Příklad 1: *V urně jsou kuličky tří barev. Nechť jevy A, B a C postupně znamenají, že náhodně vybraná kulička je černá, červená, resp. bílá. Určete význam následujících jevů:*

1. $A^c \cap B^c$,

2. $(A \cup C) \cap B$,

3. $A \cup B \cup C$.

Řešení:

1. Nebyla tažena ani černá ani červená kulička, tj. byla tažena bílá kulička, tj. nastal jev C.
2. Byla tažena buďto černá nebo bílá kulička a zároveň byla tažena červená kulička - jev nemožný.
3. Byla tažena buď černá nebo červená nebo bílá kulička, tj. nastal jev jistý.

Příklad 2: *Při zkoušce dostane student tři otázky. Nechť jev A znamená, že náhodně vybraný student zodpoví správně první otázku, jev B, že zodpoví správně druhou otázku a jev C, že zodpoví správně třetí otázku. Vyjádřete pomocí jevů A, B, C, A^c, B^c, C^c, že náhodně vybraný student:*

1. zodpoví správně jen první otázku,

2. zodpoví správně právě jednu otázku,

3. zodpoví správně alespoň dvě otázky.

Řešení:

1. $A \cap B^c \cap C^c$,
2. $(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$,
3. $(A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)$.

Příklad 3: *Házíme třemi kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že součet bude roven 5?*

Řešení:
Jev A značí příznivé možnosti: $\{1,1,3\}; \{1,2,2\}; \{1,3,1\}; \{2,1,2\}; \{2,2,1\}; \{3,1,1\};$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{36} = 0.0277,$$

kde $|.|$ značí počet prvků a Ω je množina všech jevů.

Příklad 4: *Na party se sešlo 14 studentů, z toho 8 vysokoškoláků a 6 středoškoláků. Jaká je pravděpodobnost, že v náhodně vybrané čtveřici budou*

1. všichni čtyři vysokoškoláci,

2. právě jeden vysokoškolák?

Řešení:
Počet všech možných čtveřic utvořených ze 14 studentů je $\binom{14}{4}$.

1. Počet všech čtveřic vytvořených z vysokoškoláků je $\binom{8}{4}$, tudíž hledaná pravděpodobnost je
$$P = \frac{\binom{8}{4}}{\binom{14}{4}}.$$

2. Počet všech trojic vytvořených ze středoškoláků je $\binom{6}{3}$, počet všech "jednic"vytvořených z vysokoškoláků je $\binom{8}{1} = 8$. K vytvoření příznivých čtveřic je třeba všechny trojice zkombinovat se všemi "jednicemi", tudíž hledaná pravděpodobnost je
$$P = \frac{8 \cdot \binom{6}{3}}{\binom{14}{4}}.$$

Příklad 5: *Během dne se v porodnici narodilo 10 dětí. Pravděpodobnost narození chlapce je $p = 0.514$. Jaká je pravděpodobnost, že se během tohoto dne narodil v porodnici:*

1. *alespoň jeden chlapec,*

2. *maximálně dva chlapci?*

Řešení:
Nechť $A_i, i = 1, \dots, 10$, značí jev "i-té narozené dítě je chlapec". Jev A pak znamená "alespoň jedno narozené dítě je chlapec"a jev A^c "žádné narozené dítě není chlapec". Jelikož $A_1, \dots, A_{10}$ jsou nezávislé, pak

$$P(A) = P(\cup_{i=1}^{10} A_i) = 1 - P(A^c) = 1 - \prod_{i=1}^{10}(1 - P(A_i)) = 1 - (0.486)^{10}.$$

Jev $P(B)$ pak znamená, že se v ten den narodily buď samé holčičky nebo že jedno narozené dítě byl chlapec a zbytek holčičky (na pořadí nezáleží) nebo že dvě z narozených děti byli chlapci a zbytek holčičky (na pořadí rovněž nezáleží). Pak

$$P(B) = (0.486)^{10} + \binom{10}{1} 0.514 \cdot (0.486)^9 + \binom{10}{2} (0.514)^2 \cdot (0.486)^8.$$

Příklad 6: *Autobusy přijíždějí na zastávku v desetiminutových intervalech. Pokud přijdu na zastávku úplně náhodně, jaká je pravděpodobnost, že budu čekat déle než 7 minut a 24 sekund?*

Řešení:
Nakreslíme-li si úsečku o délce 10 značící časovou osu, kde počáteční a koncový bod budou odpovídat příjezdům dvou autobusů, pak část této úsečky odpovídající době, kdy přijdu a budu čekat aspoň 7 minut a 24 sekund, bude interval $[0, 2.6]$, tudíž odpovídající pravděpodobnost je

$$P = \frac{2.6}{10} = 0.26.$$

Příklad 7: *Mějme dvě zcela náhodná čísla x a y mezi 0 a 1. Jaká je pravděpodobnost, že jejich součet je menší než 1 a zároveň rozdíl $x - y$ větší než 0.5?*

Řešení:
Nakreslíme-li si čtverec o hraně délky 1 značící (náhodné) souřadnice x a y, pak odpovídající plocha je část čtverce ohraničená přímkami $y = -x + 1$ směrem k bodu $[0; 0]$ a $y = x - 0.5$ směrem k bodu $[1; 0]$. Její plocha je rovna $1/16$, tudíž hledaná pravděpodobnost je

$$P = \frac{\frac{1}{16}}{1} = \frac{1}{16}.$$

Příklad 8: *Dvě osoby přijdou na smluvené místo úplně náhodně nezávisle na sobě mezi 12. a 13. hodinou, počkají 20 minut a pak odejdou. Jaká je pravděpodobnost, že se potkají?*

