

Pravděpodobnost a statistika

Definice

Uvažujme množinu $\Omega \neq \emptyset$ náhodných elementárních jevů coby výsledků náhodného pokusu. Necht' \mathcal{A} je neprázdný systém podmnožin množiny Ω takový, že

- a) $\emptyset \in \mathcal{A}$,
- b) jestliže $A \in \mathcal{A}$, pak $A^c \in \mathcal{A}$, kde A^c je doplněk množiny A .
- c) jestliže $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, 2, \dots$, pak $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Potom systém \mathcal{A} nazýváme σ -algebra a její prvky $A, B, C \dots \in \mathcal{A}$ nazýváme náhodné jevy.

Definice

Nechť $\Omega \neq \emptyset$ a \mathcal{A} je σ -algebra definovaná na Ω . Pak pravděpodobnost P je definovaná jako reálná funkce na \mathcal{A} , která splňuje

- $P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0,$
- $P(A) \geq 0$ pro všechna $A \in \mathcal{A},$
- pro všechny posloupnosti po dvou disjunktních jevů $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ platí

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Definice

Trojice (Ω, \mathcal{A}, P) se nazývá pravděpodobnostní prostor.

- 1) \emptyset ... jev nemožný
- 2) Ω ... jev jistý
- 3) $A \cup B$... sjednocení jevů A a B (jev, který nastává právě tehdy, nastane-li jev A nebo jev B)
- 4) $A \cap B$... průnik jevů A a B (jev, který nastává právě tehdy, nastane-li zároveň jev A i jev B)
- 5) $B - A$... rozdíl jevů A a B (jev, který nastává právě tehdy, nastane-li jev B , ale zároveň nenastane jev A)
- 6) $A \subset B$... A je podjevem jevu B , tedy kdykoliv nastane jev A , víme, že nastal i jev B
- 7) $A^c = \Omega - A$... doplněk jevu A (jev, který nastane právě tehdy, když nenastane jev A)
- 8) $A \cap B = \emptyset$... jevy A a B jsou disjunktní (nemohou nastat zároveň)
- 9) Posloupnost po dvou disjunktních jevů $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ taková, že $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$, se nazývá disjunktním rozkladem množiny Ω .

- 1) $0 \leq P(A) \leq 1, \quad \forall A \in \mathcal{A},$
- 2) $A, B \in \mathcal{A}, A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B),$
- 3) $P(A^c) = 1 - P(A), \quad \forall A \in \mathcal{A},$
- 4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \quad \forall A, B \in \mathcal{A},$
- 5) $A, B \in \mathcal{A}, A \subset B \Rightarrow P(B - A) = P(B) - P(A),$
- 6) pro všechny posloupnosti $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ tvořící disjunktní rozklad množiny Ω platí, že $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = 1;$

Pravděpodobnostní prostor (Ω, \mathcal{A}, P) se nazývá klasický, jestliže

- množina Ω je konečná, tj. $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$, a všechny elementární jevy mají stejnou pravděpodobnost, tj. $p_1 = p_2 = \dots = p_m = \frac{1}{m}$, kde $p_i = P(\omega_i)$ pro $i = 1, \dots, m$.
- σ -algebra \mathcal{A} je systém všech podmnožin množiny Ω ,
- $P(A) = \frac{m_A}{m}$, kde m_A je počet elementárních jevů tvořících jev A .

Pravděpodobnostní prostor (Ω, \mathcal{A}, P) se nazývá geometrický, jestliže

- $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ (obvykle $d = 1, 2, 3$), tj. elementární jevy mohou být reprezentovány body v nějakém geometrickém útvaru,
- $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\Omega)$ je Borelovská σ -algebra na Ω (tj. nejmenší σ -algebra obsahující všechny otevřené podmnožiny Ω , tedy z definice i všechny uzavřené podmnožiny a jejich kombinace),
- $P(A) = \frac{\mu^d(A)}{\mu^d(\Omega)}$, kde μ^d je d -rozměrná Lebesgueova míra (pro naše účely postačí uvažovat $\mu^1(A)$ coby délku úsečky A , $\mu^2(A)$ jako plochu dvojrozměrného útvaru A a $\mu^3(A)$ jako objem trojrozměrného geometrického útvaru A).

Pravděpodobnostní prostor (Ω, \mathcal{A}, P) se nazývá obecný diskretní, jestliže

- a) $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ je konečná nebo spočetná,
- b) \mathcal{A} je množina všech podmnožin Ω ,
- c) jsou dány pravděpodobnosti $P(\omega_i)$ elementárních jevů ω_i splňující $\sum_{i=1}^{\infty} P(\omega_i) = 1$ a pravděpodobnost každého jevu $A \in \mathcal{A}$ je pak dána vztahem $P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i)$.

Pravděpodobnostní prostor (Ω, \mathcal{A}, P) se nazývá obecný spojitý, jestliže

- $\Omega \subset \mathbb{R}$, tj. elementární jevy mohou být reprezentovány reálnými čísly,
- $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ je Borelovská σ -algebra na \mathbb{R} ,
- existuje funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ taková, že $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$ a pravděpodobnost libovolného jevu $A \in \mathcal{A}$ je jednoznačně dána vztahem

$$P(A) = \int_A f(x) dx.$$

Poznámka

Podobně jako v případě geometrického pravděpodobnostního prostoru je možné pracovat i zde s obecnější množinou $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3, \dots$, ale to nebude náplní této přednášky.

Definice

Nechť (Ω, \mathcal{A}, P) je pravděpodobnostní prostor. Uvažujme jevy A a B , kde $P(B) > 0$. Pravděpodobnost jevu A za podmínky jevu B je definovaná jako

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Věta

Nechť (Ω, \mathcal{A}, P) je pravděpodobnostní prostor a B jev, pro který $P(B) > 0$. Pak pro libovolný jev $A \in \mathcal{A}$ platí

- a) $P(A|B) \geq 0$,
- b) $P(\Omega|B) = 1$,
- c) $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i|B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$ pro všechny posloupnosti $\{A_i\}$ po dvou disjunktních jevů.

Poznámka

Tato věta v podstatě říká, že podmíněná pravděpodobnost má stejné vlastnosti jako pravděpodobnost nepodmíněná.

Důkaz

- a) zřejmé z definice podmíněné pravděpodobnosti (čitatel nezáporný, jmenovatel kladný),
b) z definice dostáváme

$$P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1,$$

- c) jelikož A_1, A_2, \dots jsou disjunktní, pak i $A_1 \cap B, A_2 \cap B, \dots$ musejí být disjunktní, a tedy

$$\begin{aligned} P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i | B) &= \frac{P((\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\cup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap B))}{P(B)} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \cap B)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i | B). \end{aligned}$$

Věta

Pro libovolnou posloupnost jevů $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ takovou, že $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$, platí

$$P(\cap_{i=1}^n A_i) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \dots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

Důkaz

Opakovaným použitím definice podmíněné pravděpodobnosti dostáváme

$$\begin{aligned}P(\cap_{i=1}^n A_i) &= P(\cap_{i=1}^{n-1} A_i \cap A_n) = P(\cap_{i=1}^{n-1} A_i)P(A_n | \cap_{i=1}^{n-1} A_i) = \\&= P(\cap_{i=1}^{n-2} A_i)P(A_{n-1} | \cap_{i=1}^{n-2} A_i)P(A_n | \cap_{i=1}^{n-1} A_i) \dots = \\&= P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 \cap A_2) \dots P(A_n | \cap_{i=1}^{n-1} A_i).\end{aligned}$$

Díky monotonii pravděpodobnosti máme

$$P(A_1) \geq P(A_1 \cap A_2) \geq \dots \geq P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0,$$

tedy všechny podmíněné pravděpodobnosti v důkazu jsou korektně definovány.

Věta

Nechť jevy $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ tvoří disjunktní rozklad množiny Ω , tj.

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j \text{ a } \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega.$$

Nechť tyto jevy mají postupně pravděpodobnosti $P(A_1), P(A_2), \dots$, a $P(A_i) > 0, \forall i = 1, 2, \dots$. Uvažujme jev $B \in \mathcal{A}$, pro který známe podmíněné pravděpodobnosti

$$P(B|A_i), \forall i = 1, 2, \dots$$

Pak

$$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \cdot P(B|A_i).$$

Důkaz

Nechť jevy $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ tvoří disjunktční rozklad množiny Ω . Pak i $(A_i \cap B)$ a $(A_j \cap B)$ jsou disjunktční, tj.

$$(A_i \cap B) \cap (A_j \cap B) = \emptyset, \quad \forall i \neq j,$$

a navíc

$$\cup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap B) = B.$$

Tedy

$$P(B) = P(\cup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap B)) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \cdot P(B|A_i).$$

Věta

Nechť jevy $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ tvoří disjunktní rozklad množiny Ω , tj.

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j \text{ a } \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega.$$

Nechť tyto jevy mají postupně pravděpodobnosti $P(A_1), P(A_2), \dots$, přičemž $P(A_i) > 0, \forall i = 1, 2, \dots$. Uvažujme jev $B \in \mathcal{A}$, pro který známe podmíněné pravděpodobnosti

$$P(B|A_i), \quad \forall i = 1, 2, \dots$$

Pak

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(B|A_j) \cdot P(A_j)}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Důkaz

Z definice podmíněné pravděpodobnosti pro všechna $i = 1, 2, \dots$ máme

$$P(B|A_i) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(A_i)} \Rightarrow P(A_i \cap B) = P(B|A_i)P(A_i).$$

Z věty o úplné pravděpodobnosti máme

$$P(B) = \sum_{j=1}^{\infty} P(B|A_j)P(A_j).$$

Tedy

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(B|A_j)P(A_j)},$$

což jsme chtěli dokázat.

Definice

Jevy A a B se nazývají nezávislé, jestliže pro ně platí

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Definice

Jevy A_1, A_2, \dots, A_n se nazývají vzájemně (totálně) nezávislé, jestliže pro každou množinu indexů $\{k_1, k_2, \dots, k_r\} \subset \{1, \dots, n\}$, $r = 2, \dots, n$, platí

$$P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \dots \cap A_{k_r}) = P(A_{k_1}) \cdot P(A_{k_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{k_r}).$$

Definice

Jevy A_1, A_2, \dots, A_n se nazývají po dvou nezávislé, jestliže A_i, A_j jsou nezávislé pro každou dvojici indexů $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$.

Věta

Nechť A, B jsou nezávislé jevy. Pak (A, B^c) , (A^c, B) a (A^c, B^c) jsou dvojice nezávislých jevů.

Důkaz

$$\begin{aligned}P(A^c \cap B) &= P(B - A) = P(B - [A \cap B]) = P(B) - P(A \cap B) = \\&= P(B) - P(B) \cdot P(A) = P(B) \cdot (1 - P(A)) = \\&= P(B) \cdot P(A^c).\end{aligned}$$

Důkaz nezávislosti jevů A, B^c je analogický a nezávislost jevů A^c, B^c je přímým důsledkem těchto dvou nezávislostí.

Definice

Nechť (Ω, \mathcal{A}, P) je pravděpodobnostní prostor. Reálná funkce X definovaná na Ω se nazývá náhodná veličina, jestliže X je měřitelné zobrazení $X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$, tj.

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$$

pro libovolnou Borelovskou množinu $B \in \mathcal{B}$.

Poznámka

Na náhodnou veličinu tedy můžeme nahlížet jako na náhodné číslo.

Značení:

- 1 Náhodné veličiny značíme velkými písmeny $X, Y, Z \dots$
- 2 Jejich nabývané hodnoty značíme malými písmeny $x, y, z \dots$
- 3 Místo $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$ píšeme zkráceně $\{X \in B\}$, např. místo $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}$ píšeme $\{X \leq x\}$.

Vlastnosti: Součty, součiny, podíly, minima, maxima atd. z více náhodných veličin jsou opět náhodné veličiny.

Definice

Nechť X je náhodná veličina. Její distribuční funkce je reálná funkce F definovaná jako

$$F(x) = P(X \leq x) = P(\{\omega : X(\omega) \leq x\}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Základní vlastnosti distribuční funkce:

Distribuční funkce $F(x)$ náhodné veličiny X je

- 1 neklesající, tj. pro každé $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, platí $F(a) \leq F(b)$,
- 2 zprava spojitá v každém bodě $x \in \mathbb{R}$,
- 3 $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$.

