Matematika pro ekonomii - zkouškový test

Úloha 1. (celkem 30 bodů)

Zvolte správné odpovědi na otázky níže:

$1(a)$	$1(b)$	$1(c)$	$2(a)$	$2(b)$	$3(a)$	$3(b)$	$4(a)$	$4(b)$	$4(c)$
C	B	C	B	A	B	C	B	A	B

1. Pro náhodné jevy A a B platí $P(B) = \frac{2}{3}$, $P(A|B) = 0.3$ a $P(A^c|B^c) = 0.4$. Pak

   (a) $P(A|B^c)$ je rovno — A) 0.2 B) 0.4 C) 0.6

   (b) $P(A)$ je rovno — A) 0.2 B) 0.4 C) 0.6

   (c) $P(B|A)$ je rovno — A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$

2. Vyberte <u>nepravdivé</u> tvrzení:

   (a) Pro náhodné veličiny X a Y vždy platí
   A) $X = 2Y + 1 \Rightarrow corr(X, Y) = 1$
   B) $corr(X, Y) = 0 \Rightarrow X$ a Y jsou nezávislé
   C) $corr(X, Y) \neq 0 \Rightarrow X$ a Y nejsou nezávislé

   (b) Jsou-li navíc X a Y nezávislé, stejně rozdělené, pak vždy platí
   A) $X \sim Pois(2) \Rightarrow Y \sim Exp(1/2)$
   B) $X \sim Pois(2) \Rightarrow Y \sim Pois(2)$
   C) $X \sim Pois(2) \Rightarrow X + Y \sim Pois(4)$

3. Při statistickém testování jsme na hladině α=10% nulovou hypotézu zamítli, ale na hladině α=5% jsme ji nezamítli. Tutéž nulovou hypotézu pak při stejné alternativě na hladině

   (a) α=1% — A) zamítáme B) nezamítáme C) z uvedeného nelze o (ne)zamítnutí rozhodnout

   (b) α=7% — A) zamítáme B) nezamítáme C) z uvedeného nelze o (ne)zamítnutí rozhodnout

4. V markovském řetězci $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ mohou X_n nabývat hodnot 1, 2 nebo 3, přičemž stav 3 je absorpční.

   (a) Stacionární rozdělení pak <u>nemůže</u> být — A) $(0, 0, 1)$ B) $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ C) $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$

   (b) Je-li stacionární rozdělení $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, pak $P(X_\infty \in \{1, 2\})$ je — A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) 0

   (c) Jsou-li stavy 1 a 2 přechodné, pak stacionární rozdělení
   A) je $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$
   B) je $(0, 0, 1)$
   C) neexistuje

Správná odpověď = +3 body, chybná odpověď = -3 body, takže raději netipujte!
Řešení úlohy 1 piště sem do zadání (do tabulky nahoře), jinak nebude akceptováno!

Úloha 2. (celkem 36 bodů)

K pokladnám v obchodním centru přicházejí průměrně 3 zákazníci za minutu (vzájemně nezávisle na sobě). Dvě třetiny zákazníků platí kartou, ostatní hotově. Spočtěte pravděpodobnost, že

a) na příštího zákazníka budeme čekat alespoň půl minuty, (7 bodů)

<u>Řešení</u>: Buď X... doba [min] čekání na příštího zákazníka $\Rightarrow X \sim Exp(3)$, tj. pro $x > 0$ je hustota $f(x) = 3e^{-3x}$ a distribuční funkce $F(x) = 1 - e^{-3x} \Rightarrow$

$$P(X \geq 0.5) = \int_{0.5}^{\infty} 3e^{-3x} dx = e^{-1.5} \quad \textit{nebo} \quad P(X \geq 0.5) = 1 - P(X < 0.5) = 1 - F(0.5) = e^{-1.5}.$$

Nebo Y... počet zákazníků za půl minuty $\Rightarrow Y \sim Po(1.5)$, tj. pro $k = 0, 1, 2, \ldots$ je $P(Y = k) = \frac{1.5^k}{k!} e^{-1.5} \Rightarrow$

$$P(Y = 0) = \frac{1.5^0}{0!} e^{-1.5} = e^{-1.5}.$$

b) během dvou minut přijdou nejvýše 3 zákazníci, (7 bodů)

