Příklad 1: *Házíme dvěma kostkami. Stanovte pravděpodobnost jevu, že na kostkách padne součet menší než 5.*

Řešení:
Výsledky pokusu jsou uspořádané dvojice. První člen dvojice odpovídá hodu 1. kostkou a druhý člen odpovídá hodu 2. kostkou. Všechny možné výsledky jsou:

$$
\begin{array}{l}
(1,1)\ (1,2)\ (1,3)\ (1,4)\ (1,5)\ (1,6),\\
(2,1)\ (2,2)\ (2,3)\ (2,4)\ (2,5)\ (2,6),\\
(3,1)\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\ (3,6),\\
(4,1)\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\ (4,6),\\
(5,1)\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\ (5,6),\\
(6,1)\ (6,2)\ (6,3)\ (6,4)\ (6,5)\ (6,6),
\end{array}
$$

tzn. počet všech možných výsledků je 36. Počet elementárních jevů příznivých jevu A je 6, a to (1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2) a (3,1).
Hledaná pravděpodobnost je tedy rovna $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Příklad 2: *V balíčku máme 32 karet, z toho 4 esa. Dvakrát za sebou vytáhneme náhodně jednu kartu. Stanovte pravděpodobnost jevu "alespoň jedna z vytažených karet je eso", jestliže po prvním tahu kartu a) vrátíme, b) nevrátíme zpět do balíčku.*

Řešení:
a) Výsledky pokusu jsou opět uspořádané dvojice. První člen dvojice odpovídá kartě vytažené v prvním tahu a druhý člen kartě vytažené ve druhém tahu. V prvním tahu můžeme kartu vytáhnout 32 způsoby. Protože vytaženou kartu vracíme zpět do urny, i v druhém tahu máme 32 možností. Počet všech možných případů je tedy 32^2. Příznivým případům odpovídají tahy (jiná karta - eso), (eso - jiná karta), (eso - eso). Počet příznivých případů je $28 \cdot 4 + 4 \cdot 28 + 4 \cdot 4$. Hledaná pravděpodobnost je tedy rovna

$$P(B) = \frac{28 \cdot 4 + 4 \cdot 28 + 4 \cdot 4}{32^2} = \frac{15}{64}.$$

b) Počet možných případů je vzhledem k tomu, že po prvním tahu kartu nevrátíme, $32 \cdot 31$. Příznivým případům odpovídají opět tahy (jiná karta -

eso), (eso - jiná karta), (eso - eso). Počet příznivých případů je nyní $28 \cdot 4 + 4 \cdot 28 + 4 \cdot 3$. Hledaná pravděpodobnost je tedy rovna

$$P(C) = \frac{2 \cdot 4 \cdot 28 + 4 \cdot 3}{32 \cdot 31} = \frac{59}{248}.$$

Příklad 3: *Cyril bude hrát s Adamem a Bohdanem tenis. Bude hrát tři sety. Může si vybrat pořadí protihráčů Adam - Bohdan - Adam nebo Bohdan - Adam - Bohdan. Jestliže vyhraje dva sety po sobě, získá prémii. Jaké pořadí má Cyril zvolit, aby měl větší šanci získat prémii, jestliže Adam je lepší hráč než Bohdan?*

Řešení:
Nechť a je pravděpodobnost výhry Cyrila s Adamem a b je pravděpodobnost výhry Cyrila s Bohdanem. Přitom je $a < b$.
K získání prémie se musí odehrát buď série (výhra - výhra - výhra) nebo (výhra - výhra - prohra) nebo (prohra - výhra - výhra). Pravděpodobnost získání prémie v pořadí Adam - Bohdan - Adam je tak

$$aba + ab(1-a) + (1-a)ba = ab(2-a)$$

a pravděpodobnost získání prémie v pořadí Bohdan - Adam - Bohdan je

$$bab + ba(1-b) + (1-b)ab = ab(2-b).$$

Jelikož $ab(2-a) > ab(2-b)$, vyšší pravděpodobnost získání prémie je při pořadí Adam - Bohdan - Adam.

Příklad 4: *Na party se sešlo 14 studentů, z toho 8 vysokoškoláků a 6 středoškoláků. Jaká je pravděpodobnost, že v náhodně vybrané čtveřici budou*

1. *všichni čtyři středoškoláci,*
2. *právě jeden vysokoškolák,*
3. *aspoň jeden vysokoškolák?*

Řešení:
Počet všech možných čtveřic utvořených ze 14 studentů je $\binom{14}{4}$.

1. Počet všech čtveřic vytvořených ze středoškoláků je $\binom{6}{4}$, tudíž hledaná pravděpodobnost je

$$P(D) = \frac{\binom{6}{4}}{\binom{14}{4}} \doteq 0,015.$$

2. Počet všech trojic vytvořených ze středoškoláků je $\binom{6}{3}$, počet všech jednic vytvořených z vysokoškoláků je $\binom{8}{1} = 8$. K vytvoření příznivých čtveřic je třeba všechny trojice zkombinovat se všemi jednicemi, tudíž hledaná pravděpodobnost je

$$P(E) = \frac{8 \cdot \binom{6}{3}}{\binom{14}{4}} \doteq 0,16.$$

3. Jedná se o doplňkový jev k jevu D, tudíž $P(F) = 1 - P(D) \doteq 0,985$.

Příklad 5: *Jaká je pravděpodobnost, že ve skupině n lidí mají alespoň dva narozeniny ve stejný den (neuvažujte přestupné roky a předpokládejte, že se během celého roku děti rodí rovnoměrně)?*

Řešení:
Nechť G je jev, že ve skupině n lidí mají alespoň dva narozeniny ve stejný den. Pak jev G^c znamená, že ve skupině n lidí má každý člověk narozeniny v jiný den.

$$P(G^c) = \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)}{365^n} = \frac{365!}{(365-n)! \cdot 365^n},$$

a tudíž

$$P(G) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)}{365^n} = \frac{365!}{(365-n)! \cdot 365^n}.$$

Příklad 6: *Pravděpodobnost výhry hráče A nad hráčem B je $0,7$. Jaká je pravděpodobnost, že během deseti po sobě jdoucích zápasů*

1. *alespoň jednou vyhrál B,*

2. *maximálně dvakrát vyhrál B?*

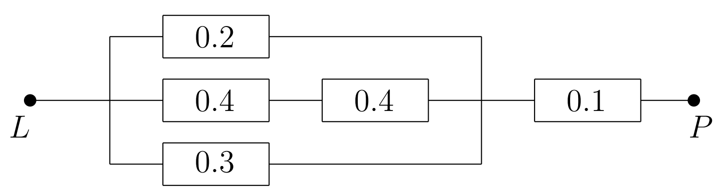
Řešení:

1. $P(H) = 1 - P(H^c) = 1 - (0,7)^{10}$.

2. Jev I znamená, že buď vše vyhrál A nebo devět her vyhrál A a jednu B (na pořadí hry nezáleží) nebo osm her vyhrál A a dvě B (na pořadí rovněž nezáleží). Pak

$$P(I) = (0,7)^{10} + \binom{10}{1} 0,3 \cdot (0,7)^9 + \binom{10}{2} (0,3)^2 \cdot (0,7)^8.$$

Příklad 7: *Signál prochází zařízením zleva (L) doprava (P). Jednotlivé bloky v zařízení mají poruchu s pravděpodobnostmi vyznačenými na obrázku a výskyty poruch jsou na sobě nezávislé. Určete pravděpodobnost, že vyslaná zpráva bude přenesena.*



Řešení:
Budeme počítat pravděpodobnost, že signál zařízením neprojde. Označme postupně A, B, C jevy, že nastala porucha ve větvi paralelního zapojení po řadě od shora dolů, tj. $P(A) = 0.2$, $P(C) = 0.3$ a pro prostřední větev dostaneme pravděpodobnost rozpojené cesty jako

$$P(B) = P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 \cap B_2) = 0.4 + 0.4 - 0.4 \cdot 0.4 = 0.64\,,$$

(zde jsme využili nezávislosti funkčnosti jednotlivých bloků).
Paralelní zapojení bloků pak tedy bude rozpojené s pravděpodobností

$$P(D_1) = P(A \cap B \cap C) = 0.2 \cdot 0.64 \cdot 0.3 = 0.0384\,,$$

kde jsme jako D_1 označili poruchu v paralelním spojení trojice bloků. Výsledné zařízení je sériovým zapojením dvou bloků D_1 a D_2, kde pravděpodobnosti rozpojení jsou rovny $P(D_1) = 0.0384$ a $P(D_2) = 0.1$. Signál neprojde s pravděpodobností

$$P(D_1 \cup D_2) = P(D_1) + P(D_2) - P(D_1 \cap D_2) = 0.0384 + 0.1 - 0.0384 \cdot 0.1 = 0.13456\,.$$

Přenos zprávy se tedy uskuteční s pravděpodobností

$$P = 1 - P(D_1 \cup D_2) = 1 - 0.13456 = 0.86544\,.$$

Příklad 8: *Mějme dvě náhodná čísla x a y mezi 0 a 1. Jaká je pravděpodobnost, že jsou obě větší než 0,3 a zároveň jejich součet je menší než 1?*