Definice

Náhodná veličina X se nazývá *diskrétní* (nebo také s *diskrétním rozdělením pravděpodobnosti*), jestliže existuje konečná nebo nekonečná spočetná posloupnost reálných čísel $\{x_i\}$ a k nim odpovídající posloupnost nezáporných čísel $\{p_i\}$, kde $p_i = P(X = x_i)$, takových, že $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Distribuční funkce diskrétní náhodné veličiny X je tvaru

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{\{i: x_i \leq x\}} P(X = x_i) = \sum_{\{i: x_i \leq x\}} p_i,$$

tedy je „skokovitá“ se skoky v nabývaných hodnotách x_n a příslušnými velikostmi skoků p_n , přičemž platí, že

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \sum_{\{i: a < x_i \leq b\}} P(X = x_i) = \sum_{\{i: a < x_i \leq b\}} p_i$$

pro všechna reálná čísla a, b taková, že $a \leq b$.

Definice

Náhodná veličina X se nazývá absolutně spojitá (nebo také se spojitým rozdělením pravděpodobnosti), jestliže existuje nezáporná integrovatelná funkce f taková, že

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Funkce f se nazývá hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny X .

Základní vlastnosti hustoty f :

- 1 $f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$ s.j. (kde s.j. = skoro jistě = s pravděpodobností 1),
- 2 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$,
- 3 $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$
pro všechna reálná čísla a, b taková, že $a \leq b$.

Definice

Míra je definovaná jako nezáporná množinová funkce na (Ω, \mathcal{A}) , tj.

- 1 $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$,
- 2 $\mu(\emptyset) = 0$,
- 3 pro všechny posloupnosti po dvou disjunktních jevů $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ platí $\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

Je-li $\mu(\Omega) = 1$, nazýváme míru μ pravděpodobnostní mírou.

Definice

Každé náhodné veličině X a Borelovské množině $B \in \mathcal{B}$ lze přiřadit pravděpodobnostní míru na $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$,

$$\mu_X(B) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}) = P(X \in B),$$

kteřá se nazývá rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny X .

- Pro $B = (-\infty, x]$, dostaneme

$$P(X \in B) = \mu_X(B) = \mu_X((-\infty, x]) = P(X \leq x) = F(x),$$

tj. distribuční funkci.

- Pro $B = (a, b]$, $-\infty < a \leq b < \infty$, dostaneme

$$P(X \in B) = \mu_X(B) = \mu_X((a, b]) = P(X \in (a, b]) = F(b) - F(a),$$

tedy přírůstek distribuční funkce.

- Pro $B = (a, b] \cup (c, d]$, $-\infty < a \leq b \leq c \leq d < \infty$, máme

$$\begin{aligned} P(X \in B) &= \mu_X(B) = \mu_X((a, b] \cup (c, d]) = P(X \in (a, b]) + P(X \in (c, d]) \\ &= (F(b) - F(a)) + (F(d) - F(c)), \end{aligned}$$

tedy součet přírůstků distribuční funkce.

- Obecně tedy pravděpodobnosti $P(X \in B)$ získáme „nasčítáním“ přírůstků distribuční funkce v bodech množiny B , tj.

$$P(X \in B) = \mu_X(B) = \int_B 1d\mu_X(x) = \int_B 1dF(x), \quad \forall B \in \mathcal{B}.$$

- (Téměř) každou náhodnou veličinou X lze jednoznačně vyjádřit jako směs $X = \text{Mix}_c(D, S)$, kde D je diskrétní náhodná veličina, S je spojitá náhodná veličina a $c \in \langle 0, 1 \rangle$ je váha diskretní složky ve směsi neboli pravděpodobnost, s níž nastává situace modelovaná diskrétní náhodnou veličinou D .
- Je zřejmé, že v případě $c = 1$ je X diskrétní, zatímco v případě $c = 0$ je X absolutně spojitá.
- O smíšeném rozdělení náhodné veličiny X tedy mluvíme v případě, kdy $c \in (0, 1)$.

- Nechť náhodná veličina X je směs $X = \text{Mix}_c(D, S)$, $c \in (0, 1)$, kde D nabývá spočetně mnoha hodnot x_i s pravděpodobnostmi $p_i = P(D = x_i)$, $i = 1, 2, \dots$, a S má hustotu f .
- Označme distribuční funkce náhodných veličin X , D a S postupně jako F_X , F_D , resp. F_S . Pak

$$F_X(x) = cF_D(x) + (1 - c)F_S(x) = c \sum_{i: x_i \leq x} p_i + (1 - c) \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

- Pro každou hodnotu x , které náhodná veličina X nabývá, pak platí, že

$$P(X = x) = F_X(x) - \lim_{t \rightarrow x^-} F_X(t).$$

- Hodnoty $x : P(X = x) > 0$ tedy tvoří spočetnou množinu bodů nespojitosti distribuční funkce F_X a příslušné pravděpodobnosti $P(X = x)$ jsou velikosti skoků v těchto bodech x .

- Lze uvažovat i náhodnou veličinu X , která je směsí dvou náhodných veličin stejného typu, tj. $X = \text{Mix}_c(Y, Z)$, kde Y i Z jsou buď obě diskrétní nebo obě absolutně spojité náhodné veličiny, přičemž $c \in (0, 1)$ je pravděpodobnost, s níž nastává situace modelovaná náhodnou veličinou Y .
- I zde platí, že označíme-li distribuční funkce náhodných veličin X , Y a Z postupně jako F_X , F_Y , resp. F_Z , pak

$$F_X(x) = cF_Y(x) + (1 - c)F_Z(x).$$

- Navíc platí, že
 - jsou-li Y a Z diskrétní, pak X je diskrétní a

$$P(X = x) = cP(Y = x) + (1 - c)P(Z = x) \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R},$$

- jsou-li Y a Z absolutně spojité s hustotami f_Y , resp. f_Z , pak X je absolutně spojitá a pro její hustotu f_X platí

$$f_X(x) = cf_Y(x) + (1 - c)f_Z(x) \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}.$$

- Lze uvažovat i náhodnou veličinu X , která je směsí více náhodných veličin, tj.

$$X = \text{Mix}_{c_1, \dots, c_n}(X_1, \dots, X_n),$$

kde $c_i \geq 0$ pro všechna $i = 1, \dots, n$, $\sum_{i=1}^n c_i = 1$, přičemž c_i je pravděpodobnost, s níž nastává situace modelovaná náhodnou veličinou X_i .

- Označíme-li distribuční funkce náhodných veličin X_1, \dots, X_n postupně jako F_{X_1}, \dots, F_{X_n} , pak

$$F_X(x) = c_1 F_{X_1} + \dots + c_n F_{X_n}(x).$$

- Navíc platí, že
 - jsou-li všechny náhodné veličiny X_1, \dots, X_n diskrétní, pak X je diskrétní a

$$P(X = x) = c_1 P(X_1 = x) + \dots + c_n P(X_n = x) \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R},$$

- jsou-li X_1, \dots, X_n absolutně spojitě s hustotami f_{X_1}, \dots, f_{X_n} , pak X je absolutně spojitá a pro její hustotu f_X platí

$$f_X(x) = c_1 f_{X_1} + \dots + c_n f_{X_n}(x) \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}.$$

Definice

Nechť náhodná veličina X má distribuční funkci $F_X(x)$. Její kvantilová funkce je definována jako

$$q_X(\alpha) = \frac{1}{2}(\sup_{t \in \mathbb{R}} F_X(t) \leq \alpha + \inf_{t \in \mathbb{R}} F_X(t) \geq \alpha), \quad \alpha \in (0, 1).$$

Poznámka

- *Kvantilová funkce $q_X(\alpha)$ je v jistém smyslu inverzní funkcí k distribuční funkci $F_X(x)$.*
- *Využívá se zejména ve statistice při hledání daného podílu α extrémních hodnot.*

Definice

Nechť X je náhodná veličina definovaná na pravděpodobnostním prostoru (Ω, \mathcal{A}, P) . Střední hodnota (anglicky "expected value") $\mathbb{E}X$ náhodné veličiny X je hodnota

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x),$$

pokud integrál existuje.

- Necht' X je diskrétní náhodná veličina nabývající hodnot x_1, x_2, x_3, \dots . Pak její střední hodnota je

$$\mathbb{E}X = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot P(X = x_i),$$

pokud řada konverguje.

- Necht' X je absolutně spojitá náhodná veličina s hustotou f . Pak její střední hodnota je

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx,$$

pokud integrál existuje.

- Necht' X je směs $X = \text{Mix}_c(D, S)$. Pak její střední hodnota je

$$\mathbb{E}X = c\mathbb{E}D + (1 - c)\mathbb{E}S.$$

- 1 $\mathbb{E}a = a,$
- 2 $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}X + b\mathbb{E}Y,$
- 3 $X_1 \leq X \leq X_2 \text{ s.j.} \Rightarrow \mathbb{E}X_1 \leq \mathbb{E}X \leq \mathbb{E}X_2,$
- 4 $X \geq 0 \text{ s.j.} \Rightarrow \mathbb{E}X \geq 0.$

Věta

Nechť X je náhodná veličina definovaná na pravděpodobnostním prostoru (Ω, \mathcal{A}, P) a necht' $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Pak

$$\mathbb{E}\phi(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dF_X(x),$$

pokud integrál existuje.

- 1 Necht' X je diskrétní náhodná veličina nabývající hodnot x_1, x_2, x_3, \dots . Pak

$$\mathbb{E}\phi(X) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi(x_i) \cdot P(X = x_i),$$

pokud řada konverguje.

- 2 Necht' X je absolutně spojitá náhodná veličina s hustotou f . Pak

$$\mathbb{E}\phi(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)f(x)dx,$$

pokud integrál existuje.

- 3 Necht' X je směs $X = \text{Mix}_c(D, S)$. Pak

$$\mathbb{E}\phi(X) = c\mathbb{E}\phi(D) + (1 - c)\mathbb{E}\phi(S).$$

Definice

Nechť X je náhodná veličina definovaná na (Ω, \mathcal{A}, P) .

$\mathbb{E}X^n$ se nazývá n -tý moment náhodné veličiny X ,

$\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^n$ se nazývá n -tý centrální moment náhodné veličiny X ,

$\mathbb{E}|X - \mathbb{E}X|$ se nazývá absolutní moment náhodné veličiny X .

Definice

Druhý centrální moment se nazývá rozptyl (anglicky "variance") a značí se $\text{var}X = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2$.

Definice

Nechť X, Y jsou náhodné veličiny takové, že $\mathbb{E}X^2 < \infty$ a $\mathbb{E}Y^2 < \infty$. Pak jejich kovariance je definovaná jako

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y).$$

Poznámka

Povšimněme si, že $\text{cov}(X, X) = \text{var}(X)$.

- 1 Necht' X je náhodná veličina. Pak $\text{var}X = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2$
- 2 Necht' a je konstanta. Pak $\text{var} a = 0$.
- 3 Necht' X je náhodná veličina a a je reálné číslo. Pak $\text{var}(aX) = a^2 \text{var}X$.
- 4 Necht' X je náhodná veličina a a je konstanta. Pak $\text{var}(X + a) = \text{var}X$.
- 5 Necht' X je náhodná veličina s konečnou střední hodnotou a konečným nenulovým rozptylem. Necht'

$$Z = \frac{X - \mathbb{E}X}{\sqrt{\text{var}X}}.$$

Pak $\mathbb{E}Z = 0$ a $\text{var}Z = 1$.

- 6 Pro náhodné veličiny X, Y platí, že

$$\text{var}(X + Y) = \text{var}X + \text{var}Y + 2\text{cov}(X, Y).$$

- 7 Pro náhodné veličiny X, Y platí, že $\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$.