Řešení:
Nakreslíme-li si čtverec o hraně délky 60 značící minutu po dvanácté hodině, kdy přijde první (osa x), resp. druhá (osa y) osoba, pak odpovídající plocha je část čtverce ohraničená přímkami $y = x+20$ a $y = x - 20$. Její plocha je rovna 2000, tudíž hledaná pravděpodobnost je

$$P = \frac{2000}{3600} = \frac{5}{9}.$$

Příklad 9: *Při hodu dvěma mincemi uvažujeme tyto náhodné jevy:*
A ... jev, že na 1. minci padne rub,
B ... jev, že na 2. minci padne líc,
C ... jev, že na obou mincích padne rub nebo na obou líc.
Zjistěte, zda dané jevy jsou nezávislé nebo alespoň po dvou nezávislé.

Řešení:

$$\begin{aligned}
P(A) &= \frac{1}{2}, & P(B) &= \frac{1}{2}, & P(C) &= \frac{1}{2}, \\
P(A \cap B) &= \frac{1}{4}, & P(A \cap C) &= \frac{1}{4}, & P(B \cap C) &= \frac{1}{4}, \\
P(A) \cdot P(B) &= \frac{1}{4}, & P(A) \cdot P(C) &= \frac{1}{4}, & P(B) \cdot P(C) &= \frac{1}{4},
\end{aligned}$$

$P(A \cap B \cap C) = 0$, neboť $A \cap B \cap C$ je jev nemožný. Protože $P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \neq 0$, nejsou jevy A, B, C nezávislé. Platí ale

$$\begin{aligned}
P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B), \\
P(A \cap C) &= P(A) \cdot P(C), \\
P(B \cap C) &= P(B) \cdot P(C).
\end{aligned}$$

Proto o jevech A, B, C můžeme říci, že jsou nezávislé po dvou.

Příklad 10: *Ve skupině sportovců je 20 lyžařů, 4 běžci a 6 cyklistů. Pravděpodobnost splnění normy pro lyžaře je 0.9, pro běžce 0.8 a pro cyklistu 0.75.*

1. *Určete pravděpodobnost toho, že náhodně vybraný sportovec splní normu.*

2. *Náhodně vybraný sportovec splnil normu. Jaká je pravděpodobnost, že je to cyklista?*

Řešení:
Označme si
A$_1$ náhodně vybraný sportovec je lyžař,
A$_2$ náhodně vybraný sportovec je běžec,
A$_3$ náhodně vybraný sportovec je cyklista,
B náhodně vybraný sportovec splnil normu.
Potom

1. Víme, že
$$P(A_1) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}, \quad P(A_2) = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}, \quad P(A_3) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}.$$
Dále platí, že
$$P(B|A_1) = 0.9, \quad P(B|A_2) = 0.8, \quad P(B|A_3) = 0.75.$$
Z věty o úplné pravděpodobnosti pak máme
$$P(B) = P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) + P(B|A_3) \cdot P(A_3),$$
tj. pravděpodobnost jevu B je
$$P(B) = 0.9 \cdot \frac{2}{3} + 0.8 \cdot \frac{2}{15} + 0.75 \cdot \frac{1}{5} \doteq 0.857.$$

2. Po dosazení do Bayesovy věty obdržíme
$$P(A_2|B) = \frac{P(B|A_2) \cdot P(A_2)}{\sum_{j=1}^{3} P(A_j) \cdot P(B|A_j)} = \frac{0.75 \cdot \frac{1}{5}}{0.857} \doteq 0.175.$$

Poznámka: Tyto pravděpodobnosti lze vyčíst také z tabulky, kterou si vyplníme pro libovolně velký vzorek pokusů o splnění limitu, např. 300 (tj. každý sportovec v oddíle má 10 pokusů):

	lyžař	běžec	cyklista	$\sum$
splnil	180	32	45	257
nesplnil	20	8	15	43
$\sum$	200	40	60	300

Vidíme, že pravděpodobnost, že náhodně vybraný sportovec splnil limit, je podíl splněných limitů ze všech pokusů, tj. $P(B) = 257/300 \doteq 0.857$, a pravděpodobnost, že náhodně vybraný sportovec, který splnil limit, je cyklista, je podíl cyklistů mezi všemi sportovci, kteří splnili limit, tj. $P(A_1|B) = 45/257 \doteq 0.175$.

Příklad 11: *Uvažujme hod mincí, tj.* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, *kde*
ω_1 *je jev, že padl rub, přičemž* $P(\omega_1) = 0.49$,
ω_2 *je jev, že padl líc, přičemž* $P(\omega_2) = 0.49$,
ω_3 *je jev, že nastala výjimečná situace (hrana, ukradení mince :-) apod.), přičemž* $P(\omega_3) = 0.02$*). Sestrojte dvě různé náhodné veličiny a nakreslete jejich distribuční funkce.*

Řešení:
Veličiny mohou být např.

- $X: X(\omega_1) = 1, X(\omega_2) = -1, X(\omega_3) = 0$. Distribuční funkce je pak skokovitá se skoky v bodech -1,0 a 1 o velikostech 0.49, 0.02 a 0.49, tj.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \; < -1 \\ 0.49 & \text{pro } -1 \leq x \; < 0 \\ 0.51 & \text{pro } 0 \leq x \; < 1 \\ 1 & \text{pro } x \; \geq 1 \end{cases}$$

- $Y: Y(\omega_1) = Y(\omega_2) = \pi, Y(\omega_3) = 27.4$. Distribuční funkce je pak skokovitá se skoky v bodech π a 27.4 o velikostech 0.98 a 0.02 (neboť obraz $= \pi$ mají dva elementární jevy, jejichž souhrná pravděpodobnost je $0.49 + 0.49 = 0.98$), tj.

