Úloha 1.

a) Označme X náhodnou veličinu popisující počet zákazníků během deseti minut. Pak

$$X \sim Po(\frac{10}{3}) \Rightarrow P(X=0) = \frac{(\frac{10}{3})^0}{0!} e^{-\frac{10}{3}} = e^{-\frac{10}{3}}.$$

Nebo jinak: Označme Y náhodnou veličinu popisující dobu čekání na zákazníka (v minutách). Pak

$$Y \sim Exp(\frac{1}{3}) \Rightarrow P(Y > 10) = \int_{10}^{\infty} \frac{1}{3} e^{-\frac{x}{3}} dx = e^{-\frac{10}{3}},$$

popř.

$$P(Y > 10) = 1 - P(Y \leq 10) = 1 - F_Y(10) = 1 - (1 - e^{-\frac{10}{3}}) = e^{-\frac{10}{3}}.$$

b) Označme Z náhodnou veličinu popisující počet zákazníků během dvou hodin. Pak

$$Z \sim Po(40) \Rightarrow P(Z=42) = \frac{40^{42}}{42!} e^{-40}.$$

c) Označme X_1, resp. X_2, náhodnou veličinu popisující počet mužů, resp. žen, během patnácti minut. Pak

$$X_1 \sim Po(3), X_2 \sim Po(2) \Rightarrow$$

$$P(X_1 \leq 2, X_2 = 0) = P(X_1 \leq 2) P(X_2 = 0) = (\frac{3^0}{0!} e^{-3} + \frac{3^1}{1!} e^{-3} + \frac{3^2}{2!} e^{-3}) \cdot \frac{2^0}{0!} e^{-2} = 8,5 e^{-5}.$$

d) Označme U náhodnou veličinu popisující počet mužů v prvních pěti zákaznících. Pak

$$U \sim Bi(5; 0,6) \Rightarrow P(U=0) = \binom{5}{0} 0,6^0 \cdot 0,4^5 = 0,4^5.$$

Nebo jinak: Označme V náhodnou veličinu popisující počet příchozích žen před prvním příchozím mužem. Pak

$$V \sim Geom(0,6) \Rightarrow P(V \geq 5) = 1 - P(V \leq 4) = 1 - \sum_{k=0}^{4} 0,4^k \cdot 0,6 = 1 - 0,6 \cdot \frac{1 - 0,4^5}{1 - 0,4} = 0,4^5.$$

e) Označme W náhodnou veličinu popisující počet zákazníků za den. Pak

$$W \sim Po(200) \Rightarrow \mathrm{var} W = \mathrm{E} W = 200.$$

Úloha 2.

a)

$X \mid Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$

b)

$$P(X=0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{25}{36},$$

$$P(X=1) = 0 + \frac{1}{6} + \frac{5}{36} = \frac{11}{36}.$$

c) Pro jevy A a B takové, že $P(B) > 0$, je podmíněná pravděpodobnost definovaná jako

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Tedy

$$P(X=1|Y=1) = \frac{P((X=1) \cap (Y=1))}{P(Y=1)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3},$$

$$P(X=1|Y=2) = \frac{P((X=1) \cap (Y=2))}{P(Y=2)} = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{1}{4}} = \frac{5}{9}.$$

d)

$$P(Y=2|X=1) = \frac{P((X=1) \cap (Y=2))}{P(X=1)} = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{11}{36}} = \frac{5}{11}.$$

e)

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \mathrm{E}XY - \mathrm{E}X\mathrm{E}Y.$$

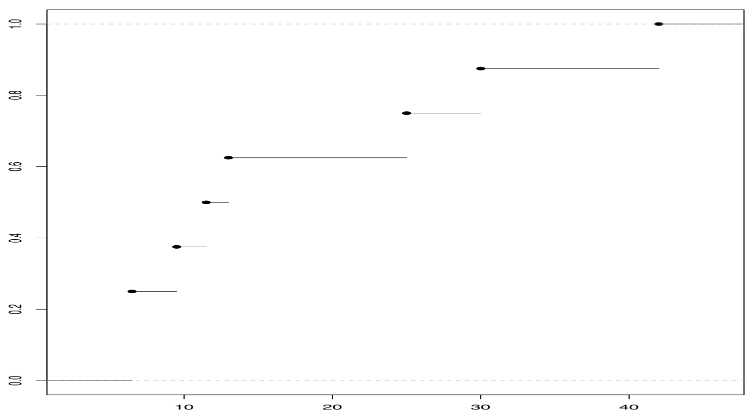
$$\mathrm{E}XY = 0 \cdot 0 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} + \ldots + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{5}{36} = \frac{4}{9},$$

