vartheta) = (a + r\sin\vartheta\cos\phi, b + r\sin\vartheta\sin\phi, c + r\cos\vartheta).$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi_1}{\partial\phi} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial\phi} & \frac{\partial\Phi_3}{\partial\phi} \\ \frac{\partial\Phi_1}{\partial\vartheta} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial\vartheta} & \frac{\partial\Phi_3}{\partial\vartheta} \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\sin\vartheta\cos\phi & r\sin\vartheta\cos\phi & 0 \\ r\cos\vartheta\cos\phi & r\cos\vartheta\sin\phi & -r\sin\vartheta \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\phi} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\psi} = -r^2\sin\vartheta(\sin\vartheta\cos\phi, \sin\vartheta\sin\phi, \cos\vartheta).$$

Vidíme, že pole je orientováno dovnitř, musíme tedy změnit znaménko.

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} r^2\sin\vartheta((a+r\sin\vartheta\cos\phi)^2, (b+r\sin\vartheta\sin\phi)^2, (c+r\cos\vartheta)^2)\cdot(\sin\vartheta\cos\phi, \sin\vartheta\sin\phi, \cos\vartheta) d\vartheta d\phi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} r^2\sin\vartheta((a+r\sin\vartheta\cos\phi)^2, (b+r\sin\vartheta\sin\phi)^2, (c+r\cos\vartheta)^2)\cdot(\sin\vartheta\cos\phi, \sin\vartheta\sin\phi, \cos\vartheta) d\vartheta d\phi =$$

29. Gaussova Otrogradského věta

Definice 29.1. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $\overrightarrow{F} : U \to \mathbb{R}^n$ je vektorové pole třídy C^1. Pak jeho divergence je definována*

$$div\overrightarrow{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$$

Věta 29.2. *(Gaussova Ostrogradskeho věta)*

Nechť $E \subset \mathbb{R}^3$ je základní těleso, jehož hranice ∂E je plocha orientovaná vnějším normálovým polem $\overrightarrow{n}$. Je-li $\overrightarrow{F}$ vektorové pole třídy C^1 na E, pak platí

$$\int\int\int_E \operatorname{div} F dV = \int\int_{(\partial E)} \overrightarrow{F} d\overrightarrow{S} = \int\int_{\partial E} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n} dS$$

Nechť E je základní oblast typu 1,2,3, tedy lze ji považovat za těleso ohraničené shora a zdola grafy funkci nad základní oblasti v $\mathbb{R}^2$ (v každém směru), $S = \partial E$ je hranice. Nechť $F = (P, Q, R)$, tedy $divF = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$.

Stačí dokázat (ostatní dva obdobně), za předpokladu že $E = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, \phi_1(x, y) \le z \le \phi_2(x, y)\}$:

$$\int\int_S (0, 0, R) \cdot \overrightarrow{n} dS = \int\int\int_E \frac{\partial R}{\partial z} dV$$

Tedy

$$\int\int\int_E \frac{\partial R}{\partial z} dV = \int\int_D \Big(\int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z) dz\Big) dS$$

použitím základní věty analýzy:

$$\int\int\int_E \frac{\partial R}{\partial z} dV = \int\int_D (R(x, y, \phi_2(x, y)) - R(x, y, \phi_1(x, y)) dS$$

Označme $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, kde S_1 je spodní plocha, S_3 je horní plocha a S_3 je strana ve směru osy z, s odpovídající orientací. Je zřejmé, že normálový vektor $\overrightarrow{n}$ k ploše S_2 je kolmý na vektor $(0, 0, 1)$, takže

$$\int\int_S (0,0,R) \cdot \overrightarrow{n} dS = \int\int_{S_1} (0,0,R) \cdot \overrightarrow{n} dS + \int\int_{S_2} (0,0,R) \cdot \mathbf{n} dS + \int\int_{S_3} (0,0,R) \cdot \overrightarrow{n} dS$$

$$= \int\int_{S_1} (0, 0, R) \cdot \overrightarrow{n} dS + \int\int_{S_3} (0, 0, R) \cdot \overrightarrow{n} dS$$

Protože na S_3 platí (normálový vektor míří nahoru)

$$\overrightarrow{n} = \frac{(-\frac{\partial \phi_2}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial \phi_2}{\partial y}(x, y), 1)}{\|(-\frac{\partial \phi_2}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial \phi_2}{\partial y}(x, y), 1)\|}$$

platí (a podobně pro dolní stěnu).

$$\int\int_{S_3} (0, 0, R) \cdot \overrightarrow{n} dS = \int\int_D R(x, y, \phi_2(x, y)) dS$$

$$\int\int_{S_1} (0, 0, R) \cdot \overrightarrow{n} dS = \int\int_D -R(x, y, \phi_1(x, y)) dS$$

Pr.