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \; < \pi \\ 0.98 & \text{pro } \pi \leq x \; < 27.4 \\ 1 & \text{pro } x \; \geq 27.4 \end{cases}$$

Příklad 12: *Uvažujme hod kostkou, tj. množinu jevů $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_6\}$, kde ω_i značí, že padlo číslo i, a náhodnou veličinu X takovou, že*

$$X(\omega_1) = X(\omega_3) = X(\omega_4) = X(\omega_6) = -1 \quad a \quad X(\omega_2) = X(\omega_5) = 2.$$

Sestrojte distribuční funkci.

<u>Řešení:</u>
Jelikož čtyřem jevům přiřazujeme hodnotu -1 a pravděpodobnosti každého z jevů je 1/6, přičemž tyto jevy jsou disjunktní, pak pravděpodobnost, že náhodná veličina je menší nebo rovna -1 je $4 \cdot 1/6 = 2/3$. Obdobně uvažujeme i pravděpodobnost, že X nabude hodnoty 2, rovnu $2/6 = 1/3$. Distribuční funkce je pak tvaru

$$\begin{aligned} F_X(x) = & 0 & x \in (-\infty, -1) \\ & 2/3 & x \in [-1, 2) \\ & 1 & x \in [2, \infty). \end{aligned}$$

Příklad 13: *Určete konstantu c tak, aby funkce*

$$\begin{aligned} f(x) = & cx^2e^x, & x \in (0, 1), \\ & 0, & \textit{jinak}, \end{aligned}$$

byla hustota nějaké náhodné veličiny.

<u>Řešení:</u>
Pro hustotu musí platit

$$\int_{\mathbf{R}} f(x)dx = 1.$$

Dvojitým použitím integrace per partes dostaneme

$$\int_{\mathbf{R}} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} cx^2e^xdx + \int_{1}^{\infty} 0dx = \int_{0}^{1} cx^2e^xdx = c(e-2) \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{e-2}.$$

Příklad 14: *Sestrojte distribuční funkci náhodné veličiny dané hustotou z příkladu 13 a určete pravděpodobnost, že tato náhodná veličina nabývá hodnoty mezi -0,5 a 0,5.*

Řešení:
Distribuční funkce pro spojité náhodné veličiny je tvaru

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy,$$

tudíž

$$\begin{aligned} F(x) =& 0 && x \leq 0 \\ =& \int_0^x \frac{y^2 e^y}{e-2} dy = \frac{1}{e-2}[y^2 e^y - 2ye^y + 2e^y]_0^x = \frac{x^2e^x - 2xe^x + 2e^x - 2}{e-2} && x \in (0,1) \\ =& 1 && x \geq 1. \end{aligned}$$

Obecně pro spojité náhodné veličiny platí

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

tudíž

$$P(-0.5 < X < 0.5) = \int_{-0.5}^{0.5} f(x)dx = \int_0^{0.5} \frac{x^2 e^x}{e-2} dx = \frac{1.25 \cdot e^x - 2}{e-2}$$

nebo také

$$P(-0.5 < X < 0.5) = F(0.5) - F(-0.5) = \frac{0.5^2 e^{0.5} - 2 \cdot 0.5 \cdot e^{0.5} + 2e^{0.5} - 2}{e-2} - 0 = \frac{1.25 \cdot e^{0.5} - 2}{e-2}.$$

Příklad 15: *Uvažujme pravděpodobnostní prostor s množinou jevů* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, *přičemž* $P(\omega_1) = 1/2$, $P(\omega_2) = 1/3$ *a* $P(\omega_3) = 1/6$, *a náhodnou veličinu* X *definovanou jako* $X(\omega_1) = 1$, $X(\omega_2) = 3$ *a* $X(\omega_3) = 6$. *Spočtěte střední hodnotu* $\mathbb{E}X$ *a rozptyl* var X.

Řešení:

$$\mathbb{E}X = \sum_{i=1}^{3} x_i P(X = x_i) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{2},$$

$$\mathbb{E}X^2 = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 P(X = x_i) = 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 3^2 \cdot \frac{1}{3} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{19}{2},$$

$$\text{var } X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{19}{2} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}.$$

Tedy střední hodnota $\mathbb{E}X$ je $5/2$ a rozptyl var X je $13/4$.

Příklad 16: *Uvažujme náhodnou veličinu danou hustotou*

$$\begin{aligned} f(x) =& e^{-x} && x \geq 0, \\ & 0 && x < 0. \end{aligned}$$

Spočtěte $\mathbb{E}X$ *a* $\operatorname{var} X$.

Řešení:

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{0}^{\infty} x e^{-x} dx = 1,$$
$$\mathbb{E}X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_{0}^{\infty} x^2 e^{-x} dx = 2,$$
$$\operatorname{var} X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = 2 - 1^2 = 1.$$

Tedy střední hodnota $\mathbb{E}X$ je 1 a rozptyl $\operatorname{var} X$ je také 1.