Věta

Nechť X je náhodná veličina s konečným rozptylem. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ platí, že

$$P(|X - \mathbb{E}X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{var}X}{\varepsilon^2}.$$

Důkaz

Uvažujme náhodnou veličinu $Y = X - \mathbb{E}X$ s distribuční funkcí F . Pak

$$\begin{aligned} \text{var}X &= \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}Y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 dF(y) \geq \int_{|y| \geq \varepsilon} y^2 dF(y) \geq \\ &\geq \varepsilon^2 \int_{|y| \geq \varepsilon} dF(y) = \varepsilon^2 P(|Y| \geq \varepsilon) = \varepsilon^2 P(|X - \mathbb{E}X| \geq \varepsilon). \end{aligned}$$

- X nabývá hodnot 0 a 1 s pravděpodobnostmi $1 - p$, resp. p .
- Hodnota p , $0 < p < 1$, se nazývá parametr alternativního rozdělení.
- Distribuční funkce má tvar

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ 1 - p & \text{pro } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{pro } x \geq 1 \end{cases}$$

- Střední hodnota je $\mathbb{E}X = p$ a rozptyl $\text{var}X = p(1 - p)$.

- X nabývá hodnot $k = 0, 1, 2, \dots, n$.
- Je jednoznačně dáno dvěma parametry $n \in \mathbb{N}$ a $p \in (0, 1)$.
- Pravděpodobnosti $P(X = k)$ jsou tvaru

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \text{ pro } k = 0, 1, \dots, n.$$

- Distribuční funkce má tvar

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ \sum_{0 \leq k \leq x} \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} & \text{pro } 0 \leq x < n \\ 1 & \text{pro } x \geq n. \end{cases}$$

- Střední hodnota je $\mathbb{E}X = np$ a rozptyl $\text{var}X = np(1 - p)$.

Výpočet střední hodnoty

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X &= \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^n k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^n k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= np \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k} \\ &= np \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} p^k (1-p)^{n-k-1} \\ &= np(p + (1-p))^{n-1} = np.\end{aligned}$$

Výpočet rozptylu

- Pro výpočet rozptylu využijeme vztah

$$\text{var}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}X(X-1) + \mathbb{E}X - (\mathbb{E}X)^2.$$

- Výpočet první složky je analogický předešlému, tedy

$$\mathbb{E}X(X-1) = \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \dots = n(n-1)p^2$$

- Takto získáme rozptyl

$$\text{var}X = np(1-p).$$

- X nabývá hodnot $k = 0, 1, 2, \dots$
- Je jednoznačně dáno jedním parametrem $\lambda > 0$.
- Pravděpodobnosti $P(X = k)$ jsou tvaru

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \text{ pro } k = 0, 1, \dots$$

- Distribuční funkce má tvar

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ \sum_{0 \leq j \leq x} e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} & \text{pro } 0 \leq x < \infty. \end{cases}$$

- Střední hodnota a rozptyl jsou $\mathbb{E}X = \text{var}X = \lambda$ (výpočty jsou analogické těm pro binomické rozdělení).

Vztah mezi binomickým a Poissonovým rozdělením

Uvažujme náhodnou veličinu $X \sim Binom(n, p)$, kde $n \rightarrow \infty$ a $p \rightarrow 0$, přičemž $np = \lambda$. Pak

$$P(X = k) = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} p^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty, p \rightarrow 0} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

čímž dostáváme rozdělení Poissonovo.

- X nabývá hodnot $k = 0, 1, 2, \dots$
- Je jednoznačně dáno jedním parametrem $p \in (0, 1)$.
- Pravděpodobnosti $P(X = k)$ jsou tvaru

$$P(X = k) = p(1 - p)^k \text{ pro } k = 0, 1, \dots$$

- Distribuční funkce má tvar

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ \sum_{0 \leq k \leq x} p(1 - p)^k & \text{pro } x \geq 0. \end{cases}$$

- Použitím vztahů pro geometrické řady dostaneme střední hodnotu $\mathbb{E}X = \frac{1-p}{p}$ a rozptyl $\text{var}X = \frac{1-p}{p^2}$.

- Je jednoznačně dáno třemi parametry $N, K, n \in \mathbb{N}$, kde $N \geq K$ a $N \geq n$.
- X nabývá hodnot $k \in \mathbb{N} : \max\{0, n + K - N\} \leq k \leq \min\{n, K\}$
- Pravděpodobnosti $P(X = k)$ jsou tvaru

$$P(X = k) = \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} \text{ pro } k = \max\{0, n+K-N\}, \dots, \min\{n, K\}.$$

- Distribuční funkce má tvar

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < \max\{0, n + K - N\} \\ \sum_{k \leq x} \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} & \text{pro } x \in \langle \max\{0, n + K - N\}, \min\{n, K\} \rangle \\ 1 & \text{pro } x \geq \min\{n, K\}. \end{cases}$$

- Střední hodnota je $\mathbb{E}X = n \frac{K}{N}$ a rozptyl $\text{var}X = n \frac{K}{N} (1 - \frac{K}{N}) \frac{N-n}{N-1}$.

- X nabývá hodnot z intervalu $[a, b]$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ jsou parametry, které X jednoznačně určují.
- Hustota je tvaru

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{pro } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{pro } x < a, x > b. \end{cases}$$

- Distribuční funkce má tvar

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{pro } a \leq x \leq b, \\ 1 & \text{pro } x \geq b. \end{cases}$$

- Střední hodnota a rozptyl jsou

$$\mathbb{E}X = \frac{a+b}{2}, \quad \text{var}X = \frac{1}{12}(b-a)^2.$$

- X nabývá hodnot z intervalu $(0, \infty)$.
- Je jednoznačně určeno parametrem $\lambda > 0$.
- Hustota je tvaru

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{pro } x \leq 0. \end{cases}$$

- Distribuční funkce má tvar

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{pro } x > 0. \end{cases}$$

- Použitím integrace per partes dostaneme

$$\mathbb{E}X = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}.$$

Dvojitým použitím per partes dostaneme

$$\mathbb{E}X^2 = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2},$$

a tedy rozptyl je

$$\text{var}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Vlastnosti exponenciálního rozdělení:

- ① *Je to tzv. „rozdělení bez paměti“:*

Pro náhodnou veličinu X s exponenciálním rozdělením platí

$$P(X > x + y | X > y) = P(X > x) \quad \forall x > 0, y > 0.$$

- ② *Souvislost s Poissonovým rozdělením:*

Náhodná veličina X popisující dobu čekání na nějakou událost má exponenciální rozdělení $\text{Exp}(\lambda)$ právě tehdy, když náhodná veličina Y popisující počet takových událostí za dobu t má Poissonovo rozdělení $Po(\lambda t)$.

- X nabývá hodnot z \mathbb{R} .
- Je jednoznačně určeno dvěma parametry $\mu \in \mathbb{R}$ and $\sigma^2 > 0$.
- Hustota je tvaru

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

- Distribuční funkce má tvar

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt, \quad -\infty < x < \infty.$$

- Střední hodnota je $\mathbb{E}X = \mu$ a rozptyl $\text{var}X = \sigma^2$.

- X nabývá hodnot z \mathbb{R} .
- Hustota je tvaru

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

- Distribuční funkce má tvar

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad -\infty < x < \infty.$$

- Střední hodnota je $\mathbb{E}X = 0$ a rozptyl $\text{var}X = 1$.
- Hodnoty $\Phi(x)$ lze nalézt ve statistických tabulkách.
- Díky symetrii rozdělení platí $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$, takže hodnoty $\Phi(x)$ jsou často tabelovány pouze pro kladná x .

Transformace náhodných veličin s normálním rozdělením

Věta

- 1 *Náhodná veličina X má normované normální rozdělení právě tehdy, když $Y = \mu + \sigma X$ má normální rozdělení s parametry μ a σ^2 .*
- 2 *Náhodná veličina X má normální rozdělení s parametry μ a σ^2 právě tehdy, když $Y = a + bX$ má normální rozdělení s parametry $a + b\mu$ a $b^2\sigma^2$.*
- 3 *Nechť X, Y jsou náhodné veličiny, $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ a $\text{cov}(X, Y) = 0$. Pak $Z = X + Y$ má rozdělení $N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.*

- ... součty, rozdíly, součiny, podíly, minima, maxima atd. náhodných veličin jsou opět náhodné veličiny.
- Dále jestliže X je náhodná veličina, pak

$$Y = \varphi(X)$$

je také náhodná veličina pro libovolnou funkci $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Věta

Nechť X je náhodná veličina s distribuční funkcí F a necht' $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Označme $Y = \varphi(X)$ a G její distribuční funkci. Pak

$$G(y) = \int_{\{x; \varphi(x) \leq y\}} dF(x), \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Speciálně je-li X diskrétní s nabývanými hodnotami a příslušnými pravděpodobnostmi $\{x_n, p_n\}$, pak

$$G(y) = \sum_{\{x_n; \varphi(x_n) \leq y\}} p_n, \quad \forall y \in \mathbb{R},$$

a je-li spojitá s hustotou f , pak

$$G(y) = \int_{\{x; \varphi(x) \leq y\}} f(x) dx, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Důkaz

Označme $B_y = \{x; \varphi(x) \leq y\}$. Pak

$$\begin{aligned} G(y) &= P(Y \leq y) = P(\varphi(X) \leq y) = P(X \in B_y) = \int_{B_y} dF(x) = \\ &= \int_{\{x; \varphi(x) \leq y\}} dF(x). \end{aligned}$$

- Mějme dvě nezávislé náhodné veličiny X a Y (matematická definice nezávislosti bude později) s distribučními funkcemi $F(x)$, resp. $G(y)$.
- Cílem je získat rozdělení náhodné veličiny $Z = X + Y$.
- Nechť $H(z)$ je distribuční funkce Z . Pak

$$H(z) = \int \int_{x+y \leq z} dF(x) dG(y)$$

Definice

Rozdělení pravděpodobnosti dané distribuční funkcí $H(z)$ se nazývá konvoluce dvou rozdělení s distribučními funkcemi $F(x)$ a $G(y)$. H se pak nazývá konvolucí distribučních funkcí F a G .

- Konvoluci distribučních funkcí značíme $H = F * G$.

Věta

Nechť F a G jsou distribuční funkce nezávislých diskrétních náhodných veličin X , resp. Y , s odpovídajícími pravděpodobnostmi $\{p_n\}$, resp. $\{q_n\}$, nabývaných hodnot $n \in \mathbb{N}$, tj.

$$F(x) = \sum_{0 \leq n \leq x} p_n \quad \text{a} \quad G(y) = \sum_{0 \leq n \leq y} q_n.$$

*Nechť $H = F * G$ (tj. H je distribuční funkcí náhodné veličiny $Z = X + Y$). Pak H je daná vztahem*

$$H(z) = \sum_{0 \leq n \leq z} h_n, \quad \text{kde} \quad h_n = \sum_{k=0}^n p_k q_{n-k}.$$

Věta

Nechť X a Y jsou nezávislé spojité náhodné veličiny s odpovídajícími hustotami $f(x)$, resp. $g(y)$, a necht' $Z = X + Y$. Pak hustota $h(z)$ náhodné veličiny Z je daná vztahem

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y)g(y)dy. \quad (1)$$

Definice

*Funkce $h(z)$ definovaná vztahem (1) se nazývá konvoluce hustot $f(x)$ a $g(y)$ a značí se $h = f * g$.*

Poznámka

Funkce $h(z)$ je skutečně hustota pravděpodobnosti, neboť $h(z) \geq 0$ a

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} h(z)dz &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dydx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)dx \right) g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)dy = 1. \end{aligned}$$

- **Konvoluce dvou alternativních rozdělení**

Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny, $X \sim Alt(p)$ a $Y \sim Alt(p)$. Pak pro $Z = X + Y$ platí $Z \sim Binom(2, p)$.

- **Konvoluce dvou binomických rozdělení**

Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny, $X \sim Binom(n_1, p)$ a $Y \sim Binom(n_2, p)$. Pak pro $Z = X + Y$ platí $Z \sim Binom(n_1 + n_2, p)$.

- **Konvoluce dvou Poissonových rozdělení**

Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny, $X \sim Po(\lambda_1)$ a $Y \sim Po(\lambda_2)$. Pak pro $Z = X + Y$ platí $Z \sim Po(\lambda_1 + \lambda_2)$.