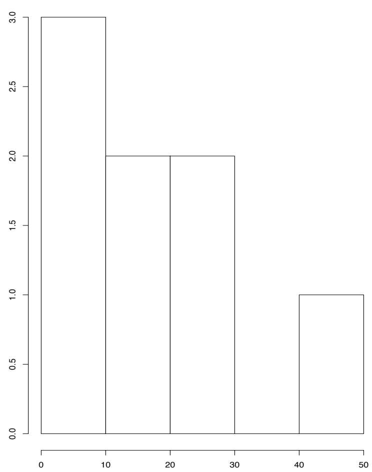
$$\mathrm{E}X = 0 \cdot \frac{25}{36} + 1 \cdot \frac{11}{36} = \frac{11}{36},$$

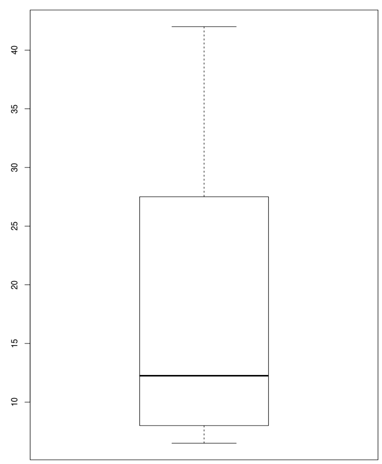
$$\mathrm{E}Y = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1,$$

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \frac{4}{9} - \frac{11}{36} \cdot 1 = \frac{5}{36}.$$

Úloha 3. a) a b)







c)

$$X_8 = \frac{1}{8}(11.5 + 13 + ... + 9.5) = \frac{144}{8} = 18,$$

$$S_8^2 = \frac{1}{7}((11,5-18)^2 + (13-18)^2 + ... + (9,5-18)^2) = \frac{1173}{7} \doteq 167,6.$$

d) Z histogramu lze usoudit, že data pocházejí z exponenciálního rozdělení.

e) $X \sim Exp(\lambda) \Rightarrow f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ pro $x > 0$.

$$L(\lambda) = \lambda e^{-11.5\lambda} \cdot \lambda e^{-13\lambda} \cdot ... \cdot \lambda e^{-9.5\lambda} = \lambda^8 e^{-144\lambda}$$

$$l(\lambda) = \ln L(\lambda) = 8 \ln \lambda - 144\lambda$$

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda} = \frac{8}{\lambda} - 144 = 0 \Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{1}{18}.$$

Úloha 4.

a) Použijeme χ^2-test dobré shody.
Označme p_i, $i = A, B, C$, pravděpodobnost, že prodejna i je prodejnou týdne.
Testujeme na hladině 5% hypotézu $H_0 : p_A = p_B = p_C = \frac{1}{3}$ proti H_A : aspoň jedno p_i je jiné.

1. Spočteme
$$\chi^2 = \frac{(12 - 60 \cdot \frac{1}{3})^2}{60 \cdot \frac{1}{3}} + \frac{(28 - 60 \cdot \frac{1}{3})^2}{60 \cdot \frac{1}{3}} + \frac{(20 - 60 \cdot \frac{1}{3})^2}{60 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{64}{20} + \frac{64}{20} + 0 = 6,4.$$
2. Jelikož $\chi^2 = 6,4 > 5,99 = \chi^2_{2,0.95}$, hypotézu H_0 zamítáme ve prospěch H_A.

b) Jelikož např. $\chi^2_{2,0.99} = 9,21 > 6,4$, znamená to, že na hladině 1% bychom již H_0 ve prospěch H_A nezamítali.

c) Jedná se o počet úspěchů z 60 pokusů, přičemž pravděpodobnost úspěchu v každém pokudu je 1/3, tj. $X \sim Bi(60, \frac{1}{3})$.

d) Nejsou nezávislé, protože např.
$$P(X = 60) = \binom{60}{60}\left(\frac{1}{3}\right)^{60}\left(\frac{2}{3}\right)^{0} \neq 0, \; P(Y = 60) = \binom{60}{60}\left(\frac{1}{3}\right)^{60}\left(\frac{2}{3}\right)^{0} \neq 0$$
$$\Rightarrow P(X = 60) \cdot P(Y = 60) \neq 0, \text{ ale } P(X = 60, Y = 60) = 0.$$

e) Označme F distribuční funkci náhodné veličiny X. Pak 0,7-kvantil je hodnota a taková, že $F(a) = 0,7$.
Nebo jinak: Označme f hustotu náhodné veličiny X. Pak 0,7-kvantil je hodnota a taková, že $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = 0,7$.