Příklad 17: *V testu je 15 otázek s možnými odpověďmi a)-e), právě jedna je správná. Jaká je pravděpodobnost, že při zcela náhodném tipování trefí student správně aspoň tři otázky? Popište náhodnou veličinu popisující počet správných odpovědí.*

Řešení:
Označme X náhodnou veličinu popisující počet správných odpovědí. Ta má binomické rozdělení Bi(15; 0.2), tj.

$$P(X = k) = \binom{15}{k} 0.2^k (0.8)^{15-k}, \text{ pro } k = 0, 1, \ldots, 15.$$
$$\mathbb{E}X = 15 \cdot 0.2 = 3 \quad \text{a} \quad \operatorname{var} X = 15 \cdot 0.2 \cdot 0.8 = 2.4.$$

Pravděpodobnost, že při zcela náhodném tipování trefí student správně aspoň tři otázky, je tedy

$$P(X \geq 3) = \sum_{k=3}^{15} \binom{15}{k} 0.2^k (0.8)^{15-k}.$$

Příklad 18: *Telefonní ústředna zapojí během hodiny průměrně 15 hovorů. Jaká je pravděpodobnost, že během 4 minut zapojí ústředna*

1. *právě jeden hovor,*
2. *alespoň dva hovory a nejvýše pět hovorů?*

A jaká je pravděpodobnost, že

3. *mezi 10:00 a 10:10 spojí alespoň dva hovory, přičemž mezi 10:00 a 10:02 nespojí ani jeden.*

Řešení:

1. Označme X náhodnou veličinu popisující počet příchozích hovorů během 4 minut. Ta má Poissonovo rozdělení $Po(1)$, neboť střední hodnota počtu příchozích hovorů během 4 minut odpovídající parametru λ je 1, tj.

$$P(X = k) = \frac{1^k}{k!} e^{-1}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

tudíž

$$P(X = 1) = \frac{1^1}{1} e^{-1} = e^{-1} = 0,3678.$$

2. Uvažujme X z bodu 1., pak
$$P(2 \leq X \leq 5) = \frac{1^2}{2!}e^{-1} + \frac{1^3}{3!}e^{-1} + \frac{1^4}{4!}e^{-1} + \frac{1^5}{5!}e^{-1} = 0,2636.$$

3. Označme X_1 náhodnou veličinu popisující počet hovorů mezi 10:00 a 10:02 a X_2 náhodnou veličinu popisující počet hovorů mezi 10:02 a 10:10. Analogicky k předešlému
$$P(X_1 = k) = \frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1} \quad \text{a} \quad P(X_2 = k) = \frac{\lambda_2^k}{k!}e^{-\lambda_2},$$
kde $\lambda_1 = 0,5$ a $\lambda_2 = 2$. Hledaná pravděpodobnost je tedy
$$P(X_1 = 0, X_2 \geq 2) = P(X_1 = 0)P(X_2 \geq 2) = \frac{0,5^0}{0!}e^{-0,5}(1 - \frac{2^0}{0!}e^{-2} - \frac{2^1}{1!}e^{-2}).$$
Pozn.: Náhodné veličiny X_1 a X_2 jsme zvolili tak, aby se jednalo o počty hovorů na disjunktních intervalech, a tudíž aby tyto počty byly nezávislé, jinak bychom nemohli použít vztah $P(X_1 = 0, X_2 \geq 2) = P(X_1 = 0)P(X_2 \geq 2)$.

Příklad 19: *Pan Novák má svazek pěti klíčů, z nichž právě jeden je od jeho bytu. Po příchodu z hospody ke dveřím bytu je ve stavu, že správný klíč nehledá, ale zkouší strčit do zámku klíč náhodně vybraný, přičemž vždy, když netrefí ten pravý, mu svazek klíčů spadne na zem. Po desátém neúspěšném pokusu se pak vzbudí jeho manželka a...(důsledky raději nedomýšlet ;-)). Jaká je pravděpodobnost, že se manželka pana Nováka nevzbudí?*

Řešení:
Označme X náhodnou veličinu popisující počet neúspěšných pokusů před prvním úspěšným pokusem. Pak $X \sim Geom(0.2)$, tj. $P(X = k) = 0.8^k \cdot 0.2$ pro $k = 0, 1, \ldots$ Tudíž
$$P(\text{spící manželka}) = P(X \leq 9) = \sum_{k=0}^{9} 0.8^k \cdot 0.2 = 0.2\frac{1 - 0.8^{10}}{1 - 0.8} = 1 - 0.8^{10} = 0.893.$$
Nebo jinak:
Označme Y náhodnou veličinu popisující počet úspěšných pokusů v prvních 10 pokusech. Pak $Y \sim Binom(10, 0.2)$, tj. $P(X = k) = \binom{10}{k}0.2^k \cdot 0.8^{10-k}$ pro $k = 0, 1, \ldots, 10$. Tudíž
$$P(\text{spící manželka}) = P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{10}{0}0.2^0 0.8^{10} = 1 - 0.8^{10} = 0.893.$$

Příklad 20: *Pošta chodí pravidelně mezi 10:00 až 12:00 rovnoměrně. Jaká je pravděpodobnost, že obdržíme poštu mezi 11:30 až 12:30?*

Řešení:
Označme X náhodnou veličinu popisující čas příchodu pošty. Ta má rovnoměrné rozdělení $Ro(10, 12)$. Hustota je tedy
$$\begin{aligned} f(x) = &\frac{1}{2} & x \in (10, 12), \\ &0 & \textit{jinak}. \end{aligned}$$

a hledaná pravděpodobnost je

$$\int_{11,5}^{12,5} f(x)dx = \int_{11,5}^{12} \frac{1}{2}dx = \frac{1}{4}.$$

Příklad 21: *Do pojišťovny přijdou průměrně 2 hlášení škody denně. Jaká je pravděpodobnost, že do pojišťovny přijde nejbližší hlášení škody nejdříve třetí den?*