$$\int\int_{(M)} (x,y,z)d\overrightarrow{S},$$ (M) je jednotková sféra orientovaná vnějším jednotkovým polem

Použijeme Gaussovu větu pro jednotkovou kouli, div$F = 3$, tedy

$$\int\int_{(\partial P)} \overrightarrow{F}d\overrightarrow{S} = \int\int\int_{P} 3dV = 3\frac{4\pi}{3} = 4\pi$$

Př.

$$\int\int_{(M)} (xy, y^2 + e^{xz^2}, \sin(xy))d\overrightarrow{S},$$

(M) je hranicí útvaru s vnější orientací

$$E = \{(x,y,z) : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - x^2, 0 \leq y \leq 2 - z\}$$

a $div\overrightarrow{F} = 3y$

$$\int\int_{(M)} (xy, y^2 + e^{xz^2}, \sin(xy))d\overrightarrow{S} = 3\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2}\int_{0}^{2-z} ydydzdx = \frac{184}{35}$$

30. Stokesova věta

Definice 30.1. *Nechť $(M, \overrightarrow{n})$ je orientovaná plocha, jejíž okraj je tvořen uzavřenou orientovanou jednoduchou křivkou $(C, \overrightarrow{\tau})$. Říkáme, že plocha a její okraj mají souhlasnou orientaci, jestliže pro vektory $\overrightarrow{n}, \overrightarrow{\tau}$ platí, že pokud se pohybujeme podél křivky ve směru $\overrightarrow{\tau}$ a naše hlava ukazuje ve směru $\overrightarrow{n}$, potom je plocha po naší levé ruce.*

Věta 30.2. *(Stokesova věta) Nechť $\overrightarrow{F}$ je vektorové pole třídy C^1 na otevřené množině obsahující elementární orientovanou plochu $(M, \overrightarrow{n})$, jejíž hraniční křivka $(C, \overrightarrow{\tau})$ je souhlasně orientovaná. Pak platí*

$$\int\limits_{(C)} \overrightarrow{F} d\overrightarrow{s} = \int\int\limits_{(M)} \operatorname{rot} \overrightarrow{F} d\overrightarrow{S}$$

kde

$$\operatorname{rot} \overrightarrow{F}(x,y,z) = det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{pmatrix} = (\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y})$$

Drukaz. Předpokládejme, že plocha $(M, \overrightarrow{n})$ je grafem funkce $z = g(x,y)$, orientovaná nahoru, kde $(x,y) \in D$ leží v jednoduše souvislé oblasti s hraniční pozitivně orientovanou jednoduchou křivkou (C_1), jejíž obraz je hraniční křivka (C) plochy (M).

$$\int\int\limits_{(M)} rot\overrightarrow{F} d\overrightarrow{S} = \int\int\limits_{D} (\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}) \cdot \overrightarrow{n} dS$$

$$= \int\int\limits_{D} (\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y})(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1) dS$$

$$\int\limits_{(C)} \overrightarrow{F} d\overrightarrow{s} = \int\limits_a^b (F_1(\phi(t)), F_2(\phi(t)), F_3(\phi(t)))\phi(t)' dt$$

$$= \int\limits_a^b (F_1(\phi(t)), F_2(\phi(t)), F_3(\phi(t)))(x'(t), y'(t), \frac{\partial g}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial g}{\partial y} y'(t)) dt$$

$$= \int\limits_a^b (F_1(\phi(t)) + F_3(\phi(t))\frac{\partial g}{\partial x}, F_2(\phi(t)) + F_3(\phi(t))\frac{\partial g}{\partial y})(x'(t), y'(t)) dt$$

použitím Greenovy věty

$$= \int\int\limits_{D} (\frac{\partial}{\partial x}(F_2(x,y,g(x,y)) + F_3(x,y,g(x,y))\frac{\partial g}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial y}(F_1(x,y,g(x,y)) + F_3(x,y,g(x,y))\frac{\partial g}{\partial x})) dS$$

Po provedení úprav

$$= \int\int\limits_{D} (\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y})(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1) dS$$

□

Příklady:

$$\int\limits_{(C)} (-y^2, x, z^2) d\overrightarrow{s} \tag{40}$$

(C, τ) je prrunik roviny $y + z = 2$ a válce $x^2 + y^2 = 1$, orientovaná kladně při pohledu shora.

platí

$$\operatorname{rot} \overrightarrow{F}(x, y, z) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x & z^2 \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{pmatrix} = (0, 0, 1 + 2y)$$

Množina $M = \{(x, y, z) : y + z = 2, x^2 + y^2 \leq 1\}$, zvolíme souhlasné orientace. M budeme parametrizovat jako graf funkce,

$$M = \{(x, y, z) : z = g(x, y), (x, y) \in D\}$$

s orientací nahoru, tedy

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} = (-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1)$$

Pak platí (použitím grafové parametrizace)

$$\int\limits_{(C)} \overrightarrow{F} d\overrightarrow{s} = \int\int\limits_{(M)} \operatorname{rot} \overrightarrow{F} d\overrightarrow{S} = \int\int\limits_{D} (1 + 2y) dS = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 (1 + 2r \sin\theta) r dr d\theta = \pi$$

Př.