Řešení:
Označme J jev, že x a y jsou větší než 0,3 a zároveň jejich součet je menší než 1.
Nakreslíme-li si čtverec o hraně délky 1 značící (náhodné) souřadnice x a y, pak odpovídající plocha je trojúhelník ohraničený přímkami $y = -x + 1$ směrem k bodu $[0; 0]$, $x = 0,3$ směrem "doprava"a $y = 0,3$ směrem "nahoru". Její plocha je rovna 0,08, tudíž hledaná pravděpodobnost je

$$P(J) = \frac{0,08}{1} = 0,08.$$

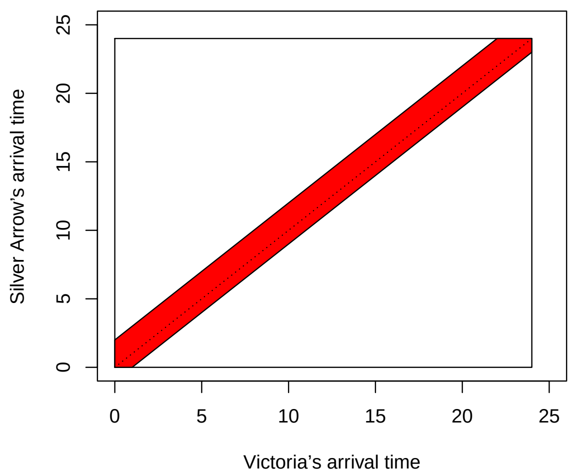
Příklad 9: *Na rovnoměrnou nekonečnou čtvercovou mřížku, kde vzdálenost průsečíků je a, hodíme minci o průměru b, kde $b < a$. Jaká je pravděpodobnost, že mince protne nějakou z linek této mřížky?*

Řešení:
Všechny elementární jevy jsou dány polohou středu mince uvnitř čtverce o straně a. K protnutí nedojde, pokud se střed mince bude nacházet uvnitř tohoto čtverce ve vzdálenosti alespoň $b/2$ od každé jeho strany, tj. ve čtverci o straně $a - b$. Pak

$$P(\text{mince protne linku}) = 1 - P(\text{neprotne}) = 1 - \frac{(a-b)^2}{a^2}.$$

Příklad 10: *Lodě Victoria a Silver Arrow přijedou do přístavu úplně náhodně nezávisle na sobě v následujících 24 hodinách. Victoria počká 2 hodiny a pak odplouvá, Silver Arrow počká 1 hodinu a pak odplouvá. Jaká je pravděpodobnost, že se v přístavu potkají?*

Řešení:
Označme K jev, že se dané lodě v přístavu potkají.
Nakreslíme-li si čtverec o hraně délky 24 značící hodinu, kdy přijede Victoria (osa x), resp. Silver Arrow (osa y), pak odpovídající plocha je část čtverce ohraničená přímkami $y = x + 2$ a $y = x - 1$.



Její plocha je rovna 69,5, tudíž hledaná pravděpodobnost je

$$P(K) = \frac{69,5}{24^2} \doteq 0,12.$$

Příklad 11: *Nezávislé jevy A, B, C mají po řadě pravděpodobnosti* 0.2*,* 0.3*,* 0.4*. Určete pravděpodobnost jevu $D = (A \cup B) \cap C$.*

Řešení:
Víme, že $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, a tedy

$$\begin{aligned} P((A \cup B) \cap C) &= P((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\ &= P((A \cap C)) + P(B \cap C)) - P((A \cap C) \cap (B \cap C)) \\ &= P((A \cap C)) + P(B \cap C)) - P((A \cap B \cap C)) \end{aligned}$$

Jelikož A, B a C jsou nezávislé jevy, máme

$$\begin{aligned} P((A \cup B) \cap C) &= P((A \cap C)) + P(B \cap C)) - P((A \cap B \cap C)) \\ &= P(A)P(C) + P(B)P(C) - P(A)P(B)P(C) \\ &= 0.2 \cdot 0.4 + 0.3 \cdot 0.4 - 0.2 \cdot 0.3 \cdot 0.4 = 0.176\,. \end{aligned}$$

Příklad 12: *Náhodné jevy A a B jsou nezávislé, $P(A \cup B) = 0.545$, $P(A \cap B) = 0.105$. Určete pravděpodobnosti $P(A)$, $P(B)$ a $P(A \cap B^c)$.*

Řešení:
Jestliže využijeme nezávislosti náhodných jevů A a B, pak dostaneme

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B), \qquad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Označme si $P(A) = x$ a $P(B) = y$. Pro hledané pravděpodobnosti tak dostaneme soustavu rovnic

$$0.545 = x + y - 0.105, \qquad x \cdot y = 0.105 \Rightarrow y = \frac{0.105}{x}\,.$$

Po dosazení do první rovnice dostaneme kvadratickou rovnici pro neznámou x ve tvaru

$$x^2 - 0.65x + 0.105 = 0 \Rightarrow x_1 = 0.35, \quad x_2 = 0.3\,.$$

Ze symetrie plyne

$$P(A) = 0.35, \quad P(B) = 0.3 \qquad \text{nebo} \qquad P(A) = 0.3, \quad P(B) = 0.35\,.$$

Pak $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = 0.35 - 0.105 = 0.245$, resp. $P(A \cap B^c) = 0.3 - 0.135 = 0.195$.

Příklad 13: *Házíme dvěma kostkami. Označme*
jev A... "na 1.kostce padne sudý počet puntíků",
jev B... "na 2.kostce padne lichý počet puntíků",
jev C... "na obou kostkách padne stejný počet puntíků".
Jsou jevy A,B,C nezávislé? Jsou po dvou nezávislé?

Řešení:
Výsledky pokusu jsou uspořádané dvojice. První člen dvojice odpovídá hodu 1. kostkou a druhý člen odpovídá hodu 2. kostkou.
Všechny možné výsledky jsou:

$$\begin{array}{l}
(1{,}1)\ (1{,}2)\ (1{,}3)\ (1{,}4)\ (1{,}5)\ (1{,}6),\\
(2{,}1)\ (2{,}2)\ (2{,}3)\ (2{,}4)\ (2{,}5)\ (2{,}6),\\
(3{,}1)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (3{,}6),\\
(4{,}1)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (4{,}6),\\
(5{,}1)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (5{,}6),\\
(6{,}1)\ (6{,}2)\ (6{,}3)\ (6{,}4)\ (6{,}5)\ (6{,}6),
\end{array}$$

tzn. počet všech možných výsledků je 36.
Výsledků příznivých jevů jevu A je 18 (2., 4. a 6.řádek), tudíž $P(A) = \frac{1}{2}$.
Výsledků příznivých jevů jevu B je 18 (1., 3. a 5.sloupec), tudíž $P(B) = \frac{1}{2}$.
Výsledků příznivých jevů jevu C je 6 (diagonála), tudíž $P(C) = \frac{1}{6}$.
Výsledků příznivých jevů jevu $A \cap B$ je 9 (1., 3. a 5.sloupec ve 2., 4. a 6.řádku), tudíž $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$.
Výsledky příznivých jevů jevu $A \cap C$ jsou 3 (prvky (2,2),(4,4) a (6,6)), tudíž $P(A \cap C) = \frac{1}{12}$.
Výsledky příznivých jevů jevu $B \cap C$ jsou 3 (prvky (1,1),(3,3) a (5,5), tudíž $P(A \cap C) = \frac{1}{12}$.
Jev $A \cap B \cap C$ je nemožný, tudíž $P(A \cap B \cap C) = 0$.
Jelikož

$$P(A \cap B) = P(A)P(B),\ P(A \cap C) = P(A)P(C),\ P(B \cap C) = P(B)P(C),$$

jsou jevy po dvou nezávislé, ale protože

$$P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C),$$

nejsou (totálně) nezávislé.

Příklad 14: *Na MFF studuje 50% studentů informatiku, 30% matematiku a 20% fyziku. Na informatice je 10% dívek, na matematice 30% a na fyzice 20%. Jaká je pravděpodobnost, že*

1. *náhodně vybraný student je dívka?*

2. náhodně vybraná studentka studuje matematiku?

Řešení:
Označme jevy
B... náhodně vybraný student je dívka,
A_1... náhodně vybraný student je matematik,
A_2... náhodně vybraný student je fyzik,
A_3... náhodně vybraný student je informatik.
Věta o úplné pravděpodobnosti říká, že

$$P(B) = \sum_{j=1}^{3} P(B|A_j) \cdot P(A_j),$$

přičemž máme $P(A_1) = 0.3$, $P(B|A_1) = 0.3$, $P(A_2) = 0.2$, $P(B|A_2) = 0.2$, $P(A_3) = 0.5$ a $P(B|A_3) = 0.1$. Tedy

$$P(B) = 0.3 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.5 = 0.18.$$

Dále chceme počítat $P(A_1|B)$. Bayesova věta říká, že

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1) \cdot P(A_1)}{\sum_{j=1}^{3} P(B|A_j) \cdot P(A_j)},$$

tudíž

$$P(A_1|B) = \frac{0.3 \cdot 0.3}{0.3 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.5} = \frac{1}{2}.$$

Tyto pravděpodobnosti lze vyčíst také z tabulky, kterou si vyplníme pro libovolněvelký vzorek studentů, např. 100:

	I	M	F	$\sum$
D	5	9	4	18
CH	45	21	16	82
$\sum$	50	30	20	100

Vidíme, že pravděpodobnost, že náhodně vybraný student je dívka, je podíl dívek ze všech studentů, tj. $P(B) = 18/100$, a pravděpodobnost, že náhodně vybraná studentka studuje matematiku, je podíl matematiček mezi všemi dívkami, tj. $P(A_1|B) = 9/18$.