Řešení:
Tuto úlohu můžeme řešit jak s využitím Poissonova rozdělení, tak exponenciálního rozdělení.

a) Náhodná veličina X "doba čekání na příchod dalšího hlášení"má exponenciální rozdělení. Parametr $\lambda = 2$, protože $\mathbb{E}X = 1/\lambda = 1/2$ (ze zadání víme, že v průměru přijdou 2 hlášení škody denně, tj. střední doba čekání je půl dne). Hledaná pravděpodobnost je pak

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F(2) = 1 - (1 - e^{-2\cdot 2}) = e^{-4}$$

nebo také počítáno jako

$$P(X > 2) = \int_2^{\infty} f(x)dx = \int_2^{\infty} 2e^{-2x}dx = e^{-4}.$$

b) Náhodná veličina Y "počet hlášení během dvou dní"má Poissonovo rozdělení. Parametr $\lambda = 4$ protože $\mathbb{E}Y = \lambda$ a ze zadání víme, že během dvou dní přijdou v průměru 4 hlášení. Hledaná pravděpodobnost je pak

$$P(Y = 0) = e^{-4} \cdot \frac{4^0}{0!} = e^{-4}.$$

Příklad 22: *Z dlouhodobých měření je známo, že přístroj má poruchu v průměru jednou za 10 000 hodin. Předpokládejme, že "doba čekání na poruchu"je náhodná veličina X s exponenciálním rozdělením. Stanovme hodnotu t tak, aby pravděpodobnost, že přístroj bude pracovat delší dobu než t, byla 0.99.*

Řešení:

$$P(X > t) = 1 - P(X \leq t) = 1 - F(t) = 0.99,$$

neboli

$$F(t) = 0.01.$$

Ze zadání je patrné, že $X \sim Exp(1/10000)$, a tedy

$$0,01 = 1 - e^{-\frac{t}{10000}}.$$

Odtud po úpravě

$$\begin{aligned} t &= -10000 \cdot \log 0,99 \\ t &\doteq 100,5. \end{aligned}$$

Příklad 23: *Víme, že populace určitého druhu stromů, dorůstá výšky X metrů, kde X má normální rozdělení $N(20, 16)$. Spočtěte pravděpodobnost, že náhodně vybraný strom má výšku (v metrech)*

a) menší než 16,

b) větší než 20,

c) v mezích od 12 do 28,

d) menší než 12 nebo větší než 28,

e) rovnu 22.

Řešení:
Provedeme transformaci veličiny X na normovanou veličinu $Z = \frac{X-20}{\sqrt{16}}$ a stejně upravíme i druhou stranu nerovnosti.

a)
$$\begin{aligned} P(X < 16) &= P(Z < \tfrac{16-20}{4}) = P(Z < -1) = \Phi(-1) = \\ &= 1 - \Phi(1) = 1 - 0,84134 = 0,15866 \end{aligned}$$

b)
$$P(X > 20) = P(Z > \frac{20-20}{4}) = P(Z > 0) = 1 - P(Z \leq 0) =$$
$$= 1 - \Phi(0) = 1 - 0,5 = 0,5$$

c)
$$\begin{aligned} P(12 \leq X \leq 28) &= P(\tfrac{12-20}{4} \leq Z \leq \tfrac{28-20}{4}) = \\ &= P(-2 \leq Z \leq 2) = \Phi(2) - \Phi(-2) = \\ &= \Phi(2) - [1 - \Phi(2)] = 2\Phi(2) - 1 = \\ &= 2 \cdot 0,97725 - 1 = 0,95450 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} P(X < 12) + P(X > 28) &= 1 - P(12 \leq X \leq 28) = \\ &= 1 - 0,95450 = 0,04550 \end{aligned}$$

e) $P(X = 22) = 0$.

Příklad 24: *Nechť* $X \sim Ro(0,2)$ *a* $Y = X^2 + 1$.

1. *Sestrojte distribuční funkci náhodné veličiny* Y.
2. *Spočtěte* $\text{cov}(X,Y)$.
3. *Rozhodněte, zda jsou* X *a* Y *nezávislé? Proč?*

Řešení:

1. Označme F distribuční funkci náhodné veličiny X a G distribuční funkci náhodné veličiny Y. Pak

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 \text{ pro } x \leq 0, \\ &= \frac{x}{2} \text{ pro } x \in (0,2), \\ &= 1 \text{ pro } x \geq 2, \end{aligned}$$

a tudíž

$$\begin{aligned} G(y) &= P(Y \leq y) = P(X^2+1 \leq y) = P(X \leq \sqrt{y-1}) = \\ &= 0 \quad \text{pro } y \leq 1, \\ &= \frac{\sqrt{y-1}}{2} \text{ pro } y \in (1,5), \\ &= 1 \quad \text{pro } y \geq 5. \end{aligned}$$

2. Upravme

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(X,Y) &= \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y = \mathbb{E}X(X^2+1) - \mathbb{E}X\mathbb{E}(X^2+1) \\ &= \mathbb{E}X^3 + \mathbb{E}X - \mathbb{E}X\mathbb{E}X^2 - \mathbb{E}X = \mathbb{E}X^3 - \mathbb{E}X\mathbb{E}X^2. \end{aligned}$$

Hustota náhodné veličiny X je $f(x) = \frac{1}{2}$ pro $x \in [0,2]$ a 0 jinde. Pak