Užitím Stokesovy věty spočítejte $\iint\limits_{(M)} \operatorname{rot} \overrightarrow{F} d\overrightarrow{S}$, kde $\overrightarrow{F} = (yz, xz, xy)$, M je část sféry $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, která leží uvnitř válce $x^2 + y^2 = 1$, orientovaná nahoru.

Hraniční křivka je (C), $x^2 + y^2 = 1, z = \sqrt{3}$. Parametrizace

$$r(t) = (\cos t, \sin t, \sqrt{3}),\ 0 \leq t \leq 2\pi$$
$$r'(t) = (-\sin t, \cos t, 0),\ 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\int\int\limits_{(M)} \operatorname{rot} \overrightarrow{F} d\overrightarrow{S} = \int\limits_{(C)} \overrightarrow{F} d\overrightarrow{r} = \int\limits_{C} \overrightarrow{F}(r(t)) \cdot r'(t) dt = \int\limits_0^{2\pi} (-\sqrt{3}\sin^2 t + \sqrt{3}\cos^2 t) dt = 0 \tag{41}$$

Pr. Trik se záměnou plochy za jinou plochu se stejnou hranici (v tomto případě kruh D, $x^2 + y^2 \leq 1$).

Užitím Stokesovy věty spočítejte $\iint\limits_{(S)} \operatorname{rot} \overrightarrow{F} d\overrightarrow{S}$, kde $\overrightarrow{F} = (x^2 yz, x, e^{2xy}\cos z)$, S je polosféra $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, orientovaná nahoru.

31. Cvičení 1-Řady

(1) Zjistěte zda řada konverguje (resp. absolutně konverguje):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+2n} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{5^n} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q-3)^n}{q^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+q)^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+7)^n}{(4n-2)^n} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-\sqrt{n}} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{3/2}} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin n}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3-1}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2\ln n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{(4n-2)^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}+1}{n^2+1}$$

32. Cvičení 2-Funkční řady

(2) Najděte poloměr a interval konvergence:

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{4^n n^2}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+5)^3 x^n}{n!}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+2)^n}{2^n+1}$

$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k+(-3)^{k+1}}{\sqrt{k+1}}(x+1)^k$

(3) Najděte Taylorovu řadu a její interval konvergence:

$f(x)=\sin(x^2),\quad x_0=0$ $f(x)=\frac{2}{3-5x},\quad x_0=0$

$f(x)=\ln(2+x^2),\quad x_0=0$ $f(x)=\frac{x}{x^2-x-2},\quad x_0=0$

$f(x)=\frac{3-2x}{(1-x)^2}\quad x_0=0$ $f(x)=\frac{x+3}{x-3}\quad x_0=-2$

$f(x)=\frac{1}{x}\quad x_0=-3$ $f(x)=\ln\frac{\sqrt{x}}{4-x}\quad x_0=1$

$f(x)=e^{-x}(2x+1)\quad x_0=0$ $f(x)=(x+1)\sin(2\pi x)\quad x_0=-1$

33. Cvičení 3 Fourierovy řady

(4) Najděte Fourierovu řadu funkce

$$f(t) = 3\sin^2 t + 2\cos^2 t, \quad t \in (0, 2\pi)$$

$$f(t) = \cos^4 t, \quad t \in (0, 2\pi)$$

$$f(t) = \begin{cases} \cos t & \text{pro } 0 \leq t < \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \frac{\pi}{2} < t < \pi, \end{cases}, \quad t \in (0, \pi)$$

$$f(t) = \begin{cases} \cos t & \text{pro } 0 \leq t < \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \frac{\pi}{2} < t < \pi, \end{cases}, \quad t \in (0, \pi)$$

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{pro } 0 \leq t < \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \frac{\pi}{2} < t < \pi, \end{cases}, \quad t \in (0, \pi)$$

34. CVIČENÍ 4-OPAKOVÁNÍ GEOMETRIE $\mathbb{R}^n$, PŘÍKLADY

Tvrzení 34.1. $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\cos\phi$, *kde ϕ je úhel sevřený oběma vektory.*

Drukaz. Uvažme trojúhelník s vrcholy $O = \mathbf{0}$, $A = \mathbf{x}, B = \mathbf{y}$. Podle kosinové věty platí

$$|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 - 2|OA||OB|\cos\phi.$$

Převedeno do do jazyka vektorru,

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\cos\phi.$$

Zbyva uzit definice normy použitím souřadnic.