Příklad 15: *Požití alkoholu bylo prokázáno u 1% všech řidičů a u 10% řidičů, kteří způsobili dopravní nehodu. Kolikrát se požitím alkoholu zvyšuje riziko nehody?*

Řešení:
Označme jevy

1. $A =$ „požil alkohol,“
2. $H =$ „způsobil nehodu.“

Pak máme $P(A) = 0.01$ a $P(A|H) = 0.1$. Tudíž

$$0.1 = P(A|H) = \frac{P(H|A) \cdot P(A)}{P(H|A) \cdot P(A) + P(H|A^c) \cdot P(A^c)} =$$
$$= \frac{P(H|A) \cdot 0.01}{P(H|A) \cdot 0.01 + P(H|A^c) \cdot 0.99} = \frac{1}{1 + \frac{P(H|A^c)}{P(H|A)} \cdot 99} \ .$$

Výsledek tedy je

$$\frac{P(H|A)}{P(H|A^c)} = 11 \ .$$

Příklad 16: *Uvažujme hod mincí, tj.* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$*, kde*
ω_1 *je jev, že padl rub, přičemž* $P(\omega_1) = 0.49$*,*
ω_2 *je jev, že padl líc, přičemž* $P(\omega_2) = 0.49$*,*
ω_3 *je jev, že nastala výjimečná situace (hrana, ukradení mince :-) apod.), přičemž* $P(\omega_3) = 0.02$*).*
Sestrojte dvě různé náhodné veličiny a nakreslete jejich distribuční funkce.

Řešení:
Veličiny mohou být např.

- $X : X(\omega_1) = 1, X(\omega_2) = -1, X(\omega_3) = 0$. Distribuční funkce je pak skokovitá se skoky v bodech -1,0 a 1 o velikostech 0.49, 0.02 a 0.49, tj.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < -1 \\ 0.49 & \text{pro } -1 \leq x < 0 \\ 0.51 & \text{pro } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{pro } x \geq 1 \end{cases}$$

- $Y : Y(\omega_1) = Y(\omega_2) = \pi, Y(\omega_3) = 27.4$. Distribuční funkce je pak skokovitá se skoky v bodech π a 27.4 o velikostech 0.98 a 0.02 (neboť obraz $= \pi$ mají dva elementární jevy, jejichž souhrnná pravděpodobnost je $0.49 + 0.49 = 0.98$), tj.

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < \pi \\ 0.98 & \text{pro } \pi \le x < 27.4 \\ 1 & \text{pro } x \ge 27.4 \end{cases}$$

Příklad 17: *Určete konstantu c tak, aby funkce $f(x)$ byla hustota nějaké náhodné veličiny, když*

$$f(x) = \begin{cases} cxe^{-2x}\,, & x \in (0,1), \\ 0\,, & jinak\,. \end{cases}$$

Řešení:
Pro hustotu musí platit

$$\int_{\mathbf{R}} f(x)dx = 1.$$

Použitím integrace per partes dostaneme

$$\int_{\mathbf{R}} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} cxe^{-2x}dx + \int_{1}^{\infty} 0dx = c \cdot \frac{1 - 3e^{-2}}{4},$$

a tudíž $c = \frac{4}{1-3e^{-2}}$.

Příklad 18: *Mějme funkci*

$$f(x) = \begin{cases} 3e^{-3x}\,, & x \in (0,\infty), \\ 0\,, & jinak\,. \end{cases}$$

1. *Ověřte, že f je hustota pravděpodobnosti.*
2. *Sestrojte distribuční funkci příslušnou této hustotě.*

3. *Spočtěte pravděpodobnost $P(-1 \leq X \leq 1)$, kde X je náhodná veličina s hustotou f.*

4. *Spočtěte $\mathbb{E}X$ a $\operatorname{var} X$.*

Řešení:

1. Funkce f je nezáporná a
$$\int_{\mathbf{R}} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{\infty} 3e^{-3x}dx = 1,$$
tudíž vlastnost $\int_{\mathbf{R}} f(x)dx = 1$ je splněna.

2. Příslušná distribuční funkce je
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} 3e^{-3t}dt = 1 - e^{-3x} \text{ pro } x \in (0, \infty)$$
a
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0 \text{ pro } x \leq 0.$$

3. Hledaná pravděpodobnost je
$$P(-1 \leq X \leq 1) = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{0}^{1} 3e^{-3x}dx = 1 - e^{-3}.$$
Lze využít také distribuční funkce:
$$P(-1 \leq X \leq 1) = P(X \leq 1) - P(X < -1) = P(X \leq 1) - P(X \leq -1) =$$
$$= F(1) - F(-1) = 1 - e^{-3 \cdot 1} - 0 = 1 - e^{-3}.$$

4. Použitím integrace per partes dostaneme
$$\mathbb{E}X = \int_{\mathbf{R}} xf(x)dx = \int_{0}^{\infty} 3xe^{-3x}dx = \frac{1}{3},$$
$$\mathbb{E}X^2 = \int_{\mathbf{R}} x^2 f(x)dx = \int_{0}^{\infty} 3x^2 e^{-3x}dx = \frac{2}{9}$$
$$\Rightarrow \operatorname{var} X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{2}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{9}.$$
Střední hodnota je tudíž $\mathbb{E}X = 1/3$ a rozptyl $\operatorname{var} X = 1/9$

Příklad 19: *Náhodná veličina X má diskrétní rozdělení s pravděpodobnostní funkci $P(X=0)=0.4$ a $P(X=1)=0.6$. Náhodná veličina Y má spojité rovnoměrné rozdělení na intervalu $\langle -1,2\rangle$. Náhodná veličina Z je směsí $Z=\mathrm{Mix}_{1/4}(X,Y)$. Určete*

1. *distribuční funkci F_Z,*
2. *pravděpodobnosti $P(0\le Z\le 1)$ a $P(Z\ge 0.5)$,*
3. *střední hodnotu $\mathbb{E}Z$,*
4. *$t\in\mathbb{R}$ takové, že $P(Z\le t)=0.9$.*

Řešení:

1. Veličina X s alternativním rozdělením Alt(0.6) má distribuční funkci

$$F_X(t)=\sum_{u\le t}p_X(u)=\begin{cases}0\,, & t<0\,,\\ 0.4\,, & 0\le t<1\,,\\ 1\,, & t\ge 1\,.\end{cases}$$

Veličina Y má spojité rovnoměrné rozdělení na $\langle -1,2\rangle$ s hustotou

$$f_Y(t)=\begin{cases}\frac{1}{2-(-1)}=\frac{1}{3}\,, & t\in\langle -1,2\rangle\,,\\ 0\,, & \text{jinak}\,,\end{cases}$$

a distribuční funkcí

$$F_Y(t)=\int_{-\infty}^{t}f_Y(u)\;\mathrm{d}u=\begin{cases} 0, & t<-1\,,\\ \int_{-1}^{t}\frac{1}{3}\;\mathrm{d}u=\frac{t+1}{3}, & -1\le t<2\,,\\ 1, & t\ge 2\,.\end{cases}$$

Pro distribuční funkci veličiny $Z=\mathrm{Mix}_{1/4}(X,Y)$ pak platí

$$F_Z(t)=\tfrac{1}{4}F_X(t)+\tfrac{3}{4}F_Y(t)=\begin{cases} 0, & t<-1\,,\\ \frac{1}{4}\cdot 0+\frac{3}{4}\cdot\frac{t+1}{3}=\frac{1}{4}t+\frac{1}{4}, & -1\le t<0\,,\\ \frac{1}{4}\cdot 0.4+\frac{3}{4}\cdot\frac{t+1}{3}=\frac{1}{4}t+\frac{7}{20}, & 0\le t<1\,,\\ \frac{1}{4}\cdot 1+\frac{3}{4}\cdot\frac{t+1}{3}=\frac{1}{4}t+\frac{1}{2}, & 1\le t<2\,,\\ 1, & t\ge 2\,.\end{cases}$$

2. Připomeňme, že $P(X \leq t) = F(t)$ a $P(X < t) = \lim\limits_{x \to t_-} F(t)$. Pak

$$P(0 \leq Z \leq 1) = P(Z \leq 1) - P(Z < 0) = F_Z(1) - \lim_{t \to 0_-} F_Z(t) = \tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2},$$

$$P(Z \geq 0.5) = 1 - P(Z < 0.5) = 1 - \lim_{t \to 0.5_-} F_Z(t) = 1 - \left(\tfrac{1}{4} \cdot 0.5 + \tfrac{7}{20}\right) = \tfrac{21}{40}.$$