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X &= \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx = \int_0^2 \frac{x}{2} dx = 1 \\ \mathbb{E}X^2 &= \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx = \frac{4}{3} \\ \mathbb{E}X^3 &= \int_0^2 \frac{x^3}{2} dx = 2 \\ \operatorname{cov}(X,Y) &= 2 - 1 \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

3. Nejsou nezávislé $\Leftarrow \operatorname{cov}(X,Y) \neq 0$.

Příklad 25: *Sdružené pravděpodobnosti náhodných veličin X a Y jsou dány následující tabulkou:*

	Y=0	*Y=1*	*Y=2*
X=0	*1/8*	*1/8*	*0*
X=1	*3/8*	*1/8*	*1/4*

1. *Jaká jsou jejich marginální rozdělení?*
2. *Jsou veličiny X a Y nezávislé?*
3. *Jak vypadá jejich korelační matice?*

Řešení:

1. Rozdělení vektoru X je

$$
\begin{aligned}
P(X=0) &= P(X=0,Y=0)+P(X=0,Y=1)+P(X=0,Y=2) = \\
&= \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+0=\frac{1}{4} \\
P(X=1) &= P(X=1,Y=0)+P(X=1,Y=1)+P(X=1,Y=2) = \\
&= \frac{3}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.
\end{aligned}
$$

Rozdělení vektoru Y je analogicky

$$
\begin{aligned}
P(Y=0) &= \frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{1}{2} \\
P(Y=1) &= \frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4} \\
P(Y=2) &= 0+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

2. Veličiny X a Y nejsou nezávislé, neboť např.

$$
P(X=0)\cdot P(Y=2)=\frac{1}{16}\neq 0 = P(X=0,Y=2).
$$

3. Kovarianci vypočteme ze vztahu $\operatorname{cov}(X,Y)=\mathbb{E}XY-\mathbb{E}X\mathbb{E}Y$:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}X =& 0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{4} \\
\mathbb{E}Y =& 0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \\
\mathbb{E}XY =& 0\cdot 0\cdot\frac{1}{8}+0\cdot 1\cdot\frac{1}{8}+0\cdot 2\cdot 0 \\
&+1\cdot 0\cdot\frac{3}{8}+1\cdot 1\cdot\frac{1}{8}+1\cdot 2\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{8} \\
\operatorname{cov}(X,Y) =& \mathbb{E}XY-\mathbb{E}X\mathbb{E}Y=\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{16}.
\end{aligned}
$$

Rozptyly pak vypočteme ze vztahů $\operatorname{var} X=\mathbb{E}X^2-(\mathbb{E}X)^2$ a $\operatorname{var} Y=\mathbb{E}Y^2-(\mathbb{E}Y)^2$:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}X^2 =& 0^2\cdot\frac{1}{4}+1^2\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{4} \\
\mathbb{E}Y^2 =& 0^2\cdot\frac{1}{2}+1^2\cdot\frac{1}{4}+2^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{4} \\
\operatorname{var} X =& \frac{3}{4}-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3}{16} \\
\\
\operatorname{var} Y =& \frac{5}{4}-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{11}{16}
\end{aligned}
$$

Korelace je tedy

$$
\operatorname{corr}(X,Y)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{var} X}\sqrt{\operatorname{var} Y}}=\frac{\frac{1}{16}}{\sqrt{\frac{3}{16}\cdot\frac{11}{16}}}=\frac{1}{\sqrt{33}}
$$

a korelační matice

$$\mathrm{Corr}(X,Y) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{33}} \\ \frac{1}{\sqrt{33}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 26: *Sdružená hustota náhodných veličin X a Y je*

$$\begin{aligned} f_{(X,Y)}(x,y) &= \frac{1}{2}e^{-x-\frac{y}{2}} && x>0, y>0 \\ &= 0 && \textit{jinak.} \end{aligned}$$

1. *Jaká jsou jejich marginální rozdělení?*

2. *Jsou veličiny X a Y nezávislé?*

3. *Jak vypadá jejich korelační matice?*

Příklad 27: *Firma má 50 poboček. Pravděpodobnost, že v současné finanční krizi pobočka krachne do příštího léta, je 0.1. Jaká je pravděpodobnost, že krachnou minimálně tři pobočky? (řešte pomocí CLV.)*

Příklad 28: *Cestou na přednášky do Dejvic přestupuju na Muzeu. Ráno i odpoledne mají metra stejný interval mezi odjezdy 3 minuty. Přednášek během semestru je celkem 24. Jaká je pravděpodobnost, že při cestách na přednášky a zpět (!!!) strávím čekáním na metro v součtu více než 1.5 hodiny?*

Příklad 29: *Uvažujme následující data:*

1. *počty výskytů jistého druhu rostliny na ploše 1 m^2:*
   0, 2, 1, 4, 4, 5, 2, 3, 7;

2. *časy (v sekundách) mezi impulzy v mozku:*
   4.25, 0.65, 1.35, 0.20, 0.55, 6.63, 1.38, 0.22, 0.27;

3. *venkovní teploty naměřené v různých letech při pravidelné akci konané v půlce října:*
   8.07, 19.23, 9.27, 5.71, 12.62, 11.24, 11.92, 17.30, 14.87.

Nakreslete pro tato data

a) *histogramy*

b) *boxploty*

c) *empirickou distribuční funkci*

a odhadněte, z jakého rozdělení mohou tato data pocházet. Řádně zdůvodněte.

