Pravděpodobnost a statistika - zkoušková písemka 8.9.2020

Jméno a příjmení	1	2	3	celkem	známka

Úloha 1. (celkem 60 bodů)
Maturitního plesu se účastní maturanti, jejich profesoři a doprovodné osoby (rodiče, partneři, přátelé apod.) v poměru 3:1:4, přičemž mezi maturanty je stejně mužů a žen, mezi profesory je mužů 70% a z doprovodných osob tvoří muži 1/4. Během večera číšníci nabízejí účastníkům sklenice s pitím, ty si účastnící plesu berou nezávisle na sobě. Jeden z číšníků zjistil, že tác s 25 sklenicemi rozdá průměrně za 15 minut. Určete pravděpodobnost, že

a) náhodně vybraný účastník plesu je muž, (5 bodů)

b) náhodně vybraný účastník plesu je muž - profesor, (5 bodů)

c) náhodně vybraný muž je profesor, (5 bodů)

d) během dvou minut si u číšníka vyzvednou nápoj alespoň tři účastníci, (7 bodů)

e) během dvou minut si u číšníka vyzvedne nápoj alespoň jedna maturantka, (7 bodů)

f) na první odebranou sklenici bude číšník čekat alespoň minutu, (7 bodů)

g) mezi prvními pěti účastníky odcházejícími na toaletu jsou alespoň dvě doprovodné osoby, (7 bodů)

h) číšník rozdá čtyři tácy nejpozději za 50 minut (řešte pomocí CLV; 10 bodů).

i) Definujte nezávislost náhodných veličin X, Y a Z. (7 bodů)

Úloha 2. (celkem 30 bodů)

a) Uvažujte realizaci $(x_1, \dots, x_{16})$ náhodného výběru $(X_1, \dots, X_{16})$ z normálního rozdělení, přičemž $\sum_{i=1}^{16} x_i = 1584$ a $\sum_{i=1}^{16}(x_i - \bar{x})^2 = 60$. Statisticky otestujte na hladině 5%, zda je možné říct, že $\mathbf{E}X_1 = 100$, proti alternativní hypotéze, že

   (i) $\mathbf{E}X_1 \neq 100$, (7 bodů)

   (ii) $\mathbf{E}X_1 < 100$. (8 bodů)

b) Firma poskytující mj. charter (pronájem) lodí obdržela na dvanáct letních týdnů následující počty poptávek po (týdenní) pronájmech: 2, 5, 6, 7, 6, 5, 7, 5, 4, 9, 2, 2.

(i) Nakreslete empirickou distribuční funkci a histogram těchto dat a odhadněte z nich a/nebo z povahy dat, jaké rozdělení má počet poptávek po charteru u této firmy týdně. (8 bodů)

(ii) Metodou maximální věrohodnosti odhadněte parametr tohoto rozdělení. (7 bodů)

Úloha 3. (celkem 10 bodů)
Restaurace začala během nouzového stavu v koronavirovém období vydávat nápoje do plastových kelímků. V jednom náhodně vybraném dni z každého období vydala v čase 15:00 až 17:00 následující:

	pivo	káva
předkoronavirový den	30	40
koronavirový den	20	10

a) Odhadněte z dat marginální rozdělení náhodných veličin X a Y popisujících typ nápoje ($X = 1$ pro pivo a $X = 2$ pro kávu), resp. období, kdy byl nápoj prodán ($Y = 1$ pro předkoronavirový den a $X = 2$ pro koronavirový den). (3 body)

b) Na vámi zvolené hladině statisticky otestujte, zda můžeme považovat období a typ nápoje za nezávislé náhodné veličiny. (7 bodů)

Ústní část (celkem 10 bodů)
O náhodných veličinách X a Y se sdruženými a marginálními pravděpodobnostmi uvedenými v následující tabulce

$X \downarrow \quad Y \rightarrow$	1	0	
1	a	b	1/2
0	c	d	e
	1/2	f	

rozhodněte, zda můžeme nalézt parametry a, b, c, d, e a f tak, aby

(i) $corr(X, Y) = 0$,

(ii) $corr(X, Y) = -1$,

(iii) $corr(X, Y) = 2$.

Pokud ano, určete dané parametry, pokud ne, zdůvodněte proč.