3. Pro alternativní rozdělení veličiny X je $\mathbb{E}X = 1 \cdot 0.6 = \frac{3}{5}$ a pro rovnoměrné rozdělení veličiny Y na intervalu $(-1, 2)$ je $\mathbb{E}Y = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$. Tedy pro $Z = \mathrm{Mix}_{1/4}(X, Y)$ je

$$\mathbb{E}Z = \tfrac{1}{4}\mathbb{E}X + \tfrac{3}{4}\mathbb{E}Y = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{3}{5} + \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{21}{40}\ .$$

4. Hledáme $t \in \mathbb{R}$ tak, že $0.9 = P(Z \leq t) = F_Z(t)$. K tomu potřebujeme vědět, kterou část předpisu pro F_Z máme použít. Protože $\frac{3}{4} \leq 0.9 \leq 1$, což je rozmezí hodnot na poslední rostoucí části předpisu, musíme použít právě tuto část, tedy

$$0.9 = F_Z(t) = \tfrac{1}{4}t + \tfrac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad t = 3.6 - 2 = 1.6.$$

Příklad 20: *Náhodná veličina X má distribuční funkci*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x \in (-\infty, -2) \\ 0.1\,x + 0.5 & , x \in \langle -2,\, -1) \\ 0.4 & , x \in \langle -1,\, 0) \\ 0.3\,x + 0.6 & , x \in \langle 0,\, 1) \\ 1 & , x \in \langle 1, \infty) \end{cases}$$

1. *Vyjádřete X jako směs náhodných veličin D a S, kde D je diskrétní a S spojitá. Popište a znázorněte jejich rozdělení.*

2. *Určete $\mathbb{E}X$.*

3. *Najděte kvantilovou funkci q_X.*

<u>Řešení:</u>

1. Připomeňme si, jak se hledají diskrétní a spojité části směsi $X = \mathrm{Mix}_c(D,S)$. Diskrétní část D je zodpovědná za skoky v distribuční funkci F_X. Pro koeficient c ve směsi platí

$$c = P(X \in \underbrace{\textit{"množina všech bodů nespojitosti funkce } F_X\textit{"}}_{=\{-2,0,1\}}) =$$

$$= P\Big(X \in \{-2,0,1\}\Big) = P(X=-2) + P(X=0) + P(X=1)\ .$$

Hodnotu skoku dostaneme pomocí vztahu

$$P(X=-2) = P(X \le -2) - P(X < -2) = F_X(-2) - \lim_{t \to -2_-} F_X(t) = 0.3 - 0 = 0.3$$

a podobně

$$P(X=0) = 0.6 - 0.4 = 0.2 \ \text{ a } \ P(X=1) = 1 - 0.9 = 0.1$$

Takže

$$c = P(X=-2) + P(X=0) + P(X=1) = 0.3 + 0.2 + 0.1 = 0.6.$$

Pro distribuční funkce máme vztah

$$F_X(t) = cF_D(t) + (1-c)F_S(t)$$

• Popis diskrétní části D:

Pro distribuční funkci F_D diskrétní veličiny D platí

$$cF_D(t) = \sum_{a \le t} P(X=a) = \begin{cases} 0 & ,\ t < -2 \\ 0.3 & ,\ t \in \langle -2, 0) \\ 0.3 + 0.2 = 0.5 & ,\ t \in \langle 0, 1) \\ 0.3 + 0.2 + 0.1 = 0.6 & ,\ t \ge 1 \end{cases}$$

takže po vynásobení hodnotou $\frac{1}{c} = \frac{1}{0.6}$ máme

$$F_D(t) = \begin{cases} 0 & ,\ t < -2 \\ \frac{1}{0.6} \cdot 0.3 = \frac{1}{2} & ,\ t \in \langle -2, 0) \\ \frac{1}{0.6} \cdot 0.5 = \frac{5}{6} & ,\ t \in \langle 0, 1) \\ \frac{1}{0.6} \cdot 0.6 = 1 & ,\ t \ge 1. \end{cases}$$

Pro pravděpodobnostní funkci p_D diskrétní veličiny D tedy platí

$$p_D(t) = \tfrac{1}{c} \cdot P(X=t) = \tfrac{1}{0.6} \cdot P(X=t) = \begin{cases} \tfrac{1}{0.6} \cdot 0.3 = \tfrac{1}{2} & , \ t = -2 \\ \tfrac{1}{0.6} \cdot 0.2 = \tfrac{1}{3} & , \ t = 0 \\ \tfrac{1}{0.6} \cdot 0.1 = \tfrac{1}{6} & , \ t = 1 \\ 0 & , \ \text{jinak.} \end{cases}$$

• Popis spojité části S:

Pro distribuční funkci spojité náhodné veličiny S pak ze vztahu $F_X = cF_D + (1-c)F_S$ dostáváme

$$F_S(t) = \frac{F_X(t) - cF_D(t)}{1-c} = \tfrac{1}{0.4}\Big(F_X(t) - cF_D(t)\Big) =$$

$$= \begin{cases} & 0 & , \ t < -1 \\ \tfrac{1}{0.4}\Big(0.1\ t + 0.5 - 0.3\Big) = & \tfrac{t+2}{4} & , \ t \in \langle -2, -1) \\ \tfrac{1}{0.4}\Big(0.4 - 0.3\Big) = & \tfrac{1}{4} & , \ t \in \langle -1, 0) \\ \tfrac{1}{0.4}(0.3\ t + 0.6 - 0.5) = & \tfrac{3t+1}{4} & , \ t \in \langle 0, 1) \\ \tfrac{1}{0.4}(1 - 0.6) = & 1 & , \ t \geq 1 \end{cases}$$

Graf funkce F_S tedy dostaneme jednoduše tak, že části grafu F_X, které na sebe nenavazují, posuneme dolů tak, aby výsledek byl spojitý. Celý graf pak ve směru y natáhneme tak, aby v nekonečnu měl limitu rovnu 1.

Hustotu f_S spojité veličiny S pak získáme derivací F_S pro body, kde derivace existuje. V ostatních (v tomto případě konečně mnoha) bodech na hodnotách nezáleží. Takže můžeme psát

$$f_S(t) = F_S'(t) = \Big(\frac{F_X - cF_D}{1-c}\Big)'(t) = \frac{1}{1-c} \cdot F_X'(t)$$

$$f_S(t) = \begin{cases} \tfrac{1}{4} & , \ t \in (-2, -1) \\ \tfrac{3}{4} & , \ t \in (0, 1) \\ 0 & , \ \text{jinak.} \end{cases}$$

2. Střední hodnotu můžeme spočítat analogicky k předešlému příkladu jako $\mathbb{E}X = 0.6\mathbb{E}D + 0.4\mathbb{E}S$, přičemž

$$\begin{aligned}\mathbb{E}D &= -2 \cdot P(D=-2) + 0 \cdot P(D=0) + 1 \cdot P(D=1) = \\ &= -2 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{6} = -\frac{5}{6}\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}S &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_S(x)\ \mathrm{d}x = \\ &= \int_{-\infty}^{-2} 0x\ \mathrm{d}x + \int_{-2}^{-1} \frac{1}{4}x\ \mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} 0x\ \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{3}{4}x\ \mathrm{d}x + \int_{1}^{\infty} 0x\ \mathrm{d}x = \\ &= \left[\frac{x^2}{8}\right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{3x^2}{8}\right]_{0}^{1} = -\frac{3}{8} + \frac{3}{8} = 0,\end{aligned}$$

tedy

$$\mathbb{E}X = 0.6 \cdot (-\frac{5}{6}) + 0.4 \cdot 0 = -0.5.$$

3. Kvantilová funkce q_X pro veličinu X je inverzní funkcí k F_X tam, kde F_X je ostře rostoucí funkce, tj. $q_X(\alpha) = x$ právě když $F_X(x) = \alpha$. Pro $x \in (-2, -1)$ je $F_X(x) = 0.1\,x + 0.5$, a tudíž

$$\alpha = 0.1\,x + 0.5 \quad \Leftrightarrow \quad x = 10\alpha - 5,$$

tedy

$$q_X(\alpha) = 10\alpha - 5 \quad \text{pro} \quad \alpha \in (0,\ 0.3)\,.$$

Podobně pro $x \in (0, 1)$ je $F_X(x) = 0.3\,x + 0.6$, tudíž

$$\alpha = 0.3\,x + 0.6 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{10}{3}\alpha - 2,$$

a tedy

$$q_X(\alpha) = \frac{10}{3}\alpha - 2 \quad \text{pro} \quad \alpha \in (0.6,\ 0.9)\,.$$

Celkově tak máme

$$q_X(\alpha) = \begin{cases} -2 & , \ \alpha \in (0,\ 0.3) \\ 10\alpha - 5 & , \ \alpha \in \langle 0.3,\ 0.4) \\ -0.5 & , \ \alpha = 0.4 \\ 0 & , \ \alpha \in (0.4,\ 0.6) \\ \frac{10}{3}\alpha - 2 & , \ \alpha \in \langle 0.6,\ 0.9) \\ 1 & , \ \alpha \in \langle 0.9,\ 1). \end{cases}$$

Příklad 21: *Pravděpodobnost, že atlet v oddíle skočí do dálky přes 5m, je 0.7. V oddíle je 6 atletů.*