Příklad 30: *Počet kazů na tabulkách skla se řídí Poissonovým rozdělením. Bylo pozorováno*

17	*tabulek*	*bez kazu*
4	*tabulky*	*s 1 kazem*
1	*tabulka*	*s 2 kazy*
2	*tabulky*	*s 3 kazy*
1	*tabulka*	*s 5 kazy.*

Metodou maximální věrohodnosti určete parametr λ tohoto Poissonova rozdělení.

Příklad 31: *Doba do poruchy daného přístroje má exponenciální rozdělení. Od začátku roku bylo zjištěno, že stroj se porouchal postupně za 20 dní, 37.5 dní, 28 dní, 10.5 dní a 54 dní. Metodou maximální věrohodnosti určete parametr λ tohoto exponenciálního rozdělení.*

Příklad 32: *U 64 praktických lékařů byl naměřen výběrový průměr počtu pacientů za den 23, výběrový rozptyl pak byl roven 36, rozdělení počtu pacientů není známé. Otestujte (pomocí intervalu spolehlivosti) na hladině 5%, zda skutečná střední hodnota počtu pacientů za den může být považována za rovnu 25.*

Příklad 33: *Výrobce tvrdí, že spotřeba jím vyráběného automobilu je 8 l/100km. Průměrná spotřeba u 49 uživatelů ale byla 8.4 l/100km. Naměřen byl dále výběrový rozptyl 2.56. Testujte na hladině 5%, zda měl výrobce pravdu.*

Příklad 34: *Firma má tři pobočky. Dva roky bylo sledováno, která z nich zaznamenala nejvyšší měsíční výnos. Bylo zjištěno, že nejvýnosnější byla první pobočka desetkrát, druhá šestkrát a třetí osmkrát. Je možné říct, že první pobočka je nejvýnosnější dvakrát častěji než zbylé dvě? Testujte na hladině 5%.*

Příklad 35: *U 120 osob byla pozorována výše jejich platu a schopnost splácet úvěr. Naměřeny byly následující sdružené četnosti:*

plat / schopnost splácet	špatná	dobrá
nízký	10	20
střední	15	45
vysoký	5	25

Jsou vlastnosti plat a schopnost splácet úvěr nezávislé? Testujte na hladině 5%.

Příklad 36: *Nechť $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je posloupnost nezávislých, stejně rozdělených náhodných veličin. Je tento proces striktně stacionární? Dokažte nebo vyvraťte.*

Příklad 37: *Nechť X je náhodná veličina s nulovou střední hodnotou a konečným kladným rozptylem σ^2. Definujme proces $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ předpisem*

$$X_t = (-1)^t X.$$

Je tento proces slabě stacionární? Je striktně stacionární? Dokažte nebo vyvraťte.

Příklad 38: *Pro pojištění motorových vozidel používá pojišťovna tři kategorie pojistného:*
1 - základní pojistné,
2 - bonus 30%,
3 - bonus 50%.
V prvním roce platí pojištěný základní pojistné. Jestliže má rok bezeškodní průběh, je pojištěný v dalším roce zařazen o třídu výše (pokud je to možné), pokud ale uplatní jeden pojistný nárok, je v příštím roce zařazen o kategorii níže (pokud je to možné) a při uplatnění více než jednoho nároku o dvě kategorie níže (pokud je to možné). Počty výskytů pojistné události v jednotlivých letech jsou nezávislé, stejně rozdělené náhodné veličiny s Poissonovým rozdělením s parametrem λ. Určete/

1. *počáteční rozdělení a matici pravděpodobností přechodu,*
2. *pravděpodobnost, že po dvou letech pojištění bude mít pojištěný 50% bonus, když začíná v základní třídě,*

3. *stacionární rozdělení pro případ, kdy každý řidič hlásí škodu průměrně jednou za 10 let (hodnoty v matici pravděpodobností přechodu zaokrouhlete na jedno desetinné místo, resp. dvě desetinná místa na pozicích $p_{3,1}$ a $p_{3,2}$),*

4. *přibližnou pravděpodobnost, že po dvaceti letech pojištění bude mít pojištěný 50% bonus.*

Řešení:

1. Počáteční rozdělení je $\mathbf{p} = (1, 0, 0)^T$.
   Označme X náhodnou veličinu popisující počet uplatnění pojistných nároků za rok. Víme, že $X \sim Po(\lambda)$, tj.
$$P(X = 0) = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda}, \quad P(X = 1) = \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda}$$
   a
$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda}.$$
   Matice pravděpodobností přechodu tedy je
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 - e^{-\lambda} & e^{-\lambda} & 0 \\ 1 - e^{-\lambda} & 0 & e^{-\lambda} \\ 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda} & \lambda e^{-\lambda} & e^{-\lambda} \end{pmatrix}.$$

2. Pro matici pravděpodobností přechodu druhého řádu platí
$$\mathbf{P}^{(2)} = \mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 1 - e^{-\lambda} & e^{-\lambda} & 0 \\ 1 - e^{-\lambda} & 0 & e^{-\lambda} \\ 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda} & \lambda e^{-\lambda} & e^{-\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - e^{-\lambda} & e^{-\lambda} & 0 \\ 1 - e^{-\lambda} & 0 & e^{-\lambda} \\ 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda} & \lambda e^{-\lambda} & e^{-\lambda} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 - e^{-\lambda} & e^{-\lambda}(1 - e^{-\lambda}) & e^{-2\lambda} \\ 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-2\lambda} & e^{-\lambda}(1 - e^{-\lambda} + \lambda e^{-2\lambda}) & e^{-2\lambda} \\ 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-2\lambda} & e^{-\lambda}(1 - e^{-\lambda}) & e^{-2\lambda}(\lambda + 1) \end{pmatrix}.$$
   Hledaná pravděpodobnost je tedy $p_{1,3}^{(2)} = e^{-2\lambda}$.