□

Takže po úpravě dostaneme:

$$\cos\phi = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}.$$

Odtud plyne snadný test kolmosti dvou vektorru $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = 0$.

Definice 34.2. *Vektorový součin, pouze pro vektory z $\mathbb{R}^3$.*

$$\mathbf{x}\times\mathbf{y} = det\begin{pmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{pmatrix} = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1).$$

Dale zavedme smiseny součin

$$(\mathbf{x}\times\mathbf{y})\cdot\mathbf{z} = (x_2y_3 - x_3y_2)z_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)z_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)z_3 = \det\begin{pmatrix}z_1 & z_2 & z_3\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{pmatrix}$$

Odtud je vidět ze vektorovy součin je kolmy na oba součinitele. Protoze determinant je roven objemu rovnobeznostenu urceneho vektory v matici, vidime tez ze vektorovy součin je v absolutni hodnotě roven obsahu rovnobeznika urceneho vektory. Znamenko zaleží na orientaci, pravidlo právě ruky.

platí tedy:

$$\|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\sin\phi.$$

(1) Najděte velikost úhlu mezi hlavní diagonálou krychle a diagonálou jedné ze stran, která s ní má společný vrchol.
(2) Dokazte formuli pro kolmou projekci z vektoru $\mathbf{y}$ na vektor $\mathbf{x}$:
$$\mathbf{z} = (\frac{\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2})\mathbf{x}.$$
(3) Dokazte
$$\text{Cauchy-Schwartzova nerovnost } |\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}| \le \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|.$$
(4) Dokazte
$$\text{Trojúhelníková nerovnost } \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$
(5) Dokazte
$$\text{Rovnoběžníkové pravidlo } \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = 2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2.$$
(6) Dokažte že $\mathbf{x}\times\mathbf{y} = -\mathbf{y}\times\mathbf{x}$.
(7) Dokažte že $\mathbf{x}\cdot(\mathbf{y}+\mathbf{z}) = \mathbf{x}\times\mathbf{y} + \mathbf{x}\times\mathbf{z}$

(8) Dokažte že $\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z})\mathbf{y} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})\mathbf{z}$

Nechť P je bod ležíci v rovine dane tremi ruznymi body Q, R, S. Oznacme $\mathbf{a} = \overrightarrow{QR}, \mathbf{b} = \overrightarrow{QS}, \mathbf{c} = \overrightarrow{QP}$. Potom platí

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0.$$

Odtud lze odvodit rovnici pro rovinu urcenou body Q, R, S. Obecna formule pro rovinu (affini podprostor) je $ax + by + cz + d = 0$, normalovy vektor je například $\mathbf{n} = (a, b, c)$.

Rovina obsahujici bod $X = (x_1, x_2, x_3)$ s normalou $\mathbf{n} = (a, b, c)$ splnuje rovnici

$$(x - x_1, y - x_2, z - x_3) \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Vzdalenost bodu $X = (x_1, x_2, x_3)$ od roviny ρ dane formuli $ax+by+cz+d = 0$. Zvol libovolny $Y = (y_1, y_2, y_3)$ v rovine. Bud ϕ uhel mezi vektorem $\mathbf{v} = \overrightarrow{XY}$ a normalovym vektorem $\mathbf{n}$ roviny ρ. Potom

$$\operatorname{dist}(X, \rho) = \|\overrightarrow{XY}\| |\cos\phi| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}|}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{|ax_1 + bx_2 + cx_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

(9) Zjistěte zda přímka procházející body $(0, 0, 1)$ a $(1, -1, 6)$ je kolmá na přímku procházející body $(-4, 2, 1)$ a $(-1, 6, 2)$.

(10) Najděte rovnici pro rovinu procházející boděm $(1, 4, 5)$, která je kolmá na vektor $(7, 1, 4)$.

(11) Najděte rovnici pro rovinu obsahující body $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 3)$.

(12) Nechť P je bod ležící mimo rovinu danou třemi r**r**uznými body Q, R, S. Označme $\mathbf{a} = \overrightarrow{QR}, \mathbf{b} = \overrightarrow{QS}, \mathbf{c} = \overrightarrow{QP}$. Dokažte že vzdálenost bodu P od roviny splňuje

$$d = \frac{\|\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})\|}{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|}.$$

35. cvičení 5- Množiny a spojitost

(1) Diametr množiny M je definován vzorcem

$$diam(M) = \sup\{\|x-y\|, x, y \in M\}$$

Stanovte diametr množin: $M = [0,1]^2, M = [0,1]^3$ etc.

