B0B01PST Pravděpodobnost a statistika - zkouškový test 6.6.2022 (přednášející HELISOVÁ, cvičící BECK / KORBELÁŘ)

Jméno a příjmení	1	2	3	4	celkem	známka

Úloha 1. (celkem 38 bodů)
Na akci pořádané jistou zoologickou zahradou u příležitosti Dne dětí dostávají děti odměnu za splnění úkolu formou žetonu do automatu. Po vhození žetonu jim vždy vypadne lízátko, bonbón nebo žvýkačka, přičemž tyto sladkosti jsou v automatu v poměru 1:2:1. Každá sladkost je v obalu buď se slonem nebo s žirafou nebo s tučňákem, přičemž tučňáků je na obalech 50% a žiraf 20%. Obaly na lízátka tvoří ze 40% tučňáci a z 20% žirafy, obaly na bonbóny tvoří ze 40% tučňáci a z 25% žirafy. K automatu si přichází vybrat odměnu průměrně jedno dítě za dvě minuty. Děti přicházejí k automatu nezávisle na sobě. Do automatu jsou stále doplňovány sladkosti tak, aby byl zachován poměr mezi druhy sladkostí uvedený výše. Spočtěte pravděpodobnost, že

a) příští žvýkačka bude v obalu s tučňákem, (5 bodů)

b) příští sladkost v obalu s tučňákem bude žvýkačka, (5 bodů)

c) během deseti minut budou vydány alespoň tři odměny v obalu s tučňákem, (7 bodů)

d) mezi čtyřmi vydanými odměnami bude nejvýše jedno lízátko, (7 bodů)

e) příští vydání odměny z automatu přijde nejpozději za 5 minut, (7 bodů)

f) je-li nyní v automatu 100 sladkostí a doplňování automatu se zaseklo, vydrží i tak automat vydávat odměny ještě alespoň tři hodiny. (Řešte pomocí CLV; 7 bodů)

Úloha 2. (celkem 25 bodů) Sdružené pravděpodobnosti dvou diskrétních náhodných veličin X a Y jsou dány následující tabulkou:

	$X=0$	$X=1$	$X=2$	$X=3$
$Y=0$	1/6	0	1/6	0
$Y=1$	1/3	1/8	1/12	1/8

a) Spočtěte kovarianci $\mathrm{cov}(X,Y)$ a korelaci $\mathrm{corr}(X,Y)$. (8 bodů)

b) Rozhodněte, zda jsou X a Y nezávislé, a stručně matematicky zdůvodněte. (5 bodů)

c) Pokud jste v bodě b) rozhodli, že X a Y **jsou nezávislé**, určete (libovolné) sdružené rozdělení náhodného vektoru (Z,U), v němž náhodné veličiny Z a U mají stejná marginální rozdělení jako X, resp. Y, ale přitom Z a U **nejsou nezávislé**.
Pokud jste v bodě b) rozhodli, že X a Y **nejsou nezávislé**, určete (libovolné) sdružené rozdělení náhodného vektoru (Z,U), v němž náhodné veličiny Z a U mají stejná marginální rozdělení jako X, resp. Y, ale přitom Z a U **jsou nezávislé**.. (7 bodů)

d) Definujte **obecně** nezávislost dvou náhodných veličin V a W. (5 bodů)

Úloha 3. (celkem 23 bodů)
Jistá pojišťovna poskytuje mj. pojištění nemovitosti. V uplynulém roce jí bylo nahlášeno 50 škod na rodinných domech, 33 na bytech a 17 na chatách. Výše škod v uplynulém měsíci pak byly (v tis. EUR): 2, 2.5, 1, 10, 5. Pojišťovna používá k modelování výše škod náhodnou veličinu s hustotou

$$f(x) = \beta^2 x e^{-\beta x} \quad \text{pro } x > 0 \text{ (jinak } f(x) = 0).$$

a) Statisticky otestujte na hladině 5%, zda můžeme považovat pravděpodobnosti, že nastane škoda na rodinném domě, bytu, resp. chatě, za rozdělené v poměru 2:2:1. (7 bodů)

b) Z dat za uplynulý měsíc odhadněte parametr β

   (i) metodou maximální věrohodnosti, (7 bodů)

   (ii) metodou momentů. (9 bodů)

Úloha 4. (celkem 14 bodů)
V počítačové hře musí hráč postupně splnit tři úkoly (řešení jednoho úkolu = jedno kolo hry). Pokud nesplní první úkol, hra končí prohrou, pokud splní třetí úkol, hra končí výhrou. V ostatních případech bude hráč po splnění úkolu plnit následující úkol a při nesplnění úkolu musí znovu plnit předešlý úkol. První úkol přitom splní s pravděpodobností $3/4$, druhý s pravděpodobností $1/2$ a třetí s pravděpodobností $1/4$. Uvažujte markovský řetězec $\{X_n, n = 1, 2, ...\}$, kde $X_n = 0$, pokud hráč v n-tém kole prohrál, $X_n = 4$, pokud hráč v n-tém kole vyhrál, a $X_n = i$, pokud hráč v n-tém kole řeší i-tý úkol, $i = 1, 2, 3$. Určete pro tento řetězec

a) matici pravděpodobností přechodu, (4 body)

b) pravděpodobnost, že hra skončí pro hráče výhrou. (10 bodů)