- Konvoluce dvou rovnoměrných rozdělení**

Nechť

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{pro } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

a

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{d-c} & \text{pro } c \leq y \leq d \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pro $d - c \geq b - a$ platí

$$h(z) = \begin{cases} 0 & \text{pro } z \leq a + c \text{ nebo } b + d \leq z \\ \frac{z - (a+c)}{(b-a)(d-c)} & \text{pro } a + c \leq z \leq b + c \\ \frac{1}{d-c} & \text{pro } b + c \leq z \leq a + d \\ \frac{(b+d) - z}{(b-a)(d-c)} & \text{pro } a + d \leq z \leq b + d. \end{cases}$$

- **Konvoluce dvou normálních rozdění**

Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny, $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ a $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Pak pro $Z = X + Y$ platí $Z \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

- **Konvoluce dvou exponenciálních rozdění**

Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny, $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ a $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$. Pak $Z = X + Y$ má hustotu

$$h(z) = \begin{cases} \lambda^2 z \exp\{-\lambda z\} & z > 0, \\ 0 & z \leq 0. \end{cases}$$

Důsledek: X_1, \dots, X_k jsou nezávislé náhodné veličiny, $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ pro všechna $i = 1, \dots, k$, $k \in \mathbb{N}$. Pak $Z = X_1 + \dots + X_k$ má hustotu

$$h(z) = \begin{cases} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} z^{k-1} \exp\{-\lambda z\} & z > 0, \\ 0 & z \leq 0. \end{cases}$$

Definice

Nechť (Ω, \mathcal{A}, P) je pravděpodobnostní prostor. Uvažujme náhodné veličiny X_1, X_2, \dots, X_n definované na tomto prostoru. Pak vektor $\mathbb{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ se nazývá náhodný vektor.

Poznámka

Náhodný vektor je tedy zobrazení z Ω do \mathbb{R}^n a hodnoty náhodného vektoru mohou být interpretovány jako body v n -dimenzionálním prostoru.

Definice

Nechť $\mathbb{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ je náhodný vektor definovaný na pravděpodobnostním prostoru (Ω, \mathcal{A}, P) . Sdružená distribuční funkce $F_{\mathbb{X}}$ náhodného vektoru \mathbb{X} je reálná funkce n proměnných definovaná jako

$$\begin{aligned} F_{\mathbb{X}}(x_1, \dots, x_n) &= P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n) = \\ &= P(\cap_{i=1}^n \{\omega : X_i(\omega) \leq x_i\}), \quad x_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Vlastnosti distribuční funkce náhodného vektoru:

- 1 $F_{\mathbb{X}}(x_1, \dots, x_n)$ je neklesající v každé proměnné x_i při pevných hodnotách ostatních proměnných x_j , $j = 1, \dots, n$, $j \neq i$.
- 2 $F_{\mathbb{X}}(x_1, \dots, x_n)$ je zprava spojitá v každé proměnné.
- 3 $\lim_{x_i \rightarrow -\infty} F_{\mathbb{X}}(x_1, \dots, x_n) = 0$, $i = 1, \dots, n$, kde ostatní proměnné x_j , $j = 1, \dots, n$, $j \neq i$, jsou pevné.
- 4 $\lim_{x_1, \dots, x_n \rightarrow \infty} F_{\mathbb{X}}(x_1, \dots, x_n) = 1$.

Definice

Náhodný vektor \mathbb{X} má diskrétní rozdělení, jestliže existuje posloupnost $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $x_k \in \mathbb{R}^n$, a odpovídající posloupnost $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ kladných čísel taková, že $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$, kde

$$p_k = P(\mathbb{X} = x_k) = P(\{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) = x_k\}).$$

Distribuční funkce diskrétního náhodného vektoru \mathbb{X} je tvaru

$$F_{\mathbb{X}}(x) = \sum_{\{k: x_k \leq x\}} p_k, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

kde $x_k \leq x$ znamená, že $x_k^i \leq x^i$ pro všechny složky x_k^i, x^i , $i = 1, \dots, n$, vektorů x_k , resp. x .

Definice

Náhodný vektor $\mathbb{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ má absolutně spojitě rozdělení, jestliže existuje nezáporná funkce $f_{\mathbb{X}}$ n proměnných taková, že

$$F_{\mathbb{X}}(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_{\mathbb{X}}(t_1, \dots, t_n) dt_n, \dots, dt_1,$$

kde funkce $f_{\mathbb{X}}$ se nazývá sdužená hustota náhodného vektoru \mathbb{X} nebo také sdužená hustota náhodných veličin X_1, \dots, X_n .

Poznámka

Stejně jako v případě náhodných veličin, i zde bychom mohli uvažovat zobecnění náhodného vektoru pomocí pravděpodobnostní míry borelovských množin z \mathbb{R}^n . Nicméně pro naše účely postačí uvažovat diskrétní a spojitě náhodné vektory každý zvlášť.

Definice

Rozdělení (tj. distribuční funkce nebo pravděpodobnostní funkce, resp. hustota) náhodného vektoru $(X_{i_1}, \dots, X_{i_k})^T$, který je podvektorem náhodného vektoru $\mathbb{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$, se nazývá marginální rozdělení (marginální distribuční funkce, marginální pravděpodobnostní funkce, resp. marginální hustota).

- Je-li náhodný vektor $\mathbb{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ diskrétní se sdruženými pravděpodobnostmi

$$P(X_1 = \cdot, \dots, X_{i-1} = \cdot, X_i = \cdot, X_{i+1} = \cdot, \dots, X_n = \cdot),$$

kde náhodné veličiny X_l nabývají hodnot $x_{l,1}, \dots, x_{l,k_l}$ pro $l = 1, \dots, n$, pak marginální pravděpodobnosti náhodných veličin X_i jsou

$$P(X_i = x) = \sum_{j_1=1}^{k_1} \dots \sum_{j_{i-1}=1}^{k_{i-1}} \sum_{j_{i+1}=1}^{k_{i+1}} \dots \sum_{j_n=1}^{k_n} P(X_1 = x_{1,j_1}, \dots, X_{i-1} = x_{i-1,j_{i-1}}, \\ X_i = x, X_{i+1} = x_{i+1,j_{i+1}}, \dots, X_n = x_{n,j_n}).$$

- Je-li náhodný vektor $\mathbb{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ spojitý se sdruženou hustotou $f_{\mathbb{X}}(x_1, \dots, x_n)$, pak marginální hustota náhodných veličin X_i se získají jako $(n-1)$ -dimenzionální integrály

$$f_{X_i}(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{\mathbb{X}}(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n.$$

Uvažujme náhodný vektor $\mathbb{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$. Jeho základní charakteristiky jsou:

- 1 Vektor středních hodnot

$$\mathbb{E}\mathbb{X} = (\mathbb{E}X_1, \dots, \mathbb{E}X_n)^T.$$

- 2 Varianční (nazývaná občas také kovarianční) matice $\text{Var}\mathbb{X}$ s prvky

$$\text{cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}(X_i - \mathbb{E}X_i)(X_j - \mathbb{E}X_j), \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

- 3 Korelační matice $\text{Corr}\mathbb{X}$ s prvky

$$\text{corr}(X_i, X_j) = \frac{\text{cov}(X_i, X_j)}{\sqrt{\text{var}X_i}\sqrt{\text{var}X_j}}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Poznámka

Pro korelaci platí, že $-1 \leq \text{corr}(X, Y) \leq 1$.

Definice

Říkáme, že náhodné veličiny X_1, X_2, \dots, X_n jsou (vzájemně) nezávislé, jestliže pro každou r -tici indexů $\{i_1, i_2, \dots, i_r\} \subset \{1, 2, \dots, n\}, 1 \leq r \leq n$, a pro každé $x_{i_j} \in \mathbb{R}$ platí

$$P(\cap_{j=1}^r \{\omega : X_{i_j}(\omega) \leq x_{i_j}\}) = \prod_{j=1}^r P(\{\omega : X_{i_j}(\omega) \leq x_{i_j}\})$$

(neboli $P(X_{i_1} \leq x_{i_1}, \dots, X_{i_r} \leq x_{i_r}) = P(X_{i_1} \leq x_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(X_{i_r} \leq x_{i_r})$, tj. $F_{(X_{i_1}, \dots, X_{i_r})}(x_{i_1}, \dots, x_{i_r}) = F_{X_{i_1}}(x_{i_1}) \cdot \dots \cdot F_{X_{i_r}}(x_{i_r})$).

Poznámka

Analogicky jako u náhodných jevů můžeme i zde definovat nezávislost náhodných veličin X_1, X_2, \dots, X_n po dvou. Definici nezávislosti po dvou bychom dostali z uvedené definice pro $r = 2$.

Věta

Nechť $\mathbb{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ je diskrétní náhodný vektor. Náhodné veličiny X_1, X_2, \dots, X_n jsou nezávislé právě tehdy, když

$$P(X_1 = x_1^{(i)}, \dots, X_n = x_n^{(i)}) = \prod_{j=1}^n P(X_j = x_j^{(i)})$$

pro všechna $x^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$, $i = 1, 2, \dots$, kterých může \mathbb{X} nabývat.

Věta

Nechť $\mathbb{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ je spojitý náhodný vektor. Náhodné veličiny X_1, X_2, \dots, X_n jsou nezávislé právě tehdy, když

$$f_{\mathbb{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) \cdot \dots \cdot f_{X_n}(x_n), \quad \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Věta

Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny s konečnými středními hodnotami. Pak

- 1 $\mathbb{E}XY = (\mathbb{E}X)(\mathbb{E}Y)$.
- 2 *Jestliže navíc $\mathbb{E}X^2 < \infty$ a $\mathbb{E}Y^2 < \infty$, pak $\text{cov}(X, Y) = 0$.*

Poznámka

Jestliže $\text{cov}(X, Y) = 0$, pak říkáme, že náhodné veličiny jsou nekorelované. To však neimplikuje nezávislost!

Definice

Mějme náhodné veličiny X_1, X_2, X_3, \dots a náhodnou veličinu X definované na pravděpodobnostním prostoru (Ω, \mathcal{A}, P) .

- Říkáme, že X_n konverguje k X skoro jistě, jestliže

$$P\{\omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} = 1.$$

- Jestliže pro všechna $\varepsilon > 0$ platí, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\} = 0,$$

říkáme, že X_n konverguje k X v pravděpodobnosti.

Věta

Konvergence skoro jistě \Rightarrow konvergence v pravděpodobnosti.

Věta

Slabý zákon velkých čísel:

Nechť $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin se stejnou střední hodnotou μ a shodným rozptylem $\sigma^2 < \infty$. Pak pro $n \rightarrow \infty$ platí, že

$$\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) \rightarrow \mu$$

v pravděpodobnosti.

Věta

Silný zákon velkých čísel:

Nechť $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých, stejně rozdělených náhodných veličin se střední hodnotou $\mu < \infty$ a rozptylem $\sigma^2 < \infty$. Pak pro $n \rightarrow \infty$ platí, že

$$\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) \rightarrow \mu$$

skoro jistě (a tudíž i v pravděpodobnosti).

Věta

Nechť X_1, X_2, \dots jsou nezávislé, stejně rozdělené náhodné veličiny se střední hodnotou μ a konečným rozptylem σ^2 . Označme náhodnou veličinu

$$Z_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \quad n = 1, 2, \dots$$

a $F_n(x)$ distribuční funkci náhodné veličiny Z_n . Pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \Phi(x)$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$, kde $\Phi(x)$ je distribuční funkce normovaného normálního rozdělení $N(0, 1)$.

Poznámka

Centrální limitní věta (dále jen CLV) má mnoho verzí. Uvedená věta se nazývá Lévy-Lindebergova CLV.

- 1 Volba správného modelu
- 2 Odhady parametrů
 - 1 bodové
 - 2 intervalové
- 3 Testování hypotéz

- Necht' X_1, X_2, \dots, X_n jsou nezávislé náhodné veličiny s rozdělením $N(0, 1)$. Pak náhodná veličina

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i^2$$

má rozdělení χ_n^2 (čti "chí-kvadrát rozdělení s n stupni volnosti").

- Necht' X je náhodná veličina s rozdělením $N(0, 1)$ a Y na ní nezávislá náhodná veličina s rozdělením χ_n^2 . Pak náhodná veličina

$$Z = \frac{X}{\sqrt{Y}} \sqrt{n}$$

má rozdělení t_n (čti "Studentovo t-rozdělení s n stupni volnosti").

- Necht' U a V jsou nezávislé náhodné veličiny s rozděleními χ_n^2 , resp. χ_m^2 . Pak náhodná veličina

$$W = \frac{U/n}{V/m}$$

má rozdělení $F_{n,m}$ (čti "Fisherovo-Snedecorovo rozdělení s parametry n a m ").