(2) Určete vnitřek, hranici a uzávěr množin:

$$M = \{(x,y) : x^2 + 2x + y^2 \leq 3, x^2 - 4x + y^2 \leq 0\}$$

$$M = \{(x,y,z) : x + y + z > 1\}$$

Q..racionální čísla

(3) Sestrojte příklady množin v $I\!R^2$ s následujícími vlastnostmi:
nemá vnitřní bod ani vnější bod
nemá hraniční bod
nemá vnější bod a je uzavřená
nemá žádný hromadný bod, ale není konečná
je uzavřená a každý její bod je izolovaný

(4) Dokažte že sjednocení libovolného systému otevřených množin je otevřená množina. Platí též pro prrunik?

(5) Najděte definiční obory funkcí
$f(x,y) = \ln(xy-1)$,
$f(x,y) = xy\sqrt{x^2+y}$,
$f(x,y,z) = \ln(1-x^2-y^2-z^2)$
$f(x,y) = \frac{\ln(4-x^2-y^2)}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$

(6) Nacrtnete graf funkce
$f(x,y) = 2 - x - 3y$
$f(x,y) = xy$
$f(x,y) = \sqrt{x^2+9y^2}$
$f(x,y) = \frac{x}{y}$
$f(x,y) = y - \cos x$

(7) Najděte limity
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$,
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x+y)}{x+y}$,
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+xy+y^2}{x^2-y^2}$,
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x^2+y^2}$,
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+2y^2}$,
$\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,2,3)} \frac{xz^2-y^2z}{xyz-1}$
$\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$
$\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy+yz+xz}{x^2+y^2+z^2}$,
$\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2y^2z^2}{x^2+y^2+z^2}$,

(8) Zjistěte zda existuje $c \in I\!R$ takové, aby následující funkce byla spojitá

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{2x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ c, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

36. CVIČENÍ 6-PARCIÁLNÍ DERIVACE

(1) Najděte následující směrové derivace
$f(x,y) = e^x \cos y, \quad P(1, \frac{\pi}{6}), \quad \mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$
$f(x,y,z) = z^3 - x^2 y, \quad P(1,6,2), \quad \mathbf{u} = (3,4,12).$

(2) Najděte tečnou rovinu ke grafu funkce

$$z = 2x^2 + y^2, \text{ v bodě } (1,1,3)$$

$$z = xy + \sin(x+y), \text{ v bodě } (1,-1,-1)$$

(3) Najděte linearizaci funkce $f(x,y,z) = e^{xy^2} + x^4 yz$ v bodě $(1,1,1)$.

(4) Najděte rovnici tečné roviny k elipsoidu

$$x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$$

která je rovnoběžná s rovinou $4x + 2y + z = 0$.

(5) Najděte rovnici tečné roviny k elipsoidu

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$$

která vytíná stejné úseky na všech souřadnicových osách.

(6) Najděte parciální derivace následujících složených funkcí. $\frac{dw}{dt}$ kde $w = \frac{x}{y} + \frac{y}{z}$, $x = \sqrt{t}$, $y = \cos(2t)$, $z = e^{-3t}$
$\frac{\partial z}{\partial s}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$, kde $z = xe^y + ye^{-x}$, $x = s^2 t$, $y = st^2$
$\frac{\partial u}{\partial s}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$ pro $s = 0, t = 1$, kde $u = xy + yz + zx$, $x = st$, $y = e^{st}$, $z = t^2$.

(7) Najděte gradient f v bodě P a najděte rychlost rrustu f v P ve směru vektoru $\mathbf{u}$. $f(x,y) = e^x \sin y, \quad P(1, \frac{\pi}{4}), \quad \mathbf{u} = (-1,2)$ $f(x,y,z) = xy + yz^2 + xz^3, \quad P(2,0,3), \quad \mathbf{u} = (-2,-1,2).$

(8) Najděte jednotkový směr největšího rrustu dané funkce v bodě P.
$f(x,y) = x^2 y + e^{xy} \sin y, \quad P(1,0)$
$f(x,y,z) = xe^y + z^2, \quad P(1, \ln 2, \frac{1}{2}).$
xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx
Pripomente si kvadratické povrchy (kvadriky). Nacrtnete je pro $a = b = c = 1$:
(a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ elipsoid
(b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ jednodílný hyperboloid
(c) $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ dvoudílný hyperboloid
(d) $\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ kužel
(e) $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ eliptický paraboloid
(f) $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ hyperbolický paraboloid
(g) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ eliptický válec
(h) $y = ax^2$ parabolický válec.

37. CVIČENÍ 7-8, PARCIÁLNÍ DERIVACE A EXTRÉMY

(1) Najděte derivace následujících složených funkci. $w = x^2 + y^2 + z^2$, $x = st$, $y = s\cos(t)$, $z = s\sin t$,
$u = xy + yz + zx$, $x = st$, $y = e^{st}$, $z = t^2$.
$z = y^2 \tan x$, $x = t^2uv, y = u + tv^2$.