1. *Jaké rozdělení pravděpodobnosti má náhodná veličina X popisující, zda atlet skočil ($X = 1$) nebo neskočil ($X = 0$) přes 5m? Určete i střední hodnotu $\mathbb{E}X$ a rozptyl* $\operatorname{var} X$.
2. *Jaké rozdělení má náhodná veličina Y popisující počet atletů v oddíle, kteří skočili přes 5m? Určete i střední hodnotu $\mathbb{E}Y$ a rozptyl* $\operatorname{var} Y$.
3. *Jaká je pravděpodobnost, že přes 5m skočí v oddíle alespoň 4 atleti?*

Řešení:

1. $X \sim Alt(0.7)$, tj. $P(X = 1) = 0.7$ a $P(X = 0) = 0.3$.
   $\mathbb{E}X = 0.7$, $\operatorname{var} X = 0.7 \cdot 0.3 = 0.21$.
2. $Y \sim Binom(6, 0.7)$, tj. $P(Y = k) = \binom{6}{k} 0.7^k 0.3^{6-k}$ pro $k = 0, 1, ..., 6$.
   $\mathbb{E}Y = 6 \cdot 0.7 = 4.2$, $\operatorname{var} Y = 6 \cdot 0.7 \cdot 0.3 = 1.26$.
3. $P(Y \geq 4) = \sum_{k=4}^{6} \binom{6}{k} 0.7^k 0.3^{6-k} = \binom{6}{4} 0.7^4 0.3^2 + \binom{6}{5} 0.7^5 0.3^1 + \binom{6}{6} 0.7^6 0.3^0$.

Příklad 22: *Semena mají klíčivost $p \in (0, 1)$. Jaký je optimální počet n semen v jamce, aby byla co nejvyšší pravděpodobnost, že vyklíčí právě jedno? Řešte obecně a pro $p = 1/3$.*

Řešení:

Počet vyklíčených zrn má o binomické rozdělení $\mathrm{Bi}(n,p)$ a pro $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 1)$ nabývá hodnoty 1 s pravděpodobností

$$g(n) = \tbinom{n}{1}\, p^1\,(1-p)^{n-1} = n\,p\,(1-p)^{n-1}\,.$$

Taková funkce g je definovaná pro všechna kladná reálná n a je unimodální (do maxima rostoucí, pak klesající), takže maximum nastává v jediném bodě s nulovou derivací

$$g'(n) = p\,(1-p)^{n-1} + n\,p\,(1-p)^{n-1}\,\ln(1-p) = p\,(1-p)^{n-1}\big(1+n\,\ln(1-p)\big)\,.$$

Nulová může být pouze poslední závorka, a to pro

$$n = \frac{-1}{\ln(1-p)}\,.$$

Maximum v oboru přirozených čísel nastává pro jedno ze dvou celých čísel, která jsou nejblíže této hodnotě. Pro $p = 1/3$ je g' nulová v

$$n = \frac{-1}{\ln\dfrac{2}{3}} \doteq 2.466$$

tedy zde nastává maximum pro $n \in \{2,3\}$, a to pro obě hodnoty, neboť dosezením zjistíme, že

$$\binom{2}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(1-\frac{1}{3}\right)^{2-1} = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(1-\frac{1}{3}\right)^{3-1} = \frac{4}{9}.$$

Příklad 23: *Na látce (pevné šířky 1m) je průměrně jeden kaz na 10m délky. Předpokládáme, že počet kazů se řídí Poissonovým rozdělením. Jaká je pravděpodobnost, že na 50m délky látky bude*

1. *přesně 10 kazů,*
2. *maximálně 3 kazy,*
3. *přesně 5 kazů, z toho 4 na prvních 20m?*

Řešení:
Označme X náhodnou veličinu popisující počet kazů na 50m délky látky. Pak

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 0, 1, ...$$

a jelikož $\mathbb{E}X = 5 \Rightarrow \lambda = 5$. Tudíž

1. $P(X = 10) = \frac{5^{10}}{10!} e^{-5}$.

2. $P(X \leq 3) = e^{-5} \left(\frac{5^0}{0!} + \frac{5^1}{1!} + \frac{5^2}{2!} + \frac{5^3}{3!} \right)$.

3. Označme X_1 náhodnou veličinu popisující počet kazů na prvních 20m délky látky a X_2 náhodnou veličinu popisující počet kazů na zbylých 30m délky látky. Analogicky k předešlému

   $$P(X_1 = k) = \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1} \quad \text{a} \quad P(X_2 = k) = \frac{\lambda_2^k}{k!} e^{-\lambda_2},$$

   kde $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = 3$. Hledaná pravděpodobnost je tedy

   $$P(X_1 = 4, X_2 = 1) = P(X_1 = 4) P(X_2 = 1) = \frac{2^4}{4!} e^{-2} \frac{3^1}{1!} e^{-3} = 2e^{-5}.$$

   Pozn.: Náhodné veličiny X_1 a X_2 jsme zvolili tak, aby se jednalo o počty kazů na disjunktních intervalech, a tudíž aby tyto počty byly nezávislé, jinak bychom nemohli použít vztah $P(X_1 = 4, X_2 = 1) = P(X_1 = 4) P(X_2 = 1)$.

Příklad 24: *Pravděpodobnost narození chlapce je 0.51. Jaká je pravděpodobnost, že v dané porodnici dnes bylo nejpozději (v časovém pořadí) čtvrté narozené dítě holčička?*

Řešení:
Označme X náhodnou veličinu popisující počet narozených chlapců před první narozenou holčičkou. Pak

$$X \sim Geom(0.49), \text{ tj. } P(X = k) = 0.51^k \cdot 0.49, \ k = 0, 1, ...$$

Hledaná pravděpodobnost je tedy

$$P(X < 4) = \sum_{k=0}^{3} 0.51^k \cdot 0.49 = 0.49 \sum_{k=0}^{3} 0.51^k = 0.49 \cdot \frac{1 - 0.51^4}{1 - 0.51} = 1 - 0.51^4.$$

Jiný způsob výpočtu:
Označme Y náhodnou veličinu popisující počet narozených holčiček v prvních čtyřech narozených dětech. Pak

$$Y \sim Binom(4, 0.49), \text{ tj. } P(X = k) = \binom{4}{k} 0.49^k \cdot 0.51^{4-k}, \; k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Hledaná pravděpodobnost je tedy

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{4}{0} 0.49^0 \cdot 0.51^4 = 1 - 0.51^4.$$

Příklad 25: *Při numerickém výpočtu se reálná čísla zaokrouhlují na jedno desetinné místo. Jaká je pravděpodobnost, že vzdálenost skutečného čísla od zaokrouhleného bude větší než 0.04?*

Řešení:
Označme X náhodnou veličinu popisující rozdíl "skutečná - zaokrouhlená hodnota". Pak

$$X \sim Ro(-0.05, 0.05),$$

tj. X má hustotu $f(x) = 10$ pro $x \in (-0.05, 0.05)$ a $f(x) = 0$ jinde.
Hledaná pravděpodobnost je tedy

$$\begin{aligned} P(|X| > 0.04) &= 1 - P(|X| \leq 0.04) = 1 - P(-0.04 \leq X \leq 0.04) \\ &= 1 - \int_{-0.04}^{0.04} 10 dx = 0.2. \end{aligned}$$

Příklad 26: *Na zákaznickou linku přichází průměrně 12 hovorů za hodinu. Doba čekání na hovor má exponenciální rozdělení.*

1. *Jaká je pravděpodobnost, že nejbližší hovor přijde nejdříve za 10 minut?*

2. *Určete čas t takový, že nejbližší hovor přijde nejdříve za t minut s pravděpodobností 0.7.*

<u>Řešení:</u>

1. K úloze je možno přistupovat více způsoby. Např.

   (a) Označme X náhodnou veličinu popisující dobu čekání (v minutách) na nejbližší hovor. Pak

   $$X \sim Exp(1/5),$$

   tj. X má hustotu

   $$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{5}e^{-x/5} \quad x > 0 \\ &= 0 \quad x \leq 0. \end{aligned}$$

   a distribuční funkci

   $$\begin{aligned} F(x) &= 1 - e^{-x/5} \quad x > 0 \\ &= 0 \quad x \leq 0. \end{aligned}$$

   Hodnotu $1/5$ jsme získali z faktu, že pro $X \sim Exp(\lambda)$ je $\mathrm{E}X = 1/\lambda$ a přitom střední doba čekání na hovor je 5 minut.
   Hledaná pravděpodobnost je tedy

   $$P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - F(10) = 1 - (1 - e^{-10/5}) = e^{-2},$$

   kterou lze spočítat také pomocí integrálu z hustoty jako

   $$P(X > 10) = \int_{10}^{\infty} \frac{1}{5}e^{-x/5}dx = e^{-2}.$$

   (b) Označme Y náhodnou veličinu popisující počet hovorů během 10 minut. Pak

   $$Y \sim Po(2), \text{ tj. } P(Y = k) = \frac{2^k}{k!}e^{-2}, k = 0, 1, ...$$

   Hodnotu 2 jsme získali z faktu, že pro $Y \sim Po(\lambda)$ je $\mathrm{E}X = \lambda$ a přitom střední počet hovorů za 10 minut jsou 2.
   Hledaná pravděpodobnost je tedy

   $$P(Y = 0) = \frac{2^0}{0!}e^{-2} = e^{-2}.$$

2. Uvažujme opět X náhodnou veličinu popisující dobu čekání (v minutách) na nejbližší hovor. Pak

$$\begin{aligned} P(X > t) &= 0.7 \\ 1 - P(X \le t) &= 0.7 \\ 1 - F(t) &= 0.7 \\ 1 - (1 - e^{-t/5}) &= 0.7 \\ e^{-t/5} &= 0.7 \\ t &= -5 \ln 0.7 \\ t &= 1.78. \end{aligned}$$