Definice

Náhodný vektor $\mathbb{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ nezávislých, stejně rozdělených náhodných veličin s distribuční funkcí F_θ , která závisí na parametru θ , se nazývá náhodný výběr.

Definice

Funkce

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

náhodného výběru $\mathbb{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ se nazývá výběrový průměr a

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

se nazývá výběrový rozptyl. $S_n = \sqrt{S_n^2}$ je pak výběrová směrodatná odchylka.

Věta

Nechť $\mathbb{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ je náhodný výběr z rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$. Pak

- 1 výběrový průměr \bar{X}_n a výběrový rozptyl S_n^2 jsou nezávislé náhodné veličiny,
- 2 výběrový průměr \bar{X}_n má rozdělení $N(\mu, \sigma^2/n)$,
- 3 náhodná veličina $(n-1)S_n^2/\sigma^2$ má rozdělení $\chi_{(n-1)}^2$,
- 4 náhodná veličina $T = \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} \sqrt{n}$ má rozdělení $t_{(n-1)}$.

Definice

Necht' F je spojitá a monotónní distribuční funkce a $0 < \beta < 1$. Pak hodnotu z_β takovou, že $F(z_\beta) = \beta$, nazýváme β -kvantil rozdělení s distribuční funkcí F .

Poznámka

- 1 *Výraz β -kvantil používaný ve statistice je vlastně hodnota $q(\beta)$ kvantilové funkce q . Jestliže tedy distribuční funkce F není spojitá nebo není monotónní, pak β -kvantil můžeme dodefinovat analogicky k definici kvantilové funkce q .*

- 2 *Pro náhodnou veličinu X s distribuční funkcí F a kvantily z_β je*

$$P(z_{\alpha/2} < X < z_{1-\alpha/2}) = F(z_{1-\alpha/2}) - F(z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha.$$

- 3 *β -kvantily rozdělení používaných ve statistice budeme značit u_β pro normované normální rozdělení, $t_{\beta,n}$ pro rozdělení t_n a $\chi_{\beta,n}^2$ pro rozdělení χ_n^2 .*

Definice

Nechť $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ je realizace náhodného výběru $(X_1, X_2, \dots, X_n)^T$.
Pak

$$F_{emp}(x) = \frac{\#\{x_i : x_i \leq x\}}{n},$$

kde $\#$ značí počet prvků, se nazývá empirická distribuční funkce.

Definice

Nechť $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ je realizace náhodného výběru $(X_1, X_2, \dots, X_n)^T$,
 $F_{emp}(x)$ příslušná empirická distribuční funkce a z_β značí β -kvantil
náhodné veličiny s distribuční funkcí F_{emp} . Pak hodnoty $z_{1/4}$, $z_{1/2}$ a $z_{3/4}$
se nazývají 1.kvartil, 2.kvartil (též "medián"), resp. 3.kvartil. Nejčastěji
zatoupený prvek v realizaci náhodného výběru se nazývá modus.

Poznámka

Občas se 1.kvartil definuje jako $z^* = \max(x_i : F_{emp}(x_i) \leq 1/4)$ nebo
 $z^{**} = \min(x_i : F_{emp}(x_i) \geq 1/4)$, popř. jako $z^{***} = z^* + \frac{1}{4}(z^{**} - z^*)$.
Analogicky se pak definuje i 2. a 3.kvartil.

Sledovali jsme doby mezi příchody zákazníků (v minutách) a naměřili jsme těchto 21 hodnot:

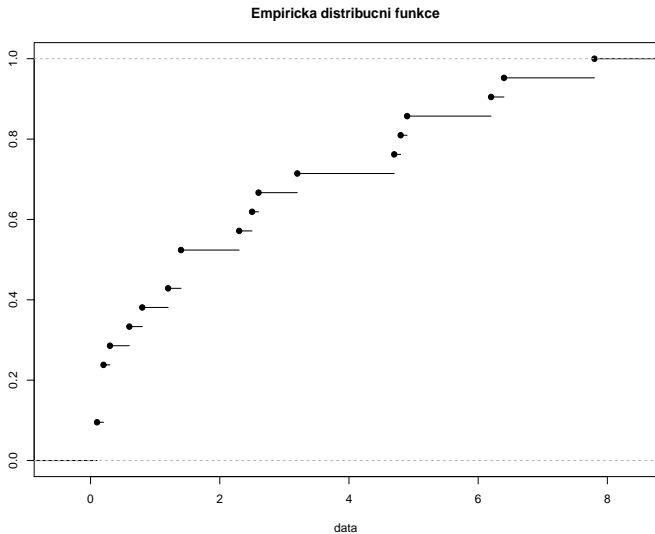
4.9, 6.2, 2.6, 0.6, 0.3, 2.3, 3.2, 1.4, 6.4, 4.8, 1.2
2.5, 0.2, 0.2, 0.8, 0.1, 0.1, 1.4, 7.8, 0.2, 4.7.

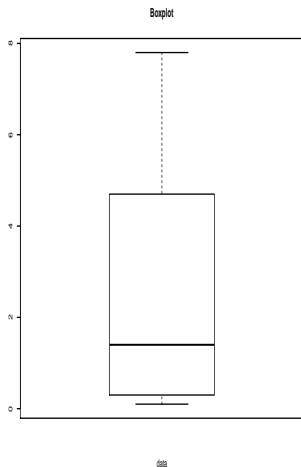
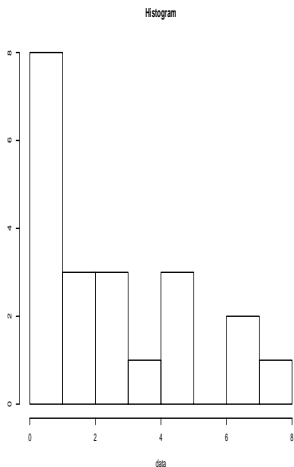
Pro přehlednost si hodnoty seřadíme od nejmenší po největší:

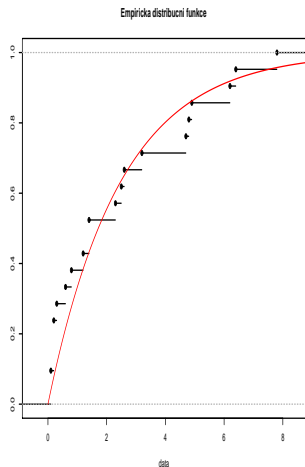
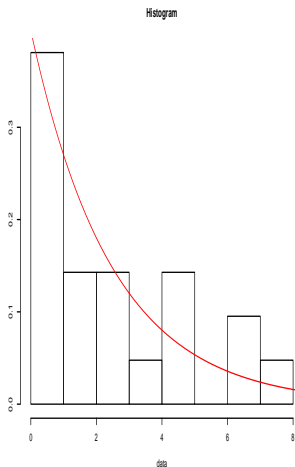
0.1, 0.1, 0.2, 0.2, 0.2, **0.3**, 0.6, 0.8, 1.2, 1.4, **1.4**,
2.3, 2.5, 2.6, 3.2, **4.7**, 4.8, 4.9, 6.2, 6.4, **7.8**.

Máme zde:

- výběrový průměr (pro danou realizaci) $\bar{X}_{21} = 2.471$,
- výběrový rozptyl (pro danou realizaci) $S_{21}^2 = 5.81$,
- výběrovou směrodatnou odchylku (pro danou realizaci) $S_{21} = 2.21$,
- 1.kvartil = 0.3, medián (tj. 2.kvartil) = 1.4 a 3.kvartil = 4.7,
- min = 0.1, max = 7.8, modus = 0.2.







Definice

Nechť $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ je realizace náhodného výběru $(X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ a rozdělení X_1, \dots, X_n závisí na parametru θ . Bodový odhad parametru θ je libovolná funkce $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ náhodného výběru $(X_1, X_2, \dots, X_n)^T$, jejíž předpis nezávisí na θ .

Poznámka

Pro jednoduchost si můžeme bodový odhad představit jako hodnotu $\hat{\theta}$ získanou z realizace $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ náhodného výběru $(X_1, X_2, \dots, X_n)^T$, kde tato hodnota co možná nejlépe odhaduje parametr θ . Jelikož však při opakování náhodného výběru získáváme různé realizace, můžeme pro každou z nich dostat jinou hodnotu odhadovaného parametru, tudíž bodový odhad je náhodná veličina.

Definice

Jestliže pro bodový odhad $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ parametru θ platí, že $\mathbb{E}\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n) = \theta$, pak tento odhad nazýváme *nestranným*.

Definice

Jestliže pro bodový odhad $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ parametru θ platí, že

- 1 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n) = \theta$ (je tzv. *asymptoticky nestranný*),
- 2 $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{var}\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0$,

pak tento odhad nazýváme *konzistentním*.

Definice

Jestliže existuje více *nestranných bodových odhadů*, pak ten s *nejmenším rozptylem* $\text{var}\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ nazýváme *eficientním*.

Nechť $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ je realizace náhodného výběru $(X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ a rozdělení náhodných veličin X_1, \dots, X_n závisí na parametrech $\theta_1, \dots, \theta_k \in \Theta$, kde Θ je množina parametrů.

Předpoklad: $\mathbb{E}X_1^i < \infty \quad \forall i = 1, \dots, k$ a $\mathbb{E}X_1^i$ závisí na $\theta_1, \dots, \theta_k$.

Metoda: Položíme do rovnosti teoretické a odhadnuté momenty, tj.

$$\mathbb{E}X_1^i = m_i, \quad \text{kde} \quad m_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j^i \quad \text{pro všechna} \quad i = 1, \dots, k.$$

Takto získáme soustavu k rovnic o k neznámých $\theta_1, \dots, \theta_k$, jejichž řešením jsou hledané odhady parametrů $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_k$.

Alternativa: Je-li $k = 2$, pak místo i -tých momentů, $i = 1, 2$, můžeme položit $\mathbb{E}X_1 = \bar{x}_n$ a $\text{var}X_1 = s_n^2$, kde \bar{x}_n a s_n^2 jsou hodnoty výběrového průměru, resp. výběrového rozptylu, získané z dat.

Výhoda: Jednoduchost.

Nevýhoda: Řešení nemusí existovat.

Nechť $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ je realizace náhodného výběru $(X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ a rozdělení (tj. $P_\theta(X_1 = \cdot)$) v diskrétním případě nebo hustota f_θ ve spojitém případě) náhodných veličin X_1, \dots, X_n závisí na parametru θ .

Definice

Hodnota $\hat{\theta}$ se nazývá maximálně věrohodným odhadem, jestliže

$$\prod_{i=1}^n P_{\hat{\theta}}(X_1 = x_i) = \max_{\theta \in \Theta} \prod_{i=1}^n P_\theta(X_1 = x_i),$$

resp.

$$\prod_{i=1}^n f_{\hat{\theta}}(x_i) = \max_{\theta \in \Theta} \prod_{i=1}^n f_\theta(x_i).$$

Poznámka

Obvykle je jednodušší pracovat s logaritmy těchto součinů, abychom při hledání extrému funkce derivovali součet, nikoliv součin.

Pro náhodný výběr z diskrétního rozdělení:

- 1 Zkonstruujeme věrohodnostní funkci $L(\theta) = \prod_{i=1}^n P_{\theta}(X_1 = x_i)$.
- 2 Zkonstruujeme logaritmicko-věrohodnostní funkci $l(\theta) = \log L(\theta) = \sum_{i=1}^n \log P_{\theta}(X_1 = x_i)$.
- 3 Položíme $\frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta} = 0$.
- 4 Řešením rovnice $\frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta} = 0$ je hledaný maximálně věrohodný odhad $\hat{\theta}$.

Pro náhodný výběr ze spojitého rozdělení:

- 1 Zkonstruujeme věrohodnostní funkci $L(\theta) = \prod_{i=1}^n f_{\theta}(x_i)$.
- 2 Zkonstruujeme logaritmicko-věrohodnostní funkci $l(\theta) = \log L(\theta) = \sum_{i=1}^n \log f_{\theta}(x_i)$.
- 3 Položíme $\frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta} = 0$.
- 4 Řešením rovnice $\frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta} = 0$ je hledaný maximálně věrohodný odhad $\hat{\theta}$.