(2) Najděte kritické body následujících funkcí:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + 4x - 6y$$

$$f(x,y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$$

$$f(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4$$

(3) Najděte lokální extrémy následujících funkcí:
$f(x,y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2 - 5x + 2y$, $f(x,y) = x^3 - y^3 - 2xy + 6$

(4) Najděte absolutní extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ na trojúhelníku ohraničeném přímkami $x = 0$, $y = 0$, $y + 2x = 2$.

(5) Najděte absolutní extrémy funkce $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ na množině $|x| + |y| \leq 1$.

(6) Najděte absolutní extrémy funkce $f(x,y,z) = x+y+z$ na množině $x^2+y^2 \leq z \leq 1$.

(7) Nechť $f(x,y) = e^{xy^2}$. Najděte f_x, $f_y(1,1)$. Ověřte že platí $f_{xy} = f_{yx}$. Najděte f_{xxy}. Nechť $f(x,y,z) = x^5 + yz^2 + \sin(xy) + \cos(zx)$. Najděte f_x, f_{yx}, f_{zz}.

(8) Dokažte že následující matice jsou invertibilní. Najděte inverzní matici použitím metody elementárních sloupcových operací, a metodou determinantu.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(9) Najděte ortogonální matici, která redukuje následující matici na diagonální tvar. Použijte přitom fakt, známý jako věta o hlavních osách, který říká že symetrickou matici lze převést na diagonální matici pomocí orthogonální transformace souřadnic.

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 \end{pmatrix}.$$

(10) Převedte ortogonální transformaci na diagonální tvar následující kvadratické polynomy (použitím maticové reprezentace kvadratických polynomr**u**, jakožto bilineárních forem):

$$5x^2 - 6xy + 5y^2, \;\; 2x^2 + 4\sqrt{3}xy - 2y^2.$$

(11) Najděte Taylorr**u**v polynom druhého stupně pro funkci v okolí bodu

$$f(x,y) = x^2y^3 - 2x^4 + y^2, \;\; (x,y) = (0,0)$$

$$f(x,y,z) = xy^2z^3, \;\; (x,y,z) = (1,2,1)$$

$$f(x,y,z) = xe^y \cos z, \;\; (x,y,z) = (0,0,0)$$

(12) Kruhový talíř s rovnicí $x^2 + y^2 \leq 1$ je zahřátý na teplotu $T(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$. Najděte nejteplejší a nejstudenější bod na talíři.

(13) Použitím Lagrangeových multiplikátorr**u** najděte rozměry obdélníku s maximálnim obsahem, který lze vepsat do elipsy
$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, a jehož strany jsou rovnoběžné s osami souřadnic.

(14) Najděte bod v rovině dané rovnicí $2x - y + z = 1$, který je nejblíže bodu $(-4,1,3)$

(15) Najděte bod na ploše zadané rovnicí $z^2 = xy + 1$, který je nejblíže počátku souřadnic.

(16) Najděte tři pozitivní čísla jejichž součin je maximální, a jejichž součet je roven 100.

(17) Najděte extrémy funkce s vazebnou podmínkou:

$$f(x,y) = x^2 - y^2, \;\; x^2 + y^2 = 1$$
$$f(x,y,z) = x - y + 3z, \; x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$$
$$f(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4, \; x^2 + y^2 + z^2 = 1$$
$$f(x,y) = x^2 + y^2, \; x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0.$$

(18) Najděte úhel sevřený dvěma plochami v bodě

$$x^2 + y^2 + z^2 = 8, (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 6, \;\; (2,0,2)$$

(19) Ověřte předpoklady věty o implicitní funkci pro rovnici $xe^y + \sin(x,y) + y - \ln 2 = 0$, kde y je diferencovatelná funkce proměnné x kolem $(0, \ln 2)$. Spočítejte $\frac{dy}{dx}$ v tomto bodě.

38. Cvičení 9-Dvojný integrál

(1) Integrujte $f(x,y) = y\cos(xy)$ přes obdélník $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le 1$.
(2) Integrujte $f(x,y) = xe^{xy}$ přes obdélník $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.
(3) Integrujte $f(x,y) = \frac{1}{x+y}$ přes obdélník $1 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1$.
(4) Změňte pořadí integrace následujících integrálru

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} f\, dx\, dy$$

$$\int_0^\pi \int_0^{\sin x} f\, dy\, dx$$

$$\int_0^1 \int_0^x f\, dy\, dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} f\, dy\, dx$$

$$\int_0^{2a} \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f\, dy\, dx$$