Příklad 27: *Výška dětí v 1.třídě je náhodná veličina $X \sim N(130, 36)$. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybrané dítě bude*

1. *větší než 136 cm,*
2. *menší než 118 cm,*
3. *mít výšku mezi 127 a 133 cm?*

Řešení:
Označme Z náhodnou veličinu s normovaným normálním rozdělením, tj. $Z \sim N(0,1)$, a Φ její distribuční funkci, přičemž hodnoty $\Phi(x)$ pro různá kladná x lze vyčíst ze statistických tabulek a pro záporná x platí $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$. Pak

1.

$$\begin{aligned} P(X > 136) = P(\frac{X-130}{\sqrt{36}} > \frac{136-130}{\sqrt{36}}) = P(Z > 1) = 1 - P(Z \le 1) \\ = 1 - \Phi(1) = 1 - 0,8413 = 0,1587. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} P(X < 118) = P(\frac{X-130}{\sqrt{36}} < \frac{118-130}{\sqrt{36}}) = P(Z < -2) = \Phi(-2) \\ = 1 - \Phi(2) = 1 - 0,9772 = 0,0228. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
P(127 < X < 133) &= P\left(\frac{127-130}{\sqrt{36}} < \frac{X-130}{\sqrt{36}} < \frac{133-130}{\sqrt{36}}\right) \\
&= P(-0,5 < Z < 0,5) = P(Z < 0,5) - P(Z \leq -0,5) \\
&= \Phi(0,5) - \Phi(-0,5) = \Phi(0,5) - (1 - \Phi(0,5)) \\
&= 2\Phi(0,5) - 1 = 2 \cdot 0,6915 - 1 = 0,383.
\end{aligned}$$

Příklad 28: *Oštěpařky Anna a Barbora mají průměrně délky hodů* 67 *m, respektive* 75 *m, a směrodatné odchylky* 6 *m, respektive* 3 *m. Předpokládejme, že délky hodů mají nezávislá normální rozdělení. Spočtěte pravděpodobnost, že při jednom hodu hodí Anna dál než Barbora.*

Řešení:
Náhodná veličina A popisující délku hodu Anny má rozdělení $N(67, 36)$, B popisující délku hodu Barbory má rozdělení $N(75, 9)$, $A - B = A + (-1)B$ má tedy rozdělení $N(67 + (-1) \cdot 75, 36 + (-1)^2 \cdot 9) = N(-8, 45)$, tudíž kladných hodnot nabývá s pravděpodobností

$$\begin{aligned}
P(A - B > 0) &= P\left(\frac{A - B - (-8)}{\sqrt{45}} > \frac{0 - (-8)}{\sqrt{45}}\right) \doteq P(Z > 1,19) \\
&= 1 - P(Z \leq 1,2) = 1 - \Phi(1,19) = 1 - 0,883 = 0,117.
\end{aligned}$$

Příklad 29: *Délka hrany krychle je náhodná veličina* $X \sim Ro(1, 2)$. *Určete distribuční funkci náhodné veličiny* Y *popisující plochu povrchu této krychle.*

Řešení:
Pro distribuční funkci náhodné veličiny X platí

$$\begin{aligned}
F(x) &= 0 & x &< 1 \\
&= x - 1 & 1 \leq x &\leq 2 \\
&= 1 & x &> 2.
\end{aligned}$$

Pro distribuční funkci náhodné veličiny Y tak máme

$$G(y) = P(Y \leq y) = P(6X^2 \leq y) = P\left(X \leq \sqrt{\frac{y}{6}}\right) = F\left(\sqrt{\frac{y}{6}}\right),$$

tj.

$$\begin{aligned} G(y) &= 0 & y &< 6 \\ &= \sqrt{\frac{y}{6}} - 1 & 6 \leq y &\leq 24 \\ &= 1 & y &> 24. \end{aligned}$$

Příklad 30: *Průměrný počet zákazníků během dne v první prodejně je 20, ve druhé prodejně 25 (předpokládáme, že oba počty se řídí Poissonovým rozdělením). Odvoďte rozdělení počtu zákazníků v obou prodejnách dohromady.*

Řešení:
Označme
X počet zákazníků během dne v první prodejně,
Y počet zákazníků během dne ve druhé prodejně,
Z počet zákazníků během dne v obou prodejnách dohromady.
Pak

$$P(X = i) = \frac{20^i}{i!} e^{-20} \quad \text{a} \quad P(Y = j) = \frac{25^j}{j!} e^{-25}$$

Jelikož $Z = X + Y$, dostáváme

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= \sum_{i=0}^{k} P(X = i) P(Y = k - i) = \sum_{i=0}^{k} \frac{20^i}{i!} e^{-20} \frac{25^{k-i}}{(k-i)!} e^{-25} \\ &= e^{-45} \sum_{i=0}^{k} \frac{20^i}{i!} \frac{25^{k-i}}{(k-i)!} = e^{-45} \sum_{i=0}^{k} \frac{20^i}{i!} \frac{25^{k-i}}{(k-i)!} \frac{k!}{k!} \\ &= e^{-45} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} 20^i 25^{k-i} = e^{-45} \frac{45^k}{k!}, \end{aligned}$$

tj. $Z \sim Po(45)$.

Příklad 31: *Nechť* $X \sim Ro(0, 2)$ *a* $Y = X^2 + 1$.

1. *Sestrojte distribuční funkci náhodné veličiny* Y.
2. *Spočtěte* $cov(X, Y)$.

3. *Rozhodněte, zda jsou X a Y nezávislé? Proč?*

Řešení:

1. Pro distribuční funkci náhodné veličiny X platí

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 & x < 0 \\ &= \frac{x}{2} & 0 \le x \le 2 \\ &= 1 & x > 2. \end{aligned}$$

   Pro distribuční funkci náhodné veličiny Y tak máme

$$G(y) = P(Y \le y) = P(X^2 + 1 \le y) = P(X \le \sqrt{y-1}) = F(\sqrt{y-1}),$$

   tj.

$$\begin{aligned} G(y) &= 0 & y < 1 \\ &= \frac{\sqrt{y-1}}{2} & 1 \le y \le 5 \\ &= 1 & y > 5. \end{aligned}$$

2. Kovarianci vypočteme ze vztahu

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(X,Y) &= \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y = \mathbb{E}X(X^2+1) - \mathbb{E}X\mathbb{E}(X^2+1) \\ &= \mathbb{E}X^3 + \mathbb{E}X - \mathbb{E}X\mathbb{E}X^2 - \mathbb{E}X = \mathbb{E}X^3 - \mathbb{E}X\mathbb{E}X^2 : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X &= \int_0^2 x \cdot \frac{1}{2} dx = 1 \\ \mathbb{E}X^2 &= \int_0^2 x^2 \cdot \frac{1}{2} dx = \frac{4}{3} \\ \mathbb{E}X^3 &= \int_0^2 x^3 \cdot \frac{1}{2} dx = 2 \\ \operatorname{cov}(X,Y) &= 2 - 1 \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

3. Veličiny X a Y nejsou nezávislé $\Leftarrow \operatorname{cov}(X,Y) \neq 0$.

Příklad 32: *Sdružené pravděpodobnosti náhodných veličin X a Y jsou dány následující tabulkou:*

	X=0	*X=1*	*X=2*
Y=0	*1/4*	*1/8*	*0*
Y=1	*1/4*	*1/4*	*1/8*

1. *Jaká jsou jejich marginální rozdělení?*
2. *Určete varianční a korelační matici.*
3. *Jsou veličiny X a Y nezávislé? Zdůvodněte.*

Řešení:

1. Rozdělení vektoru X je

$$
\begin{aligned}
P(X=0) &= P(X=0, Y=0) + P(X=0, Y=1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \\
P(X=1) &= P(X=1, Y=0) + P(X=1, Y=1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}, \\
P(X=2) &= P(X=2, Y=0) + P(X=2, Y=1) = \frac{1}{8} + 0 = \frac{1}{8}.
\end{aligned}
$$

Rozdělení vektoru Y je analogicky

$$
\begin{aligned}
P(Y=0) &= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + 0 = \frac{3}{8}, \\
P(Y=1) &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}.
\end{aligned}
$$

2. Kovarianci vypočteme ze vztahu $\operatorname{cov}(X,Y) = \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}X =& 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{8} \\
\mathbb{E}Y =& 0 \cdot \frac{3}{8} + 1 \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{8} \\
\mathbb{E}XY =& 0 \cdot 0 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \\
\operatorname{cov}(X,Y) =& \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y = \frac{1}{2} - \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{7}{64}.
\end{aligned}
$$