<u>*Řešení:*</u> *X... počet zákazníků za dvě minuty $\Rightarrow X \sim Po(6)$, tj. pro $k = 0, 1, 2, \ldots$ je $P(X = k) = \frac{6^k}{k!} e^{-6} \Rightarrow$*

$$P(X \leq 3) = \frac{6^0}{0!} e^{-6} + \frac{6^1}{1!} e^{-6} + \frac{6^2}{2!} e^{-6} + \frac{6^3}{3!} e^{-6}.$$

c) před prvním zákazníkem platícím hotově budou nejméně 4 zákazníci platící kartou, (7 bodů)

<u>*Řešení:*</u> *Buď X... počet zákazníků platících kartou před prvním zákazníkem platícím hotově $\Rightarrow X \sim Ge\left(\frac{1}{3}\right)$, tj. pro $k = 0, 1, 2, \ldots$ je $P(X = k) = \left(\frac{2}{3}\right)^k \frac{1}{3} \Rightarrow$*

$$P(X \geq 4) = \sum_{k=4}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k \frac{1}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^4.$$

Nebo Y... počet zákazníků platících hotově mezi prvními čtyřmi zákazníky $\Rightarrow Y \sim Binom\left(4, \frac{1}{3}\right)$, tj. pro $k = 0, 1, 2, \ldots$ je $P(Y = k) = \binom{4}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{4-k} \Rightarrow$

$$P(Y = 0) = \binom{4}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^4.$$

d) mezi 5 zákazníky budou alespoň 2 zákazníci, kteří platí hotově, (7 bodů)

<u>*Řešení:*</u> *X... počet zákazníků platících hotově mezi prvními pěti zákazníky $\Rightarrow Y \sim Binom\left(5, \frac{1}{3}\right)$, tj. pro $k = 0, 1, 2, \ldots$ je $P(X = k) = \binom{5}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{5-k} \Rightarrow$*

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - \binom{5}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^5 - \binom{5}{1} \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^4.$$

e) mezi 50 zákazníky bude alespoň 20 zákazníků, kteří platí hotově; řešte použitím CLV. (8 bodů)

<u>*Řešení:*</u> *$X_i = 1$, pokud i-tý zákazník platí hotově, a $X_i = 0$, pokud i-tý zákazník platí kartou $\Rightarrow$ $X_i \sim Alt\left(\frac{1}{3}\right)$, $\Rightarrow \mathrm{E}X_i = \frac{1}{3}$ a var $X_i = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$. Pak*

$$P(\sum_{k=1}^{50} X_i \geq 20) = P\left(\frac{\sum_{k=1}^{50} X_i - 50 \cdot \frac{1}{3}}{\sqrt{50 \cdot \frac{2}{9}}} \geq \frac{20 - 50 \cdot \frac{1}{3}}{\sqrt{50 \cdot \frac{2}{9}}}\right) = P(Z \geq 1) \doteq 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587.$$

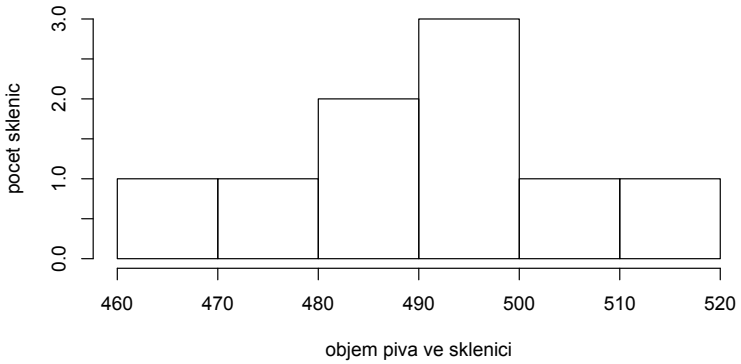
Úloha 3. (celkem 26 bodů)

Na festivalu je v nabídce mj. 0,5 litru piva. Na vzorku 9 návštěvníků jsme pozorovali, že objem piva v jejich právě natočené sklenici je (v ml):