(5) Nakreslete oblast integrace a spočítejte integrál $\int_0^1 \int_0^{y^2} 3y^3 e^{xy}\, dx\, dy$.
(6) Nakreslete oblast integrace, určete vhodné pořadí integrace a spočítejte integrál
$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y}\, dy\, dx$ $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dy\, dx}{y^4+1}$
(7) Vypočítejte integrál použitím polárních souřadnic $\int\int_D \sqrt{x^2+y^2}\, dS$ kde D je ohraničeno křivkou $r = 1 + \cos\theta$.
(8) Vypočítejte plochu květu D, kde D je ohraničeno křivkou $r = |\cos 6\theta|$.
(9) Vypočítejte integrál přechodem do polárních souřadnic

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2+y^2)\, dx\, dy$$

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{-(x^2+y^2)}\, dy\, dx$$

(10) Použijte substituci $u = x + 2y$, $v = x - y$ pro výpočet integrálu

$$\int_0^{2/3} \int_y^{2-2y} (x+2y)e^{(y-x)}\, dx\, dy$$

(11) Najděte hmotnost a polohu težiště trojúhelníka s vrcholy $(0,0), (1,1), (4,0)$, hustota je rovna $\rho(x,y) = x$.
(12) Najděte hmotnost a polohu težiště části roviny ohraničené parabolou $y = 9 - x^2$ a osou x, hustota je rovna $\rho(x,y) = y$.
(13) Najděte objem rotačního tělesa ohraničeného paraboloidem $z = x^2 + y^2$ nad kruhem $x^2 + y^2 \le 9$.
(14) Najděte objem rotačního tělesa ohraničeného paraboloidy $z = 3x^2 + 2 + 3y^2$ a $z = 4 - x^2 - y^2$.

39. Cvičení 10-Trojný integrál

(1) Načrtněte oblast integrace

$$\int_0^1 \int_0^z \int_0^y f dx dy dz$$

$$\int_0^1 \int_x^{2x} \int_0^{x+y} f dz dy dx$$

$$\int_0^\pi \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-z^2}} f dx dz dy$$

$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^x f dy dz dx$$

(2) Vypočtěte

$$\int\int\int_E e^x dV$$

kde $E = \{(x, y, z),\ 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y, 0 \leq z \leq x + y\}$.

$$\int\int\int_E y dV$$

kde E je ohraničeno shora rovinou $z = x + 2y$, a leží nad oblastí v rovině xy, ohraničené křivkami $y = x^2, y = 0, x = 1$.

$$\int\int\int_E xy dV$$

kde E je čtyřstěn s vrcholy $(0, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 1)$.

$$\int\int\int_E x dV$$

kde E je ohraničeno paraboloidem $x = 4y^2 + 4z^2$ a rovinou $x = 4$.

(3)

$$\int_0^1 \int_0^{3-3x} \int_0^{3-3x-y} dz\, dy\, dx$$

$$\int_0^\pi \int_0^{\ln(\sin y)} \int_{-\infty}^z e^x\, dx\, dz\, dy.$$

(4) Najděte objem tělesa ohraničeného eliptickým válcem $4x^2 + z^2 = 4$ a rovinami $y = 0$, $y = z + 2$.

(5) Sestavte všechna pořadí integrace pro integrál

$$\int\int\int_E f dV$$

kde E je ohraničeno plochami:
$x^2+z^2 = 4, y = 0, y = 6$, (resp. $z = 0, z = y, x^2 = 1-y$ $9x^2+4y^2+z^2 = 1$)

40. Cvičení 11-Substituce v trojném integrálu

(1) Načrtněte oblast integrace a spočtěte

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{4-r^2} r\,dz\,dr\,d\vartheta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{1} \rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\vartheta\,d\phi$$

(2) Vypočtěte

$$\int\int\int_E x^2+y^2\,dV$$

kde $E=\{(x,y,z),\ x^2+y^2\le 4, -1\le z\le 2\}$.

$$\int\int\int_E x^2\,dV$$

kde E je vnitřek válce $x^2+y^2=1$, ohraničený shora kuželem $z^2=4x^2+4y^2$ a $z\ge 0$.

$$\int\int\int_E xe^{(x^2+y^2+z^2)^2}\,dV$$

kde E je mezikoulí o vnitřním poloměru 1 a vnějším poloměru 2.

(3) Převedte do cylindrických souřadnic a spočtěte

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\,dz\,dy\,dz$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}}\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} xyz\,dz\,dx\,dy$$

(4) Převedte do sférických souřadnic a spočtěte

$$\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz\,dy\,dz$$

$$\int_{0}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-y^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}}(x^2+y^2+z^2)\,dz\,dx\,dy$$

41. Cvičení 12-Křivkový integrál

(1) Integrujte f podél křivky.
$f(x,y) = \frac{x+y^2}{\sqrt{1+x^2}}$, C: $y = \frac{x^2}{2}$ od $(1,1/2)$ do $(0,0)$.
$f(x,y) = x+y$, C: $x^2+y^2=4$ v prvním kvadrantu od $(2,0)$ do $(0,2)$.
$f(x,y,z) = x\sqrt{y} - 3z^2$, $\mathbf{r}(t) = (\cos(2t), \sin(2t), 5t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