Pro rozptyly dopočítáme

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X^2 =& 0^2 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 \cdot \frac{3}{8} + 2^2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{7}{8},\\
\mathbb{E}Y^2 =& 0^2 \cdot \frac{3}{8} + 1^2 \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{8},\\
\mathrm{var}\ X =& \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{7}{8} - \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{31}{64},\\
\mathrm{var}\ Y =& \mathbb{E}Y^2 - (\mathbb{E}Y)^2 = \frac{5}{8} - \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{15}{64}.
\end{aligned}$$

Varianční matice je tudíž

$$\mathrm{Var}(X,Y) = \begin{pmatrix} \frac{31}{64} & \frac{7}{64} \\ \frac{7}{64} & \frac{15}{64} \end{pmatrix}.$$

Korelaci X a Y spočteme jako

$$\mathrm{corr}(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{var}\ X}\sqrt{\mathrm{var}\ Y}} = \frac{7/64}{\sqrt{31/64}\sqrt{15/64}} = \frac{7}{\sqrt{465}},$$

tudíž korelační matice je

$$\mathrm{Corr}(X,Y) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{\sqrt{465}} \\ \frac{7}{\sqrt{465}} & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Veličiny X a Y nejsou nezávislé. Důvod je buď fakt, že $\mathrm{cov}(X,Y) \neq 0$, nebo také např.

$$P(X=0,Y=0) = \frac{1}{4} \neq P(X=0)P(Y=0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8}.$$

(Pozn.: Aby byly nezávislé, muselo by platit
$P(X=i,Y=j) = P(X=i)P(Y=j)$, $\forall i,j$.)

Příklad 33: *Sdružená hustota náhodných veličin X a Y je*

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x-\frac{y}{2}}\,, & x>0, y>0\,,\\ 0\,, & \textit{jinak}. \end{cases}$$

1. *Jaká jsou jejich marginální rozdělení?*

2. *Jsou veličiny X a Y nezávislé? Zdůvodněte.*

3. *Určete varianční a korelační matici.*

<u>Řešení:</u>

1. Marginální hustoty jsou

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \\ &= \int_0^{\infty} \tfrac{1}{2}e^{-x-\frac{y}{2}}dy = \tfrac{1}{2}e^{-x}\cdot[-2e^{-\frac{y}{2}}]_0^{\infty} = e^{-x} \text{ pro } x>0 \text{ a } 0 \text{ jinak.} \\ f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = \\ &= \int_0^{\infty} \tfrac{1}{2}e^{-x-\frac{y}{2}}dx = \tfrac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}\cdot[-e^{-x}]_0^{\infty} = \tfrac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} \text{ pro } y>0 \text{ a } 0 \text{ jinak.} \end{aligned}$$

2. Složky jsou nezávislé právě tehdy, když $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y), \forall x,y$, což podle bodu 1. platí.

3. Jelikož $X \sim Exp(1)$ a $Y \sim Exp(1/2) \Rightarrow \text{var}\, X = 1$ a $\text{var}\, Y = 4$. Z nezávislosti X,Y plyne okamžitě $\text{cov}(X,Y) = 0 \Rightarrow \text{corr}(X,Y) = 0 \Rightarrow$

$$\text{Var}_{(X,Y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

a

$$\text{Corr}_{(X,Y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 34: *V lese se narodí průměrně 4 zajíci denně. Předpokládejme, že počet narozených zajíců se řídí Poissonovým rozdělením. Jaká je pravděpodobnost, že v následujících 7 týdnech se v lese narodí alespoň 175 zajíců?*

<u>Řešení:</u>
K řešení použijeme centrální limitní větu, která říká, že máme-li velké n, pak

pro X_i, $i = 1, 2, ..., n$ i.i.d. náhodné veličiny platí

$$P(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mathbb{E}X_1}{\sqrt{n\text{var } X_1}} \leq a) \doteq \Phi(a).$$

Označme X_i počet narozených zajíců v $i-$tý den. Pak $X_i \sim Po(4) \Rightarrow \mathbb{E}X_1 = 4$ a var $X_1 = 4$. Dále označme

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^{49} X_i - 49 \cdot 4}{\sqrt{49 \cdot 4}}$$

Chceme počítat

$$\begin{aligned} P(\sum_{i=1}^{49} X_i \geq 175) &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{49} X_i - 49 \cdot 4}{\sqrt{49 \cdot 4}} \geq \frac{175 - 49 \cdot 4}{\sqrt{49 \cdot 4}}\right) = P(Z \geq -1,5) \\ &= 1 - P(Z < -1,5) \doteq 1 - \Phi(-1,5) = 1 - (1 - \Phi(1,5)) \\ &= \Phi(1,5) = 0,9332. \end{aligned}$$

Příklad 35: *Tramvaj má intervaly mezi příjezdy 10 minut. Jaká je pravděpodobnost, že během 24 pracovních dnů stráví člověk při cestách do práce a zpět čekáním na tramvaj nejvýše tři hodiny?*

Řešení:
K řešení opět použijeme centrální limitní větu. Označme X_i dobu strávenou čekáním při $i-$té cestě. Pak $X_i \sim Ro(0, 10) \Rightarrow \mathbb{E}X_1 = 5$ a var $X_1 = \frac{25}{3}$. Dále označme

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^{48} X_i - 48 \cdot 5}{\sqrt{48 \cdot \frac{25}{3}}}.$$

Chceme počítat

$$\begin{aligned} P(\sum_{i=1}^{48} X_i \leq 180) &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{48} X_i - 48 \cdot 5}{\sqrt{48 \cdot \frac{25}{3}}} \leq \frac{180 - 48 \cdot 5}{\sqrt{48 \cdot \frac{25}{3}}}\right) = P(Z \leq -3) \doteq \\ &\doteq \Phi(-3) = 1 - \Phi(3) = 1 - 0,9987 = 0,0013. \end{aligned}$$

Příklad 36: *Letecká společnost prodává letenky a chce co nejvíce utržit. Letadlo má* 216 *míst, ale ví se, že zhruba* 5% *lidí se k odletu nedostaví.*

1. *Jaká je pravděpodobnost, že pokud společnost prodá 220 letenek, nepřesáhne počet cestujících kapacitu letadla?*

2. *Kolik může společnost prodat letenek na jeden let, chce-li držet pravděpodobnost, že nepřesáhne kapacitu, kolem 90%?*

Řešení:

K řešení opět použijeme centrální limitní větu. Označme $X_i = 1$, pokud se cestující k odletu dostaví, a $X_i = 0$, pokud se cestující k odletu nedostaví. Pak $X_i \sim Alt(0.95) \Rightarrow \mathbb{E}X_1 = 0.95$ a $\operatorname{var} X_1 = 0.95 \cdot 0.05$.

1. Dále označme
$$Z = \frac{\sum_{i=1}^{220} X_i - 220 \cdot 0.95}{\sqrt{220 \cdot 0.95 \cdot 0.05}}.$$
Pak
$$P(\sum_{i=1}^{220} X_i \leq 216) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{220} X_i - 220 \cdot 0.95}{\sqrt{220 \cdot 0.95 \cdot 0.05}} \leq \frac{216 - 220 \cdot 0.95}{\sqrt{220 \cdot 0.95 \cdot 0.05}}\right) \doteq$$
$$= P(Z \leq 2.17) \doteq \Phi(2.17) \doteq 0.985.$$

2. Nyní označme
$$Z = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n \cdot 0.95}{\sqrt{n \cdot 0.95 \cdot 0.05}}.$$
Chceme
$$P\left(\sum_{i=1}^{220} X_i \leq 216\right) \doteq 0.9.$$
Tedy
$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n \cdot 0.95}{\sqrt{n \cdot 0.95 \cdot 0.05}} \leq \frac{216 - n \cdot 0.95}{\sqrt{n \cdot 0.95 \cdot 0.05}}\right) =$$
$$= P\left(Z \leq \frac{216 - n \cdot 0.95}{\sqrt{n \cdot 0.95 \cdot 0.05}}\right) = \Phi\left(\frac{216 - n \cdot 0.95}{\sqrt{n \cdot 0.95 \cdot 0.05}}\right) \doteq 0.9.$$

A tedy
$$\frac{216 - n \cdot 0.95}{\sqrt{n \cdot 0.95 \cdot 0.05}} \doteq \Phi^{-1}(0.9) \doteq 1.28 \Rightarrow n \doteq 223.$$

Příklad 37: *Uvažujme následující data:*

1. *počty jistých rostlin na ploše 1 m^2: 0, 2, 1, 4, 4, 5, 2, 3, 7;*
2. *časy (v sekundách) mezi impulzy v mozku: 4.25, 0.65, 1.35, 0.20, 0.55, 6.63, 1.38, 0.22, 0.27;*
3. *venkovní teploty naměřené v různých letech při pravidelné podzimní akci: 8.07, 19.23, 9.27, 5.71, 12.62, 11.24, 11.92, 17.30, 14.87.*

Nakreslete pro tato data

1. *histogramy*
2. *boxploty*
3. *empirickou distribuční funkci*

a odhadněte, z jakého rozdělení mohou tato data pocházet. Řádně zdůvodněte.

