Pravděpodobnost a statistika - zkoušková písemka 4.6.2020

Jméno a příjmení	1	2	3	celkem	známka

Úloha 1. (celkem 60 bodů)
Velké mezinárodní regaty (závod lodí) se účastní pětičlenné posádky, které plují buď na plachetnici nebo na katamaránu. Posádek plachetnic je dvakrát více než posádek katamaránů. Závody obou plavidel jsou rozděleny na čtyři kategorie: profesionály, pokročilé, začátečníky a amatéry. Zatímco poměr posádek katamaránů v těchto kategoriích je 2:1:1:1, u plachetnic je to 1:2:3:4. Na závěrečném rautu si účastníci chodí k číšníkům pro sklenice s pitím (zcela rovnoměrně a nezávisle na sobě). Jeden z číšníků zjistil, že tác s 15 sklenicemi rozdá průměrně za 5 minut. Určete pravděpodobnost, že

a) náhodně vybraný závodník je pokročilý nebo profesionál, (5 bodů)

b) náhodně vybraný závodník je profesionál z katamaránu, (5 bodů)

c) náhodně vybraný závodník z katamaránu je profesionál, (5 bodů)

d) během dvou minut si u číšníka vyzvednou nápoj alespoň tři závodníci, (7 bodů)

e) během dvou minut si u číšníka vyzvednou nápoj alespoň tři začátečníci, (7 bodů)

f) nejpozději čtvrtý závodník, který odejde na toaletu, bude člen posádky katamaránu, (7 bodů)

g) z 50 náhodně vybraných závodníků je alespoň 30 členů posádek plachetnic (řešte pomocí CLV; 10 bodů).

h) Uvažujme náhodné veličiny X a Y, kde $X = 0$, je-li náhodně vybraný závodník z katamaránu, $X = 1$, je-li náhodně vybraný závodník z plachetnice, $Y = 0$, je-li náhodně vybraný závodník amatér nebo začátečník a $Y = 1$, je-li náhodně vybraný závodník pokročilý nebo profesionál.

   (i) Spočtěte korelaci $corr(X, Y)$. (7 bodů)

   (ii) Rozhodněte, zda jsou X a Y nezávislé, a své rozhodnutí zdůvodněte. (7 bodů)

Úloha 2. (celkem 25 bodů)
V krabici jsou červené, modré a bílé kuličky, které jsou buď duté nebo vyplněné. Z krabice vždy můžeme vytáhnout jen jednu kuličku, zjistit její parametry a před vytažením další kuličky ji musíme vrátit zpět. 100× jsme vytáhli kuličku a vypozorovali následující parametry:

	červená	modrá	bílá
dutá	10	10	20
prázdná	10	20	30

a) Víme, že podíly červených, modrých a bílých kuliček jsou $a-b$, a, resp. $a+b$. S využitím metody maximální věrohodnosti odhadněte parametry a a b. (10 bodů)
(hint: Nejprve s využitím vlastností pravděpodobnosti přímo určete a a potom metodou MMV odhadněte b)

b) Na hladině 5% statisticky otestujte, zda můžeme považovat to, zda je kulička dutá nebo vyplněná, za nezávislé na barvě kuličky. (8 bodů)

c) Na hladině 1% statisticky otestujte, zda je dutých a vyplněných kuliček v krabici stejný počet. (7 bodů)

Úloha 3. (celkem 15 bodů)
Uvažujte realizaci $x_1, \ldots, x_{16}$ náhodného výběru $X_1, \ldots, X_{16}$ z normálního rozdělení $\sum_{i=1}^{16} x_i = 1584$ a $\sum_{i=1}^{16}(x_i - \bar{x})^2 = 60$. Statisticky otestujte na hladině 5%, zda je možné říct, že $\mathbf{E}X_1 = 100$, proti alternativní hypotéze, že

a) $\mathbf{E}X_1 \neq 100$, (7 bodů)

b) $\mathbf{E}X_1 < 100$. (8 bodů)