Definice

Nechť $(X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ je náhodný výběr a $\alpha \in (0, 1)$.

- 1 Dvojice $(\theta_L^*(X_1, \dots, X_n), \theta_U^*(X_1, \dots, X_n))$ se nazývá $(1 - \alpha) \cdot 100$ % intervalový odhad (nebo též interval spolehlivosti; označení $(1 - \alpha) \cdot 100$ %-CI) parametru θ , jestliže

$$P(\theta_L^*(X_1, \dots, X_n) < \theta < \theta_U^*(X_1, \dots, X_n)) = 1 - \alpha.$$

- 2 $(\theta_D^*(X_1, \dots, X_n))$ se nazývá dolní $(1 - \alpha) \cdot 100$ % intervalový odhad parametru θ , jestliže

$$P(\theta_D^*(X_1, \dots, X_n) < \theta) = 1 - \alpha.$$

- 3 $(\theta_H^*(X_1, \dots, X_n))$ se nazývá horní $(1 - \alpha) \cdot 100$ % intervalový odhad parametru θ , jestliže

$$P(\theta_H^*(X_1, \dots, X_n) > \theta) = 1 - \alpha.$$

Věta

Nechť $(X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ je náhodný výběr z rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$ je neznámý parametr a $\sigma^2 > 0$ je známá konstanta. Pak

- 1 $(\bar{X}_n - u_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + u_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ je $(1 - \alpha) \cdot 100$ % intervalový odhad parametru μ ,
- 2 $\bar{X}_n - u_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ je dolní $(1 - \alpha) \cdot 100$ % intervalový odhad parametru μ ,
- 3 $\bar{X}_n + u_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ je horní $(1 - \alpha) \cdot 100$ % intervalový odhad parametru μ .

Věta

Nechť $(X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ je náhodný výběr z rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ a oba parametry $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$ jsou neznámé. Pak

- 1 $(\bar{X}_n - t_{1-\alpha/2, n-1} \frac{S_n}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + t_{1-\alpha/2, n-1} \frac{S_n}{\sqrt{n}})$ je $(1 - \alpha) \cdot 100$ % intervalový odhad parametru μ ,
- 2 $\bar{X}_n - t_{1-\alpha, n-1} \frac{S_n}{\sqrt{n}}$ je dolní $(1 - \alpha) \cdot 100$ % intervalový odhad parametru μ ,
- 3 $\bar{X}_n + t_{1-\alpha, n-1} \frac{S_n}{\sqrt{n}}$ je horní $(1 - \alpha) \cdot 100$ % intervalový odhad parametru μ .
- 4 $\left(\frac{(n-1)S_n^2}{\chi_{1-\alpha/2, n-1}^2}, \frac{(n-1)S_n^2}{\chi_{\alpha/2, n-1}^2} \right)$ je $(1 - \alpha) \cdot 100$ % intervalový odhad parametru σ^2 ,
- 5 $\frac{(n-1)S_n^2}{\chi_{1-\alpha, n-1}^2}$ je dolní $(1 - \alpha) \cdot 100$ % intervalový odhad parametru σ^2 ,
- 6 $\frac{(n-1)S_n^2}{\chi_{\alpha, n-1}^2}$ je horní $(1 - \alpha) \cdot 100$ % intervalový odhad parametru σ^2 .

Věta

Nechť $(X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ je náhodný výběr z libovolného rozdělení s rozptylem $0 < \sigma^2 < \infty$. Pak asymptotický $(1 - \alpha) \cdot 100$ % intervalový odhad střední hodnoty $\mu = \mathbb{E}X$ je

$$\left(\bar{X}_n - u_{1-\alpha/2} \frac{S_n}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + u_{1-\alpha/2} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \right).$$

Důkaz

Připomeňme, že pro velká n platí $\frac{S_n}{\sigma} \rightarrow 1$, tj. S_n je aproximace σ . Z CLV víme, že $\frac{\sum X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$ má přibližně (asymptoticky) normální rozdělení, tj.

$$P(u_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\sum X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$$

$$P(u_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\sum X_i - n\mu}{\sqrt{n}S_n} \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\frac{\sum X_i}{n} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq \mu \geq \frac{\sum X_i}{n} + u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\bar{X}_n + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq \mu \geq \bar{X}_n - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha,$$

což je definice $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ intervalového odhadu parametru μ .

Věta

- 1 Necht' $(X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ je náhodný výběr z rozdělení $Alt(p)$, $0 < p < 1$. Pak $(1 - \alpha) \cdot 100$ % intervalový odhad parametru p je

$$\left(\bar{X}_n - u_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)}{n}}, \bar{X}_n + u_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)}{n}} \right).$$

- 2 Necht' $(X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ je náhodný výběr z rozdělení $Po(\lambda)$, $\lambda > 0$. Pak $(1 - \alpha) \cdot 100$ % intervalový odhad parametru λ je

$$\left(\bar{X}_n - u_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{X}_n}{n}}, \bar{X}_n + u_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{X}_n}{n}} \right).$$

Důkaz

Důkaz plyne z předešlé věty a faktu, že pro alternativní rozdělení je $\mathbb{E}X = p$, $varX = p(1 - p)$ a pro Poissonovo rozdělení je $\mathbb{E}X = varX = \lambda$.

- Necht' $(X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ je náhodný výběr z rozdělení, které závisí na parametru $\theta \in \Theta$.
- Tvrzení, že θ patří do nějaké množiny Θ_0 , se nazývá nulová hypotéza (značíme $H_0 : \theta \in \Theta_0$).
- Na základě náhodného výběru $(X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ testujeme nulovou hypotézu vůči alternativní hypotéze $H_A : \theta \in \Theta \setminus \Theta_0$. K tomu stanovíme množinu W (tzv. kritický obor) tak, že H_0 zamítáme ve prospěch H_A , jestliže $\mathbb{X} \in W$, v opačném případě H_0 ve prospěch H_A nezamítáme.

Poznámka

Většinou testujeme $H_0 : \theta = \theta_0$, kde θ_0 je konkrétní hodnota, takže přirozenou alternativou je $H_A : \theta \neq \theta_0$. Občas však dává větší smysl testovat H_0 vůči $H_A : \theta > \theta_0$ nebo $H_A : \theta < \theta_0$, jelikož opačná situace nedává v tu chvíli praktický smysl.

Při testování mohou nastat následující situace:

- H_0 platí a test ji nezamítá ✓
- H_0 neplatí a test ji zamítá ✓
- H_0 platí a test ji zamítá → chyba prvního druhu
- H_0 neplatí a test ji nezamítá → chyba druhého druhu

Testovací hladina:

Zvolíme hodnotu α (obvykle 0.05, někdy 0.01 nebo 0.1) a kritický obor W konstruujeme tak, aby chyba prvního druhu nebyla větší než (obvykle byla rovna) α . Takové α se nazývá testovací hladina.

- Necht' $(X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ je náhodný výběr z rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$, kde $\sigma^2 > 0$ a ani jeden parametr není známý. Víme, že náhodná veličina

$$T = \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} \sqrt{n} \sim t_{n-1}.$$

- Testování $H_0 : \mu = \mu_0$ vůči $H_A : \mu \neq \mu_0$ tedy probíhá následovně:
 - 1 Spočítáme tzv. testovou statistiku (hodnotu) $T_0 = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{S_n} \sqrt{n}$.
 - 2 Jestliže $|T_0| \geq t_{1-\alpha/2, n-1}$, zamítáme H_0 ve prospěch H_A , v opačném případě H_0 ve prospěch H_A nezamítáme.
- Testování $H_0 : \mu = \mu_0$ vůči $H_A : \mu > \mu_0$ je analogické:
 - 1 Spočítáme hodnotu $T_0 = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{S_n} \sqrt{n}$.
 - 2 Je-li $T_0 \geq t_{1-\alpha, n-1}$, zamítáme H_0 ve prospěch H_A , v opačném případě H_0 ve prospěch H_A nezamítáme.
- Nulová hypotéza $H_0 : \mu = \mu_0$ vůči $H_A : \mu < \mu_0$ je pak zamítnutá v případě, že $T_0 \leq t_{\alpha, n-1} = -t_{1-\alpha, n-1}$.

- Používá se tehdy, když pozorujeme párový znak na jednom objektu (např. dioptrie na levém a pravém oku, dobu zpracování stejných dat jednou a druhou metodou atd.).
- Máme náhodný výběr $(Y_1, Z_1), (Y_2, Z_2), \dots, (Y_n, Z_n)^T$ a testujeme $H_0 : \mathbb{E}Y_i - \mathbb{E}Z_i = \mu_0$ (většinou $\mu_0 = 0$, tj. shodu středních hodnot) vůči některé z alternativních hypotéz zmíněných výše.

- Položíme

$$X_1 = Y_1 - Z_1, \dots, X_n = Y_n - Z_n$$

a jestliže X_1, \dots, X_n pochází z normálního rozdělení, použijeme jednovýběrový t -test popsany výše.

- Uvažujme dva nezávislé výběry, a to $(X_1, X_2, \dots, X_m)^T$ z rozdělení $N(\mu_1, \sigma^2)$ a $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)^T$ z $N(\mu_2, \sigma^2)$, kde $\sigma^2 > 0$.
- Označme \bar{X} výběrový průměr náhodného výběru $(X_1, X_2, \dots, X_m)^T$, \bar{Y} výběrový průměr $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)^T$, S_X^2 výběrový rozptyl $(X_1, X_2, \dots, X_m)^T$ a S_Y^2 výběrový rozptyl $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)^T$.
- Náhodná veličina

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{(m-1)S_X^2 + (n-1)S_Y^2}} \sqrt{\frac{mn(m+n-2)}{m+n}} \sim t_{m+n-2}.$$

- Testování $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \mu_0$ vůči $H_A : \mu_1 - \mu_2 \neq \mu_0$ tedy probíhá následovně:

- 1 Spočteme $T_0 = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \mu_0}{\sqrt{(m-1)S_X^2 + (n-1)S_Y^2}} \sqrt{\frac{mn(m+n-2)}{m+n}}$.

- 2 Je-li $|T_0| \geq t_{1-\alpha/2, m+n-2}$, zamítáme H_0 ve prospěch H_A , v opačném případě H_0 ve prospěch H_A nezamítáme.

- Uvažujme dva nezávislé výběry, a to $(X_1, X_2, \dots, X_m)^T$ z rozdělení $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ a $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)^T$ z $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, kde $\sigma_1^2 > 0$ a $\sigma_2^2 > 0$.
- Označme S_X^2 výběrový rozptyl $(X_1, X_2, \dots, X_m)^T$ a S_Y^2 výběrový rozptyl $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)^T$.
- Náhodná veličina

$$F = \frac{S_X^2}{S_Y^2} \sim F_{m-1, n-1}.$$

- Testování $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ vůči $H_A : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ tedy probíhá následovně:
 - 1 Spočteme $F_0 = \frac{S_X^2}{S_Y^2}$.
 - 2 Je-li $F_0 \leq F_{\alpha/2, m-1, n-1}$ nebo $F_0 \geq F_{1-\alpha/2, m-1, n-1}$, zamítáme H_0 ve prospěch H_A , v opačném případě H_0 ve prospěch H_A nezamítáme.

Multinomické rozdělení

- Je zobecněním rozdělení binomického ve smyslu, že uvažujeme n -krát opakovaný náhodný pokus, který může pokaždé skončit nějakým z výsledků A_1, A_2, \dots, A_k (nikoliv pouze jedním ze dvou výsledků "úspěch" nebo "neúspěch").
- Pro $i = 1, \dots, k$ označme $p_i = P(A_i)$ (kde zřejmě $\sum_{i=1}^k p_i = 1$) a X_i počet výsledků A_i ve výše zmíněných n pokusech. Pak

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k) = \frac{n!}{x_1! \dots x_k!} p_1^{x_1} \dots p_k^{x_k}, \quad \text{kde } \sum_{i=1}^k x_i = n.$$

- Rozdělení náhodného vektoru $(X_1, X_2, \dots, X_k)^T$ se nazývá multinomickým.

- Testujeme nulovou hypotézu

H_0 : "marginální pravděpodobnosti jsou rovny hodnotám p_1, \dots, p_k "
proti alternativní hypotéze

H_A : "alespoň jedno p_i je jiné".