Příklad 38: *Počet kazů na tabulkách skla se řídí Poissonovým rozdělením. Bylo pozorováno*

17	*tabulek*	*bez kazu*
4	*tabulky*	*s 1 kazem*
1	*tabulka*	*s 2 kazy*
2	*tabulky*	*s 3 kazy*
1	*tabulka*	*s 5 kazy.*

Metodou momentů a metodou maximální věrohodnosti určete parametr λ tohoto Poissonova rozdělení.

Řešení:
Metoda momentů:
Pro náhodnou veličinu $X \sim Pois(\lambda)$ je $\mathbb{E}X = \lambda$.
Zároveň je $\bar{x} = \frac{17 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 5}{17+4+1+2+1} = \frac{17}{25}$.
Tedy $\hat{\lambda} = \frac{17}{25}$.

Metoda maximální věrohodnosti:
Pro náhodnou veličinu $X \sim Pois(\lambda)$ je $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.
Věrohodnostní funkce je

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} = \left(\frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda}\right)^{17} \left(\frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda}\right)^{4} \left(\frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda}\right)^{1} \left(\frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda}\right)^{2} \left(\frac{\lambda^5}{5!} e^{-\lambda}\right)^{1} =$$
$$= \frac{\lambda^{17}}{1440} e^{-25\lambda}.$$

Logaritmicko-věrohodnostní funkce je

$$l(\lambda) = \log L(\lambda) = 17 \log \lambda - 25\lambda - \log 1440.$$

Její derivace je
$$\frac{\partial l(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{17}{\lambda} - 25.$$

Řešením tedy je
$$\frac{17}{\hat{\lambda}} - 25 = 0 \Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{17}{25}.$$

Příklad 39: *Doba do poruchy starého výtahu má exponenciální rozdělení. Bylo zjištěno, že se výtah porouchal postupně za 4 dny, 7 dní, 12 dní, 2.5 dne a 24.5 dne. Metodou momentů a metodou maximální věrohodnosti určete parametr λ tohoto exponenciálního rozdělení.*

Řešení:
Metoda momentů:
Pro náhodnou veličinu $X \sim Exp(\lambda)$ je $\mathbb{E}X = \frac{1}{\lambda}$.
Zároveň je $\bar{x} = \frac{4+7+12+2.5+24.5}{5} = 10$.
Tedy $\hat{\lambda} = \frac{1}{10}$.

Metoda maximální věrohodnosti: Pro náhodnou veličinu s rozdělením $Exp(\lambda)$ je $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ pro $x > 0$.
Věrohodnostní funkce je

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda e^{-\lambda \cdot 4} \lambda e^{-\lambda \cdot 7} \lambda e^{-\lambda \cdot 12} \lambda e^{-\lambda \cdot 2.5} \lambda e^{-\lambda \cdot 24.5} = \lambda^5 e^{-\lambda \cdot 50}.$$

Logaritmicko-věrohodnostní funkce je

$$l(\lambda) = \log L(\lambda) = 5 \log \lambda - 50\lambda.$$

Její derivace je

$$\frac{\partial l(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{5}{\lambda} - 50.$$

Řešením tedy je

$$\frac{5}{\lambda} - 50 = 0 \Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{1}{10}.$$

Příklad 40: *V krabici máme hrací kostky, některé jsou v pořádku a některé falešné. Na falešných padá šestka s pravděpodobností 1/2, zbývající čísla mají stejnou pravděpodobnost. Opakovaně jsme vytáhli kostku, hodili jí a vrátili ji zpět. Četnost výsledků byla:*

hodnota i	1	2	3	4	5	6
četnost n_i	18	20	12	15	10	25

1. *Odhadněte, kolik procent kostek je falešných,*
   (a) *metodou momentů ,*
   (b) *metodou maximální věrohodnosti.*
2. *Okomentujte stručně, co bychom dostali metodou momentů, kdybychom měli napozorované hodnoty:*

hodnota i	1	2	3	4	5	6
četnost n_i	18	20	12	15	15	20

Příklad 41: *U 64 praktických lékařů byl naměřen výběrový průměr počtu pacientů za den 23, výběrový rozptyl pak byl roven 36, rozdělení počtu pacientů není známé.*

1. *Sestrojte (asymptotický) 95% interval spolehlivosti pro střední hodnotu počtu pacientů.*
2. *Otestujte (pomocí intervalu spolehlivosti) na hladině 5%, zda skutečná střední hodnota počtu pacientů za den může být považována za rovnu 25.*

Příklad 42: *Výrobce tvrdí, že spotřeba jím vyráběného automobilu je 8 l/100km. Průměrná spotřeba u 49 uživatelů ale byla 8.4 l/100km. Naměřen byl dále výběrový rozptyl 2.56. Testujte na hladině 5%, zda měl výrobce pravdu.*

Příklad 43: *Na 100 osobách byla pozorována barva očí a vlasů. Naměřeny byly následující sdružené četnosti:*

oči / vlasy	tmavé	světlé
modré	10	20
zelené/šedé	10	10
hnědé	40	10

Jsou barvy očí a vlasů nezávislé? Testujte na hladině 5%.

Příklad 44: *Firma má tři pobočky. Dva roky bylo sledováno, která z nich zaznamenala nejvyšší měsíční výnos. Bylo zjištěno, že nejvýnosnější byla první pobočka desetkrát, druhá šestkrát a třetí osmkrát. Je možné říct, že první pobočka je nejvýnosnější dvakrát častěji než zbylé dvě? Testujte na hladině 5%.*

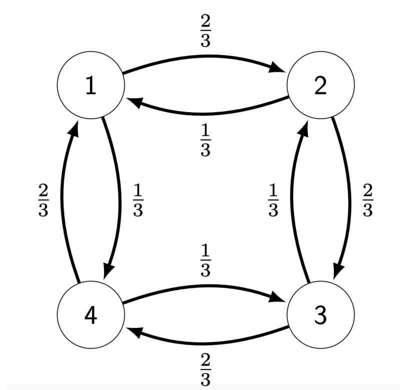
Příklad 45: *Pro pojištění motorových vozidel používá pojišťovna tři kategorie pojistného:*
1 - základní pojistné,
2 - bonus 30%,
3 - bonus 50%.
V prvním roce platí pojištěný základní pojistné. Jestliže má rok bezeškodní průběh, je pojištěný v dalším roce zařazen o třídu výše (pokud je to možné),

pokud ale uplatní jeden pojistný nárok, je v příštím roce zařazen o kategorii níže (pokud je to možné) a při uplatnění více než jednoho nároku o dvě kategorie níže (pokud je to možné). Počty výskytů pojistné události v jednotlivých letech jsou nezávislé, stejně rozdělené náhodné veličiny s Poissonovým rozdělením s parametrem λ.

1. *Určete počáteční rozdělení a matici pravděpodobností přechodu.*

2. *Najděte stacionární rozdělení pro případ, kdy každý řidič hlásí škodu průměrně jednou za 10 let (hodnoty v matici pravděpodobností přechodu zaokrouhlete na jedno desetinné místo, resp. dvě desetinná místa na pozicích $p_{3,1}$ a $p_{3,2}$).*

Příklad 46: *Markovský řetězec je dán grafem:*



1. *Napište matici pravděpodobností přechodu, klasifikujte stavy a stanovte všechny komponenty.*

2. *Stanovte pravděpodobnosti přechodu ze stavu* 1 *do stavu* 4 *po právě* 3 *krocích.*

3. *Popište markovský řetěz, který vznikne aplikováním d kroků, kde d je perioda původních stavů.*

4. *Najděte stacionární rozdělení.*

5. *Konverguje rozdělení stavů ke stacionárnímu? Za jakých podmínek? Odůvodněte.*

6. *Stanovte rozdělení pravděpodobností stavů po 1000 krocích, pokud jsme vyšli ze stavu 1.*

Příklad 47: *Markovský řetězec má matici pravděpodobností přechodu*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/5 & 4/5 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

1. *Klasifikujte všechny stavy.*
2. *Najděte všechny uzavřené množiny stavů.*
3. *Najděte všechna stacionární rozdělení pravděpodobností a posuďte, zda řetězec k některému z nich konverguje.*
4. *Odhadněte stav ve výchozím čase t, víte-li, že v čase $t+2$ byl řetězec ve stavu 2.*

Příklad 48: *Z pozorované posloupnosti stavů $(2, i, k, 3)$ odhadněte stavy i a k markovského řetězce s maticí pravděpodobností přechodu*

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Příklad 49: *Markovský řetězec má dva stavy 1 a 2. Pravděpodobnost přechodu ze stavu 1 do stavu 2 je p, pravděpodobnost přechodu ze stavu 2 do stavu 1 je q. Z pozorované posloupnosti stavů*

$$(1, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$$

odhadněte parametry p, q.

Příklad 50: *Alice trefí terč s pravděpodobností 1/3, Bob s pravděpodobností 1/2. Pokud hráč zasáhne terč, střílí dále, pokud mine, je na řadě druhý hráč. Začíná Alice. Alice vyhrává, pokud trefí terč 2× za sebou, Bob vyhrává, pokud trefí terč 3× za sebou. Pro oba hráče stanovte pravděpodobnosti výhry.*