496	506	481	515	491	485	493	465	478

a) Nakreslete histogram a odhadněte z něj a/nebo z povahy dat, jaké rozdělení má náhodná veličina X popisující objem natočeného piva (v ml). (4 body)

Řešení: Jedná se o odchylky, jejichž hodnoty se častěji pohybují kolem aritmetického průměru než dále od něj, přičemž horní hranice histogramu níže připomínají Gaussovu křivku $\Rightarrow X \sim N(\mu, \sigma^2)$.



b) Metodou momentů odhadněte parametry rozdělení z otázky a). (4 body)
(Hint: $\sum x_i = 4410$, $\sum (x_i - \bar{x})^2 \doteq 1800$)

Řešení: $\hat{\mu} = \hat{\mathrm{E}X} = \bar{x} = \frac{4410}{9} = 490$ *a* $\hat{\sigma^2} = \hat{var}X = s^2 = \frac{1800}{8} = 225$.

c) Statisticky otestujte na hladině 5%, zda je střední objem náhodně vybraného natočeného piva 500 ml, vůči

(i) oboustranné alternativě,
Řešení:
$H_0 : \mathrm{E}X = 500$
$H_A : \mathrm{E}X \neq 500$

$$T = \frac{490 - 500}{\sqrt{225}}\sqrt{9} = -2$$

$$|T| = 2 < 2.31 = t_{8;0.975} \Rightarrow H_0 \textit{ nezamítáme ve prospěch } H_A \textit{ na hladině } \alpha = 5\%.$$

(ii) jednostranné alternativě, která přirozeně vyplývá z kontextu.
Řešení:
$H_0 : \mathrm{E}X = 500$
$H_A : \mathrm{E}X < 500$

$$T = \frac{490 - 500}{\sqrt{225}}\sqrt{9} = -2 < -1.86 = t_{8;0.05} \Rightarrow H_0 \textit{ zamítáme ve prospěch } H_A \textit{ na hladině } \alpha = 5\%.$$

(12 bodů)

d) Uvažujte náhodnou veličinu Y takovou, že $Y = 1$, pokud má náhodně vybrané natočené pivo alespoň 500 ml, a $Y = 0$, pokud má méně než 500 ml. Určete rozdělení Y a metodou maximální věrohodnosti odhadněte z dat parametr tohoto rozdělení. (6 bodů)

Řešení:
$Y \sim Alt(p)$, *tj.* $P(Y = 1) = p$ *a* $P(Y = 0) = 1 - p$, *přičemž data máme: 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0.*

$$\begin{aligned} L(p) =& (1-p)\cdot p \cdot (1-p)\cdot p \cdot (1-p)\cdot(1-p)\cdot(1-p)\cdot(1-p)\cdot(1-p) = p^2(1-p)^7 \\ l(p) =& \ln L(p) = 2\ln p + 7\ln(1-p) \\ l'(p) =& \frac{2}{p} - \frac{7}{1-p}, \quad \textit{a tedy} \quad \frac{2}{\hat{p}} - \frac{7}{1-\hat{p}} = 0 \Rightarrow \hat{p} = \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

Úloha 4. (celkem 8 bodů)
Metodou chain ladder určete rezervu, máme-li následující pozorování o datu vzniku povinností plateb a o již uhrazených platbách (údaje jsou v tisících EUR, uvedeno v kumulativním trojúhelníku, maximální možné zpoždění platby je 2 měsíce):

měsíc výskytu \ zpoždění úhrady nejvýše	0 měs.	1 měs.	2 měs.
únor	10	16	20
březen	14	20	
duben	8		

Řešení:
Odhady konstant úměrnosti sloupců jsou

$$\hat{c}_0 = \frac{16+20}{10+14} = 1.5 \qquad a \qquad \hat{c}_1 = \frac{20}{16} = 1.25.$$

Trojúhelník doplníme na čtverec:

měsíc výskytu \ zpoždění úhrady nejvýše	0 měs.	1 měs.	2 měs.
únor	10	16	20
březen	14	20	$20 \cdot 1.25 = 25$
duben	8	$8 \cdot 1.5 = 12$	$12 \cdot 1.25 = 15$

Rezerva tedy je:

$$R = (20-20) + (25-20) + (15-8) = 12 \text{ (tis. EUR)}.$$