- Test probíhá následovně:

① Spočteme hodnotu $\chi_0^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(X_i - np_i)^2}{np_i}$.

② Jestliže $\chi_0^2 > \chi_{1-\alpha, k-1}^2$, zamítáme H_0 ve prospěch H_A , v opačném případě H_0 ve prospěch H_A nezamítáme.

- Mějme náhodný výběr $(Y_1, Z_1), (Y_2, Z_2), \dots, (Y_n, Z_n)$, kde pro $k = 1, \dots, n$ nabývají Y_k a Z_k hodnot $1, \dots, r$, resp. $1, \dots, c$.
- Testujeme nulovou hypotézu H_0 : "Y a Z jsou vzájemně nezávislé" vůči alternativní hypotéze H_A : "Y a Z nejsou nezávislé".
- Označme n_{ij} počet dvojic $(Y_k = i, Z_k = j)$. Pak matici o rozměrech $r \times c$ s prvky n_{ij} nazýváme kontingenční tabulkou a prvkům n_{ij} říkáme sdružené četnosti.
- Marginalní četnosti jsou

$$n_{i.} = \sum_j n_{ij}, \quad n_{.j} = \sum_i n_{ij}.$$

- Test nezávislosti probíhá následovně:
 - 1 Spočteme hodnotu

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c \frac{(n_{ij} - \frac{n_{i.} \cdot n_{.j}}{n})^2}{\frac{n_{i.} \cdot n_{.j}}{n}}.$$

- 2 Jestliže $\chi_0^2 \geq \chi_{1-\alpha, (r-1)(c-1)}^2$, zamítáme H_0 ve prospěch H_A , v opačném případě H_0 ve prospěch H_A nezamítáme.

Definice

Nechť (Ω, \mathcal{A}, P) je pravděpodobnostní prostor a $T \subset \mathbb{R}$. Rodina reálných náhodných veličin $\{X_t, t \in T\}$ definovaných na (Ω, \mathcal{A}, P) se nazývá náhodný (nebo také stochastický) proces.

Definice

Je-li $T = \mathbb{Z}$ nebo $T = \mathbb{N}$, mluvíme o náhodném procesu s diskrétním časem. Je-li $T = [a, b]$, kde $-\infty \leq a < b \leq \infty$, mluvíme o náhodném procesu se spojitým časem.

Definice

Dvojice (S, \mathcal{E}) , kde S je množina hodnot náhodných veličin X_t a \mathcal{E} je σ -algebra na množině S , se nazývá stavový prostor.

Definice

Pokud náhodné veličiny X_t nabývají pouze diskrétních hodnot, mluvíme o náhodném procesu s diskrétními stavy. Pokud náhodné veličiny X_t nabývají spojitých hodnot, mluvíme o náhodném procesu se spojitými stavy.

Náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ můžeme chápat jako funkci dvou proměnných ω a t . Pro pevné t je tato funkce náhodnou veličinou, pro pevné ω se jedná o funkci jedné reálné proměnné t .

Definice

Mějme pevné $\omega \in \Omega$. Pak funkce $t \rightarrow X_t$ se nazývá trajektorie procesu $\{X_t, t \in T\}$.

Definice

Proces se nazývá spojitý, jsou-li všechny jeho trajektorie spojité.

Definice

Nechť $\{X_t, t \in T\}$ je náhodný proces takový, že pro každé $t \in T$ existuje střední hodnota $\mathbb{E}X_t$. Potom funkce $\mu_t = \mathbb{E}X_t$ definovaná na T se nazývá střední hodnota procesu $\{X_t\}$. Jestliže platí $\mathbb{E}|X_t|^2 < \infty$ pro všechna $t \in T$, potom funkce dvou proměnných definovaná na $T \times T$ předpisem $R(s, t) = \mathbb{E}(X_s - \mu_s)(X_t - \mu_t)$ se nazývá autokovarianční funkce procesu $\{X_t\}$. Hodnota $R(t, t)$ se nazývá rozptyl procesu $\{X_t\}$ v čase t .

Definice

Řekneme, že náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ je slabě stacionární, jestliže $R(s, t)$ je funkcí pouze rozdílu $s - t$, tj.

$$R(s, t) = \tilde{R}(s - t)$$

Důsledek:

$$R(s, t) = R(s + h, t + h)$$

pro každé $h \in \mathbb{R}$ takové, že $s + h \in T$ a $t + h \in T$.

Označme

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = P(X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n).$$

Definice

Řekneme, že náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ je striktně stacionární, jestliže pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, pro libovolná reálná x_1, \dots, x_n a pro libovolná reálná t_1, \dots, t_n a h taková, že $t_k \in T$, $t_k + h \in T$, $1 \leq k \leq n$, platí

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{t_1+h, \dots, t_n+h}(x_1, \dots, x_n). \quad (2)$$

Poznámka

Pro procesy s diskrétními stavy je vztah (2) je ekvivalentní vztahu

$$P(X_{t_1} = x_1, \dots, X_{t_n} = x_n) = P(X_{t_1+h} = x_1, \dots, X_{t_n+h} = x_n).$$

Definice

Nechť náhodné procesy $\{X_t, t \in T\}$ a $\{Y_t, t \in T\}$ jsou definované na stejném pravděpodobnostním prostoru s hodnotami ve stejném stavovém prostoru. Pak

- 1 $\{X_t\}$ a $\{Y_t\}$ jsou stochasticky ekvivalentní, jestliže

$$P(X_t = Y_t) = P(\omega : X_t(\omega) = Y_t(\omega)) = 1, \quad \forall t \in T.$$

Říkáme také, že proces $\{X_t\}$ je stochastickou verzí, popř. modifikací, procesu $\{Y_t\}$.

- 2 $\{X_t\}$ a $\{Y_t\}$ jsou nerozlišitelné, jestliže

$$P(X_t = Y_t, \forall t \in T) = P(\omega : X_t(\omega) = Y_t(\omega), \forall t \in T) = 1.$$

Mějme

- pravděpodobnostní prostor (Ω, \mathcal{A}, P) ,
- na něm posloupnost náhodných veličin $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$,
- stavový prostor (S, \mathcal{E}) , kde množina S je konečná nebo spočetná, bez újmy na obecnosti předpokládejme $S = \{0, 1, \dots, N\}$, resp. $S = \{0, 1, \dots\}$.

Definice

Posloupnost náhodných veličin $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ nazveme Markovský řetězec s diskretním časem, jestliže

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

pro všechna $n = 0, 1, \dots$ a všechna $i, j, i_{n-1}, \dots, i_0 \in S$ taková, že $P(X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) > 0$.

Nechť Y_1, Y_2, \dots jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny nabývající hodnot ± 1 s pravděpodobnostmi $1/2$.

Definujme

$$X_0 = 0$$
$$X_n = \sum_{i=1}^n Y_i.$$

Pak posloupnost (proces, řetězec) $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ se nazývá *náhodná procházka*.

Definice

Podmíněné pravděpodobnosti

- 1 $P(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij}(n, n+1)$ nazveme *pravděpodobnostmi přechodu ze stavu i v čase n do stavu j v čase $n+1$ nebo také pravděpodobnostmi přechodu 1.řádu;*
- 2 $P(X_{n+m} = j | X_n = i) = p_{ij}(n, n+m)$ nazveme *pravděpodobnostmi přechodu ze stavu i v čase n do stavu j v čase $n+m$ nebo také pravděpodobnostmi přechodu m -tého řádu.*

Definice

Jestliže pravděpodobnosti přechodu $p_{ij}(n, n+m)$ nezávisí na časových okamžicích n a $n+m$, ale pouze na rozdílu m , nazývá se příslušný markovský řetězec homogenní.

- Uvažujme homogenní řetězec a označme $p_{ij} := p_{ij}(n, n + 1)$.
- Tyto prvky lze seřadit do čtvercové matice $P = \{p_{ij}, i, j \in S\}$, pro niž zřejmě platí

$$p_{ij} \geq 0, \forall i, j \in S \quad \text{a} \quad \sum_{j \in S} p_{ij} = 1, \forall i \in S.$$

Definice

Matice $P = \{p_{ij}, i, j \in S\}$ se nazývá matice pravděpodobností přechodu.

Označme dále

$$p_i = P(X_0 = i), \quad \forall i \in S,$$

pro které zřejmě platí

$$p_i \geq 0, \forall i \in S \quad \text{a} \quad \sum_{i \in S} p_i = 1.$$

Definice

Vektor $p = \{p_i, i \in S\}$ se nazývá počáteční rozdělení markovského řetězce.

Lze ukázat (Věta o násobení pravděpodobnosti), že

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) = p_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i_n}.$$

Označme dále $p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$ a definujme pro přirozené $n \geq 1$ postupně

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj}. \quad (3)$$

Lze ukázat, že $p_{ij}^{(n)} \leq 1$ a navíc pro matice pravděpodobností přechodů platí

$$P^{(2)} = P \cdot P = P^2 \text{ a obecně } P^{(n+1)} = P^{(n)} \cdot P = P \cdot P^{(n)} = P^{n+1}.$$

Věta

Nechť $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ je homogenní markovský řetězec s maticí přechodu P . Potom pro pravděpodobnosti přechodu n -tého řádu platí

$$P(X_{m+n} = j | X_m = i) = p_{ij}^{(n)}, \quad \forall i, j \in S$$

pro všechna přirozená m a n a pro $P(X_m = i) > 0$.

Vztah (3) lze zobecnit. Toto zobecnění se nazývá

Chapman-Kolmogorovova rovnost

definována jako

$$p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)},$$

zapsáno maticově

$$P^{(m+n)} = P^{(m)} \cdot P^{(n)}.$$

- Vychází-li řetězec $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ ze stavu j , tj. $P(X_0 = j) = 1$, pak označíme

$$P(\cdot | X_0 = j) = P_j(\cdot).$$

- Definujme náhodnou veličinu

$$\tau_j = \inf\{n > 0 : X_n = j\}$$

čas prvního návratu řetězce do stavu j .

- Střední hodnotu doby prvního návratu označíme $\mu_j = \mathbb{E}[\tau_j | X_0 = j]$.
- Největší společný dělitel čísel $n \geq 1$, pro které $p_{jj}^{(n)} > 0$, označíme d_j .

Definice

Stav j markovského řetězce se nazývá trvalý, jestliže

$$P_j(\tau_j < \infty) = 1.$$

Stav j markovského řetězce se nazývá přechodný, jestliže

$$P_j(\tau_j = \infty) > 0.$$

Definice

Trvalý stav j markovského řetězce se nazývá nenulový, jestliže $\mu_j < \infty$ a nulový, jestliže $\mu_j = \infty$.

Definice

Je-li $d_j > 1$, stav j markovského řetězce se nazývá periodický s periodou d_j , je-li $d_j = 1$, stav j markovského řetězce se nazývá neperiodický.

Věta

- a) Necht' j je přechodný stav. Potom $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0, \forall i \in S$.
- b) Necht' j je trvalý nulový stav. Potom $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0, \forall i \in S$.
- c) Necht' j je trvalý nenulový a neperiodický stav. Potom $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{jj}^{(n)} = \frac{1}{\mu_j}$.
- d) Necht' j je trvalý nenulový stav s periodou d_j . Potom $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{jj}^{(nd_j)} = \frac{d_j}{\mu_j}$.

Věta

Trvalý stav j je nulový právě tehdy, když $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{jj}^{(n)} = 0$.

Uvažujme nyní řetězec s množinou přechodných stavů R a definujme náhodnou veličinu

$$\tau = \inf\{n \geq 0 : X_n \notin R\}$$

značící čas výstupu z množiny přechodných stavů.

Věta

V řetězci s konečně mnoha stavy je

$$P_j(\tau = \infty) = 0, \quad j \in R.$$

Definice

Řekneme, že stav j je dosažitelný ze stavu i , jestliže existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $p_{ij}^{(n)} > 0$. Jestliže $p_{ij}^{(n)} = 0$, pro všechna $n \in \mathbb{N}$, pak říkáme, že stav j je nedosažitelný ze stavu i .

Definice

Množina stavů C se nazývá uzavřená, jestliže žádný stav vně C není dosažitelný z žádného stavu uvnitř C .

