B0B01PST Pravděpodobnost a statistika - zkouškový test 1.6.2022 (přednášející HELISOVÁ, cvičící BECK / KORBELÁŘ)

Jméno a příjmení	1	2	3	4	celkem	známka

Úloha 1. (celkem 38 bodů)
Firma rozdává svým zaměstnancům coby jednu z forem odměn slevové vouchery na nákup v libovolném obchodě jistého obchodního centra, které má dva sektory, označme je A a B. Vouchery mají hodnotu 100 Kč, 200 Kč a 500 Kč a v těchto hodnotách jsou vydávány v poměru 3:2:1. Bylo vypozorováno, že zaměstnanci uplatní dvakrát více voucherů v sektoru A než v sektoru B. Mezi vouchery uplatněnými v sektoru A má 20% hodnotu 500 Kč a 40% hodnotu 200 Kč. Zákazníci průměrně uplatní v obchodním centru dva vouchery za den. Uplatňování voucherů je rovnoměrné a nezávisí vzájemně na sobě ani na hodnotách voucherů. Spočtěte pravděpodobnost, že

a) příští voucher uplatněný v sektoru B bude v hodnotě 500 Kč, (5 bodů)

b) příští voucher v hodnotě 500 Kč bude uplatněný v sektoru B, (5 bodů)

c) na příští uplatnění voucheru bude obchodní centrum čekat alespoň tři dny, (7 bodů)

d) během tří dnů budou v obchodním centru uplatněny alespoň dva vouchery v hodnotě 500 Kč, (7 bodů)

e) nejpozději čtvrtý voucher bude uplatněný v sektoru B, (7 bodů)

f) ze 72 voucherů jich bude alespoň 30 uplatněných v sektoru B. (Řešte pomocí CLV; 7 bodů)

Úloha 2. (celkem 25 bodů)
Sdružené pravděpodobnosti dvou diskrétních náhodných veličin X a Y jsou dány následující tabulkou:

	$X=-1$	$X=0$	$X=1$
$Y=-1$	1/12	1/4	1/12
$Y=0$	1/12	0	1/12
$Y=1$	1/12	1/4	1/12

a) Spočtěte kovarianci $\mathrm{cov}(X,Y)$ a korelaci $\mathrm{corr}(X,Y)$. (8 bodů)

b) Rozhodněte, zda jsou X a Y nezávislé, a stručně matematicky zdůvodněte. (5 bodů)

c) Pokud jste v bodě b) rozhodli, že X a Y **jsou nezávislé**, určete (libovolné) sdružené rozdělení náhodného vektoru (U,V), v němž náhodné veličiny U a V mají stejná marginální rozdělení jako X, resp. Y, ale přitom U a V **nejsou nezávislé**.
Pokud jste v bodě b) rozhodli, že X a Y **nejsou nezávislé**, určete sdružené rozdělení náhodného vektoru (U,V), v němž náhodné veličiny U a V mají stejná marginální rozdělení jako X, resp. Y, ale přitom U a V **jsou nezávislé**. (7 bodů)

d) Definujte **obecně** nezávislost dvou náhodných veličin Z a W. (5 bodů)

Úloha 3. (celkem 15 bodů)
Botanici měřili na 15 exemplářích výšku jistého druhu rostliny. Naměřené hodnoty (zaokrouhleno na celé cm) jsou uvedeny v následující tabulce:

83	95	90	98	104	106	97	86	97	101	90	97	110	89	92

a) Načrtněte histogram a určete z něj, z jakého rozdělení data mohou pocházet. (5 bodů)

b) Statisticky otestujte, zda můžeme říct, že střední výška rostliny je 1m, přičemž testujte

(i) na hladině 5%,

(ii) na hladině 1%.

(Hint: $\sum x_i = 1435$, $\sum (x_i - \bar{x})^2 = 797,33$; 10 bodů).

Úloha 4. (celkem 22 bodů)
Ehrenfestovo schéma s absorpčními stavy: Máme N kuliček rozmístěných do dvou nádob A a B. V každém kroku vybereme náhodně rovnoměrně jednu kuličku a přemístíme ji do druhé nádoby. Pokud je jedna z nádob prázdná, proces končí. Nechť $N = 4$ a X_n je počet kuliček v nádobě A v n-tém kroku. Pro Markovský řetězec $\{X_n, n = 0, 1, 2, ...\}$

a) Sestavte matici pravděpodobností přechodu. (7 bodů)

b) Určete pravděpodobnost, že skončíme s prázdnou nádobou A, jestliže v ní na začátku byly 3 kuličky, tj. $X_0 = 3$. (15 bodů)