3. V případě, kdy každý řidič hlásí škodu průměrně jednou za 10 let, je $\lambda = 0.1$. Pak matice pravděpodobností přechodu je
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.9 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.9 \\ 0.01 & 0.09 & 0.9 \end{pmatrix}.$$
   Stacionární rozdělení je řešením soustavy
$$\begin{aligned} \pi_1 &= 0.1\,\pi_1 + 0.1\,\pi_2 + 0.01\,\pi_3 \\ \pi_2 &= 0.9\,\pi_1 + 0.09\,\pi_3 \\ \pi_3 &= 0.9\,\pi_2 + 0.9\,\pi_3 \end{aligned}$$
   která sice sama o sobě nemá jednoznačné řešení (neboť matice, která ji určuje, nemá plnou hodnost), avšak přidáním podmínky $\sum_{j=1}^{3} \pi_j = 1$ již jednoznačné řešení dostaneme, a to
$$\pi_1 = \frac{19}{919} \doteq 0.02, \quad \pi_2 = \frac{90}{919} \doteq 0.1, \quad \pi_3 = \frac{810}{919} \doteq 0.88.$$

4. $P(X_{20} = 3) \doteq \pi_3 \doteq 0.88$.

Příklad 39: *Uvažujme posloupnost nezávislých hodů kostkou. Nechť X_m značí maximální počet ok dosažených do $m-$tého hodu včetně.*

1. *Určete matici pravděpodobností přechodu.*
2. *Klasifikujte jednotlivé stavy.*
3. *Existuje v tomto řetězci nějaký absorpční stav?*
4. *Které stavy jsou dosažitelné z kterých?*

Řešení:

1. Pro prvky matice platí

$$\begin{aligned} p_{ij} &= \frac{1}{6} && i < j \\ &= \frac{j}{6} && i = j \\ &= 0 && i > j. \end{aligned}$$

Matice pravděpodobností přechodu tedy je

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{3}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Stav j Markovského řetězce je trvalý, jestliže $P(\tau_j(1) < \infty) = 1$, a přechodný, jestliže $P(\tau_j(1) = \infty) > 0$, kde $\tau_j(1) = \inf\{n > 0 : X_n = j\}$ je čas prvního návratu řetězce startujícího z j do stavu j.

Jelikož

$$\begin{aligned} P(\tau_j(1) = \infty) = \sum_{k:k>j} p_{jk} = \frac{6-j}{6} &> 0 \quad \text{pro } j = 1, 2, \ldots, 5, \\ &= 0 \quad \text{pro } j = 6, \end{aligned}$$

jsou stavy 1,...,5 přechodné a stav 6 je trvalý.

Trvalý stav j Markovského řetězce je nenulový, jestliže $\mathbb{E}\tau_j(1) < \infty$, a nulový, jestliže $\mathbb{E}\tau_j(1) = \infty$. Jelikož $\mathbb{E}\tau_6(1) = 1$, je stav 6 trvalý nenulový.

3. Je-li $p_{jj} = 1$, pak se stav j nazývá absorpční. Absorpční je tedy stav 6.

4. Stav j je dosažitelný ze stavu i, jestliže existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $p_{ij}^{(n)} > 0$. Jelikož v našem případě $p_{ij} = 0$ pro $j < i$, tak dosažitelné jsou stavy:
1 ze stavu 1,
2 ze stavu 1,2,

3 ze stavu 1,2,3,
4 ze stavu 1,...,4,
5 ze stavu 1,...,5,
6 ze stavu 1,...,6.

Příklad 40: *Markovský řetězec má matici pravděpodobností přechodu*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/5 & 4/5 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

1. *Klasifikujte všechny stavy.*
2. *Najděte všechna stacionární rozdělení pravděpodobností a posuďte, zda řetězec k některému z nich konverguje.*
3. *Odhadněte stav ve výchozím čase t, víte-li, že v čase $t+2$ byl řetězec ve stavu 2.*

Příklad 41: *Metodou tří sigma spočtěte brutto pojistné, které musí pojišťovna od pojištěnců vybrat v případě, že celková výše škod se řídí složeným rozdělením, počet škodních událostí má Poissonovo rozdělení, výše jednotlivých škod má exponenciální rozdělení, průměrně je pojišťovně hlášeno 5000 škod ročně a průměrná výše jedné hlášené škody je 20 000 Kč.*

Příklad 42: *Za škody vzniklé v roce 2019 zaplatila pojišťovna 8 mil. Kč ještě v roce 2019 a dále 4 mil. Kč v roce 2020, 2 mil. Kč v roce 2021 a 1 mil. Kč v roce 2022. Další roky již pojišťovna nic platit nebude. Za škody vzniklé v roce 2020 zaplatila pojišťovna 10 mil. Kč v roce 2020, 3 mil. Kč v roce 2021 a 3 mil. Kč v roce 2022. Za škody vzniklé v roce 2021 zaplatila pojišťovna 7 mil. Kč v roce 2021 a 3 mil. Kč v roce 2022. Za škody vzniklé v roce 2022 zaplatila pojišťovna 10 mil. Kč v roce 2022. údaje za rok 2023 ještě k dispozici nemáme. Metodou chain ladder spočtěte výši rezervy na pojistná plnění.*