Definice

Množina stavů C se nazývá komponentou, jestliže žádný stav vně C není dosažitelný z žádného stavu uvnitř C a opačně, a přitom všechny stavy uvnitř komponenty jsou vzájemně dosažitelné.

Věta

Množina stavů je uzavřená právě tehdy, je-li $p_{ij} = 0$ pro všechna $i \in C, j \notin C$.

Definice

Markovský řetězec se nazývá nerozložitelný, jestliže každý jeho stav je dosažitelný z každého jiného stavu. V opačném případě je řetězec rozložitelný.

Definice

Je-li jednobodová množina stavů $\{j\}$ uzavřená, tj. je-li $p_{jj} = 1$, pak se stav j nazývá absorpční.

Definice

Řetězec s konečně mnoha stavy, jehož všechny trvalé stavy jsou absorpční, se nazývá absorpční řetězec.

Definice

Nechť $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ je homogenní řetězec s množinou stavů S a maticí pravděpodobností přechodu P . Nechť $\pi = \{\pi_j, j \in S\}$ je nějaké pravděpodobnostní rozdělení na množině S , tj.

$\pi_j \geq 0, j \in S, \sum_{j \in S} \pi_j = 1$. Potom π se nazývá stacionární rozdělení daného řetězce, jestliže platí

$$\pi^T = \pi^T P,$$

neboli

$$\pi_j = \sum_{k \in S} \pi_k p_{kj}, j \in S.$$

Věta

Nechť počáteční rozdělení homogenního markovského řetězce je stacionární. Pak je tento řetězec striktně stacionární a pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$p_j(n) = P(X_n = j) = \pi_j, \quad j \in S,$$

kde π_j jsou počáteční stacionární pravděpodobnosti.

Věta

Pro nerozložitelný markovský řetězec platí

- 1 *Jsou-li všechny jeho stavy přechodné nebo všechny trvalé nulové, stacionární rozdělení neexistuje.*
- 2 *Jsou-li všechny jeho stavy trvalé nenulové, stacionární rozdělení existuje a je jednoznačné.*
 - 1 *Jsou-li všechny stavy neperiodické, potom pro všechna $i, j \in S$*

$$\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} > 0 \quad a \quad \pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_j(n) > 0.$$

- 2 *Jsou-li všechny stavy periodické, potom pro všechna $i, j \in S$*

$$\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_{ij}^{(k)} > 0 \quad a \quad \pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_j(k) > 0.$$

- 3 *V nerozložitelném řetězci s konečně mnoha stavy stacionární rozdělení existuje.*

- Uvažujme rozložitelný markovský řetězec s konečně mnoha stavy $j \in S$, který lze rozdělit na K komponent.
- Existuje permutace těchto stavů $\tilde{j} = perm(j)$ pro všechna $j \in S$ taková, že matice pravděpodobností přechodu pro stavy \tilde{j} je tvaru

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & P_K \end{pmatrix},$$

kde všechny matice P_k , $k = 1, \dots, K$, jsou stochastické.

- Označme $\pi^{(k)}$ stacionární rozdělení pro řetězec s maticí pravděpodobností přechodu P_k , $k = 1, \dots, K$.
- Pak Markovský řetězec s maticí pravděpodobností přechodu P má stacionární rozdělení

$$\pi = (c_1 \pi^{(1)}, \dots, c_K \pi^{(K)}),$$

kde $0 \leq c_k \leq 1$ pro všechna $k = 1, \dots, K$ a $\sum_{k=1}^K c_k = 1$.

- Uvažujme rozložitelný markovský řetězec se stavy $j \in S$, z nichž právě m je absorpčních.
- Existuje permutace těchto stavů $\tilde{j} = perm(j)$ pro všechna $j \in S$ taková, že matice pravděpodobností přechodu pro stavy \tilde{j} je tvaru

$$P = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_m & 0 \\ R & Q \end{pmatrix},$$

kde \mathbb{I}_m je jednotková matice typu $m \times m$.

- Pak

$$P^\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_m & 0 \\ M & 0 \end{pmatrix},$$

kde $M = FR$ a $F = (\mathbb{I}_{|S|-m} + Q + Q^2 + Q^3 + \dots) = (\mathbb{I}_{|S|-m} - Q)^{-1}$ je tzv. fundamentální matice.

- Prvky p_{ij} , $i = m + 1, \dots, |S|$, $j = 1, \dots, m$ (tj. prvky matice M) vyjadřují pravděpodobnosti, že řetězec, který vyšel ze stavu i , skončí v absorpčním stavu j .

Definice

Systém celočíselných náhodných veličin $\{X_t, t \geq 0\}$ definovaných na pravděpodobnostním prostoru (Ω, \mathcal{A}, P) nazveme markovský řetězec se spojitým časem, jestliže

$$P(X_t = j | X_s = i, X_{t_n} = i_n, \dots, X_{t_1} = i_1) = P(X_t = j | X_s = i)$$

pro všechna $0 \leq t_1 < \dots < t_n < s < t$ a všechna $i, j, i_n, \dots, i_1 \in S$ taková, že $P(X_s = i, X_{t_n} = i_n, \dots, X_{t_1} = i_1) > 0$.

- $P(X_t = j | X_s = i) = p_{ij}(s, t)$ nazveme pravděpodobnostmi přechodu ze stavu i v čase s do stavu j v čase t ;
- pro homogenní řetězec, kde pravděpodobnosti přechodu závisí pouze na rozdílech časů, budeme značit $p_{ij}(s, s + t)$ jako $p_{ij}(t)$;
- absolutní pravděpodobnosti budeme značit $p_j(t) = P(X_t = j), j \in S$ a $p_j(0) = P(X_0 = j), j \in S$ pak budou počáteční pravděpodobnosti.

- Pro každé t je $P(t) = \{p_{ij}(t), i, j \in S\}$ čtvercová matice \rightarrow systém matic pravděpodobností přechodu $\{P(t), t \geq 0\}$.
- Zřejmě platí: $\{P(0) = I\}$, kde I je jednotková matice.
- Dále dostáváme

$$p_j(t) = \sum_{i \in S} p_i(0) p_{ij}(t) \quad \forall j \in S,$$

zapsáno maticově

$$p(t)^T = p(0)^T \cdot P(t).$$

Ten lze zobecnit na

$$p_{ij}(s+t) = \sum_{k \in S} p_{ik}(s) p_{kj}(t) \quad \forall i, j \in S,$$

zapsáno maticově

$$P(s+t) = P(s) \cdot P(t),$$

což je **Chapman-Kolmogorovova rovnost**.

V dalším textu budeme předpokládat, že

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} p_{ij}(t) = \delta_{ij}, \quad i, j \in S,$$

kde δ_{ij} značí Dirackovu funkci, tj. $\delta_{ij} = 1$ pro $i = j$ a $\delta_{ij} = 0$ jinak. Tento předpoklad společně se skutečností, že $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$ znamená, že řetězec je zprava spojitý v 0.

Dále si označme

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1 - p_{ii}(h)}{h} := \lambda_i \quad \text{a} \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{p_{ij}(h)}{h} := \lambda_{ij} \quad \text{pro } i \neq j. \quad (4)$$

Definice

Nezáporná čísla λ_{ij} z (4) se nazývají intenzity přechodu, číslo λ_i z (4) je pak celková intenzita. Matice $\Lambda = \{\lambda_{ij}, i, j \in S\}$, kde $\lambda_{ii} = -\lambda_i$ se nazývá matice intenzit přechodu.

Věta

Pro homogenní markovský řetězec platí

$$P(X_t = i \text{ pro } t \in (s, s + h) | X_s = i) = e^{-\lambda_i h} \quad \forall s \geq 0, h \geq 0.$$

Věta

Je-li $\lambda_i = 0$, pak $p_{ij}(t) = 1$ pro všechna $t \geq 0$. Je-li $0 < \lambda_i < \infty$, má doba, po kterou řetězec setrvává ve stavu i , exponenciální rozdělení s parametrem λ_i .

Věta

Nechť $0 < \lambda_i < \infty$. Potom pravděpodobnost, že řetězec z počátečního stavu i přejde nejdříve do stavu j , je rovna $\frac{\lambda_{ij}}{\lambda_i}$ pro všechna $j \neq i$.

Nechť $P(X_0 = j) = 1$, J je čas, kdy řetězec poprvé opustí stav j , a

$$\tau_j = \inf\{t \geq J : X_t = j\}.$$

Definice

Stav j markovského řetězce se nazývá trvalý, jestliže buď $q_j = 0$ nebo $q_j > 0$ a zároveň

$$P_j(\tau_j < \infty) = 1.$$

Stav j markovského řetězce se nazývá přechodný, jestliže $q_j > 0$ a zároveň

$$P_j(\tau_j = \infty) > 0.$$

Definice

Trvalý stav j markovského řetězce se nazývá nenulový, jestliže buď $q_j = 0$ nebo $\mathbb{E}[\tau_j] < \infty$. V opačném případě se řetězec nazývá nulový.

Definice

Stav $j \in S$ se nazývá absorpční, jestliže $q_j = 0$. Jestliže $q_j > 0$, pak se stav j nazývá stabilní, pokud $q_j < \infty$, a nestabilní, pokud $q_j = \infty$.

Definice

Řekneme, že stav j je dosažitelný ze stavu i , jestliže existuje $t > 0$ takové, že $p_{ij}(t) > 0$.

Poznámka

Analogicky jako pro řetězce s diskrétním časem můžeme definovat také nerozložitelnost řetězce se spojitým časem.

Definice

Nechť $\{X_t, t \geq 0\}$ je homogenní řetězec se spojitým časem, množinou stavů S a maticemi pravděpodobností přechodu $P(t), t \geq 0$. Potom π se nazývá stacionární rozdělení daného řetězce, jestliže platí

$$\pi^T = \pi^T P(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Věta

Nechť počáteční rozdělení homogenního markovského řetězce $\{X_t, t \geq 0\}$ je stacionární. Pak je tento řetězec striktně stacionární a pro všechna $t \geq 0$ platí

$$p_j(t) = P(X_t = j) = \pi_j, \quad j \in S,$$

kde π_j jsou počáteční stacionární pravděpodobnosti.

Poissonův proces $\{N_t, t \geq 0\}$ popisuje počet událostí do času t .

Předpoklady:

- počty událostí v disjunktních časových intervalech jsou nezávislé náhodné veličiny (proces s nezávislými přírůstky),
- počty událostí v časovém intervalu $(t, t + h)$ závisí pouze na h ,
- pro počty událostí v časovém intervalu $(t, t + h)$ platí

$$P(N_{t+h} - N_t = 0) = 1 - \lambda h + o(h),$$

$$P(N_{t+h} - N_t = 1) = \lambda h + o(h),$$

$$P(N_{t+h} - N_t \geq 2) = o(h),$$

kde symbol $o(h)$ značí, že $o(h)/h \rightarrow 0$ při $h \rightarrow 0+$, a λ je konstanta, která se nazývá intenzita Poissonova procesu.

1.) Poissonův proces

- Z předpokladu nezávislosti přírůstků plyne markovská vlastnost
- Pro pravděpodobnosti přechodu platí

$$\begin{aligned}
 P(N_{t+h} = j | N_t = i) &= \lambda h + o(h) & j = i + 1 \\
 &= 1 - \lambda h + o(h) & j = i \\
 &= o(h) & j > i + 1 \\
 &= 0 & j < i.
 \end{aligned}$$

- Intenzity přechodu jsou

$$q_{i,i+1} = \lambda, \quad q_i = -q_{ii} = \lambda, \quad q_{ij} = 0 \text{ jinak.}$$

- Navíc se dá ukázat, že pro tento proces platí

$$P(N_t = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

což je Poissonovo rozdělení.

- Není to markovský řetězec, pouze markovský proces (spojitá množina stavů)!
- Wienerův proces (někdy také nazýván *Brownův pohyb*) $\{W_t, t \geq 0\}$ je definován následujícími vlastnostmi:
 - $\{W_t, t \geq 0\}$ má spojitě trajektorie,
 - $W_0 = 0$,
 - $\{W_t, t \geq 0\}$ má nezávislé přírůstky,
 - přírůstek hodnoty v časovém intervalu (s, t) má normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a rozptylem $(t - s)$.

Poznámka

Občas se místo $(t - s)$ jako rozptyl uvádí $\sigma^2(t - s)$, kde σ^2 je kladná konstanta.