

B0B01PST Pravděpodobnost a statistika - zkouškový test 20.6.2022
(přednášející HELISOVÁ, cvičící BECK / KORBELÁŘ)

Jméno a příjmení	1	2	3	4	5	celkem	známka

Úloha 1. (celkem 50 bodů)

Na akci pořádané jistou zoologickou zahradou u příležitosti Dne dětí dostávají děti odměnu za splnění úkolu formou žetonu do automatu. Po vhození žetonu jim vždy vypadne lízátko, bonbón nebo žvýkačka, přičemž tyto sladkosti jsou v automatu v poměru 1:2:2. Každá sladkost je v obalu buď se slonem nebo s žirafou nebo s tučňákem, přičemž obaly na lízátko tvoří ze 40% sloni a z 20% žirafy, obaly na bonbóny tvoří ze 30% sloni a ze 40% žirafy a obaly na žvýkačky tvoří z 25% sloni a z 25% žirafy. K automatu si přichází vybrat odměnu průměrně jedno dítě za tři minuty. Děti přicházejí k automatu nezávisle na sobě. Do automatu jsou stále doplňovány sladkosti tak, aby byl zachován poměr mezi druhy sladkostí uvedený výše. Spočtete pravděpodobnost, že

- a) příští vydaná sladkost bude v obalu s tučňákem, (5 bodů)
- b) příští vydaná sladkost v obalu s tučňákem bude lízátko, (5 bodů)
- c) příští vydané lízátko bude v obalu s tučňákem, (5 bodů)
- d) na vydání příští žvýkačky budeme čekat nejvýše 10 minut, (7 bodů)
- e) během 15 minut vydá automat nejvýše tři sladkosti, přičemž žádná z nich nebude v obalu s žirafou, (7 bodů)
- f) mezi čtyřmi vydanými odměnami bude nejvýše jedno lízátko, (7 bodů)
- g) nejpozději čtvrtá vydaná sladkost bude bonbón, (7 bodů)
- h) je-li nyní v automatu 100 sladkostí a doplňování automatu se zaseklo, vydrží i tak automat vydávat odměny ještě alespoň čtyři hodiny. (Řešte pomocí CLV; 7 bodů)

Úloha 2. (celkem 17 bodů)

Zmrzlinář, který vydává ve stánku zmrzlinu, uvádí, že hmotnost jedné porce se pohybuje kolem 200 g. Zvážili jsme 14 vydaných porcí a zjistili, že hmotnosti (v gramech) byly:

191	227	169	189	194	200	151	193	157	177	211	216	181	182
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

- a) Nakreslete histogram a odhadněte z něj a/nebo z povahy dat, jaké rozdělení má náhodná veličina popisující hmotnost jedné porce zmrzliny. (5 bodů)
- b) Statisticky otestujte na hladině 5%, zda je střední jedné porce zmrzliny 200 g,

- (i) při oboustranné alternativě,
 - (ii) při jednostranné alternativě, která přirozeně vyplývá z kontextu.
- (Hint: $\sum x_i = 2638$, $\sum (x_i - \bar{x})^2 = 5943$; 10 bodů)
- c) Jak se (ne)změní závěry z bodu b), budeme-li testovat na hladině 1%? (2 body)

Úloha 3. (celkem 19 bodů)

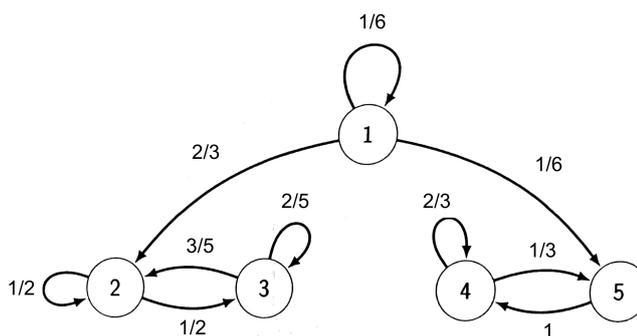
Náhodná veličina X má distribuční funkci

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x \in (-\infty, 0) \\ \frac{x^2}{3} & , x \in (0, 1) \\ \frac{1}{2} & , x \in (1, 2) \\ \frac{x}{8} + \frac{1}{2} & , x \in (2, 4) \\ 1 & , x \in (4, \infty) \end{cases}$$

- a) Určete $P(1 < X < 3)$ a $P(1 \leq X \leq 3)$. (2+2 body)
- b) Vyjádřete X jako směs $X = \text{Mix}_c(D, S)$ náhodných veličin D a S , kde D je diskrétní a S spojitá, tj. určete konstantu c a pak popište rozdělení pravděpodobnosti pro D a S (tj. pravděpodobnostní funkci $P(D = \dots) = \dots$ pro D a hustotu $f(x)$ pro S). (15 bodů)

Úloha 4. (celkem 11 bodů)

Pro markovský řetězec daný grafem



určete

- a) matici pravděpodobností přechodu, (3 body)
- b) stacionární rozdělení pro situaci, kdy řetězec vychází ze stavu 1. (8 bodů)

Úloha 5. (celkem 3 body)

Definujte nezávislost dvou spojitých náhodných veličin X a Y .