(2) Najděte práci síly $\overrightarrow{F}$ vykonanou na částici
$\overrightarrow{F} = (3x^2 - 3x, 3z, 1)$, podél přímky $r(t) = (t,t,t)$, $0 \le t \le 1$.
$\overrightarrow{F} = (y+z, z+x, x+y)$, podél křivky $r(t) = (t, t^2, t^4)$, $0 \le t \le 1$.
Spočítejte $\int_{(C)} \overrightarrow{F} \cdot dr$ kde $\overrightarrow{F} = (y, -x)$, podél křivky $x^2+y^2 = 1$ od $(1,0)$ do $(0,1)$.

(3) Použijte Greenovu větu k výpočtu integrálu $\int_{(C)}(3y, 2x)ds$, kde C je hranicí oblasti $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \sin x$, pozitivně orientované.

(4) Použijte Greenovu větu k nalezení práce síly $\overrightarrow{F} = (2xy^3, 4x^2y^2)$ podél hranice při pohybu proti hodinovým ručičkám, oblasti v prvním kvadrantu ohraničeném osou x, přímkou $x=1$, a křivkou $y = x^3$.

(5) Zjistěte zda vektorová pole jsou konzervativní, a najděte jejich potenciální funkci.

$$\overrightarrow{F}_1 = (y\sin z, x\sin z, xy\cos z)$$
$$\overrightarrow{F}_2 = (-y^2 - 2xz, 2yz - 2xy, y^2 - x^2)$$
$$\overrightarrow{F}_3 = (y, x+z, -y)$$

(6) Dokažte ze práce síly $\overrightarrow{F} = (x^2+y, y^2+x, ze^z)$ podél křivky z $(1,0,0)$ do $(1,0,1)$ nezávisí na dráze.

42. Cvičení 13-Plošný integrál

(1) Najděte plochu části roviny $x+2y+z=4$, která leží uvnitř válce $x^2+y^2=4$.
(2) Najděte plochu části roviny $2x+3y-z=1$, která leží nad obdélníkem $[1,4]\times[2,4]$.
(3) Najděte plochu paraboloidu $z=x^2+y^2$, která leží pod rovinou $z=9$.
(4) Spočítejte $\int\int_S z\, dS$, kde S je částí válce $x^2+y^2=1$ mezi rovinami $z=0$ a $z=x+1$.
(5) Spočítejte $\int\int_S yz\, dS$, kde S je povrch zadaný parametricky rovnicemi $x=uv$, $y=u+v$, $z=u-v$, $u^2+v^2\leq 1$.
(6) Spočítejte $\int\int_S (x^2z+y^2z)\, dS$, kde S je povrch polokoule $x^2+y^2+z^2=4$, $z\geq 0$.

Spočítejte $\int\int_{(S)} \overrightarrow{F}\cdot dS$ kde:

(7) $\overrightarrow{F}=(e^y, ye^x, x^2y)$, a S je částí paraboloidu $z=x^2+y^2$, nacházející se nad čtvercem $0\leq x\leq 1$, $0\leq y\leq 1$ s horní orientací.
(8) $\overrightarrow{F}=(x, xy, xz)$, a S je částí roviny $3x+2y+z=6$, která leží nad prvním oktantem s orientací nahoru.

43. Cvičení 14-Integrální věty

(1) Pomocí Stokesovy věty spočítejte $\int\int_{(S)} \operatorname{rot} \overrightarrow{F} \cdot dS$, kde $\overrightarrow{F} =< xyz, x, e^{xy}\cos z >$, S je částí sféry $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, orientované nahoru.
(2) Pomocí Stokesovy věty spočítejte $\int_{(C)} \overrightarrow{F} \cdot d\mathbf{r}$, kde $\overrightarrow{F} = (xz, 2xy, 3xy)$, C je hranice části roviny $3x + y + z = 3$, v prvním oktantu při pohledu shora.
(3) Použitím Gaussovy věty spočítejte tok pole $\overrightarrow{F}$ přes S, kde
(4) $\overrightarrow{F} = (3y^2z^3, 9x^2yz^2, -4xy^2)$, a S je povrch krychle $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$;
(5) $\overrightarrow{F} = (x^3, y^3, z^3)$, a S je sféra $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
(6) Ověřte Gaussovu větu pro pole $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (3x, xy, 2xz)$, kde E je krychle ohraničená rovinami $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, a $z = 1$.

Mathematical Institute, Czech Academy of Science, Žitná 25, 115 67 Praha 1, Czech Republic, and Department of Mathematics, Faculty of Electrical Engineering, Czech Technical University in Prague, Zikova 4, 160 00, Prague
E-mail address: hajek@math.cas.cz