

Pravděpodobnost a statistika - ukázková zkoušková písemka

Jméno a příjmení	1	2	3	4	celkem	známka

Úloha 1. Zákaznické centrum má otevřeno každý den od 8.00 do 18.00. Zákazníci přicházejí nezávisle na sobě, přičemž v průměru přichází 200 zákazníků denně (předpokládejme, že intenzita příchodů zákazníku je během dne konstantní) a dvě pětiny z toho jsou ženy.

- Jaká je pravděpodobnost, že na prvního zákazníka budeme čekat aspoň 10 minut?
- Jaká je pravděpodobnost, že mezi dvanáctou a druhou hodinou dorazí právě 42 zákazníků?
- Jaká je pravděpodobnost, že po 17:45 dorazí maximálně dva zákazníci a oba to budou muži?
- Jaká je pravděpodobnost, že mezi prvními pěti zákazníky v daný den nebude ani jeden muž?
- Jaký je rozptyl počtu zákazníků, kteří navštíví zákaznické centrum během dne?

Úloha 2. Uvažujme speciální střeleckou soutěž: Y značí počet pokusů, které má střelec v jednom kole, přičemž předpokládejme, že Y je náhodné s binomickým rozdělením $Bi(2, \frac{1}{2})$ (tj. střelec má v každém kole buď žádný, jeden nebo dva pokusy). Střelec má v každém pokusu úspěšnost $\frac{1}{3}$, tj. pokud vystřelí, pak s pravděpodobností $\frac{1}{3}$ trefí terč. Označme $X = 1$, pokud střelec v daném kole trefil alespoň jednou terč, a $X = 0$, pokud střelec v daném kole netrefí terč ani jednou.

- Určete sdružené rozdělení vektoru (X, Y) .
- Určete rozdělení náhodné veličiny X , tedy pravděpodobnost, že v daném kole střelec trefí alespoň jednou terč, a pravděpodobnost, že střelec v daném kole terč netrefí.
- Určete pravděpodobnost $P(Y = 2|X = 1)$, tj. pravděpodobnost, že střelec střílel v daném kole dvakrát, za předpokladu, že v tomto kole trefil terč.
- Určete podmíněnou pravděpodobnost $P(X = 1|Y = 1)$ a $P(X = 1|Y = 2)$.
- Spočtěte kovarianci $cov(X, Y)$.

Úloha 3. Po nějakou dobu byly sledovány doby do poruchy přístroje. Naměřená data jsou uvedena v následující tabulce:

11,5	13	25	6,5	42	6,5	30	9,5
------	----	----	-----	----	-----	----	-----

- Nakreslete empirickou distribuční funkci.
- Nakreslete histogram a krabicový graf.
- Vypočítejte výběrový průměr a výběrový rozptyl.
(hint: $\sum x_i = 144$, $\sum (x_i - \bar{x})^2 = 1173$)
- Z jakého ze známých rozdělení mohou data pocházet? Zdůvodněte.
- Metodou maximální věrohodnosti odhadněte parametr tohoto rozdělení.

Úloha 4. Pekárna v Liberci má tři prodejny. Každý týden se sleduje, která z prodejen má největší tržbu, a ta je pak vyhlášena prodejnou týdne. V následující tabulce je uvedeno, kolikrát byly během cca 14 měsíců jednotlivé prodejny vyhlášeny prodejnou týdne.

prodejna A	prodejna B	prodejna C
12	28	20

- Otestujte na hladině 5% hypotézu, že všechny prodejny jsou stejně úspěšné.
- Pokud jste v příkladu a) hypotézu zamítli, uveďte příklad hladiny, na níž bychom nezamítali. Pokud jste v příkladu a) hypotézu nezamítli, uveďte příklad hladiny, na níž bychom zamítali.
- Za předpokladu, že jsou prodejny stejně úspěšné, jaké má rozdělení náhodná veličina X určující, kolikrát byla prodejna A označena za prodejnu týdne?
- Označme Y náhodnou veličinu určující, kolikrát byla prodejna B označena za prodejnu týdne. Jsou náhodné veličiny X a Y nezávislé?
- Definujte 0,7-quantil spojité náhodné veličiny X .