Matematika pro ekonomii

Modelování finančních rezerv

- Uvažujme situaci, kdy vlastníme portfolio aktiv, z nichž pro nás plyne povinnost v případě specifické události vyplatit nějakou náhodnou finanční částku (např. pojistné plnění za vzniklé škody v pojišťovnictví, výplaty cenových rozdílů plynoucích z opcí na finančních trzích apod.)
- Souhrnná výše plateb je tedy náhodná veličina S
- Základ pro výpočet finanční rezervy, kterou musíme mít k dispozici, je střední hodnota S, tj. $\mathbb{E}S$ - tzv. **netto rezerva**
- **Bezpečnostní přirážka** - ochrana proti nepříznivému průběhu
- **Brutto rezerva** $=$ netto rezerva $+$ bezpečnostní přirážka

Nejběžnější způsoby stanovení brutto rezervy:

1. princip střední hodnoty: $BR = (1 + a)\mathbb{E}S$, kde $a > 0$;
2. princip směrodatné odchylky: $BR = \mathbb{E}S + a\sqrt{\mathrm{var}\ S}$, kde $a > 0$;
3. princip rozptylu: $BR = \mathbb{E}S + a\ \mathrm{var}\ S$, kde $a > 0$.

Výhody metod:

- V metodě 1 není nutné počítat rozptyl.
- Metody 2 a 3 jsou přesnější $\Leftarrow$ berou v úvahu fluktuace (rizika).

Poznámka

Metoda 2, v níž $a = 3$, se nazývá **metoda tří sigma**. *Název je odvozen ze skutečnosti, že často předpokládáme $S \sim N(\mu, \sigma^2)$ (což je důsledek CLV, neboť S vzniká součtem mnoha náhodných veličin) a pro $S \sim N(\mu, \sigma^2)$ platí*

$$P(S \leq \mu + 3\sigma) \doteq 0,999,$$

což je považováno za velice bezpečnou brutto rezervu.

- Předpokládejme, že portfolio je **homogenní**, tzn. že povinné výplaty, které mohou nastat na jednotlivých smlouvách, jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny X_i.
- Počet výplat je pak také náhodná veličina N.
- Celkový úhrn výplat je tudíž náhodná veličina

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

daná součtem náhodného počtu náhodných veličin (o níž říkáme, že má složené rozdělení), pro niž platí

$$\begin{aligned} \mathbb{E}S &= \mathbb{E}N\mathbb{E}X_1 \\ \mathrm{var}\ S &= \mathbb{E}N\mathrm{var}\ X_1 + \mathrm{var}\ N(\mathbb{E}X_1)^2. \end{aligned}$$

Předpoklady:

- nezáporné hodnoty
- spojitost
- pravděpodobnost extrémně velkých hodnot minimální

Příklady takových rozdělení:

- **Exponenciální** - nejjednodušší splňující požadavky, ale nepraktické
- **Restringované normální** (chvost normálního) s hustotou $f(x) = e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} / \int_c^\infty e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$ pro $x > c$
- **Log-normální** s hustotou $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-(log x-\mu)^2/2\sigma^2}, x > 0$, které vzniklo transformací $X = e^Y$, kde $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$
- **Paretovo (log-exponenciální)** s hustotou $f(x) = \alpha a^\alpha x^{-\alpha-1}, x \geq a$, $\alpha > 0, a > 0$, které vzniklo transformací $X = ae^Y$, kde $Y \sim Exp(\alpha)$
- **Weibullovo** s hustotou $f(x) = \alpha k x^{k-1} e^{-\alpha x^k}, x \geq 0, k > 0, \alpha > 0$, které je $k-$tou odmocninou exponenciálního rozdělení $Exp(\alpha)$

Předpoklady:

- portfolio obsahuje n smluv,
- pravděpodobnost škodní události na jedné smlouvě je p,
- střední počet škod je $np = \lambda$.

$$\Downarrow$$

Používaná rozdělení:

- **Binomické** $N \sim Bi(n, p)$
- Pro hodně velký rozsah portfolia n a hodně malóu pravděpodobnost výplaty p, kde $np = \mathbb{E}N =: \lambda$

$$\Downarrow$$

$$P(N = k) = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} p^k (1 - \frac{\lambda}{n})^{n-k} \underset{n\to\infty, p\to 0}{\longrightarrow} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

$\Rightarrow$ **Poissonovo** $N \sim Po(\lambda)$ (jednodušší výpočty)

- Týká se tvorby rezerv na pozdější plnění = prostředky k výplatě událostí, které jsou nahlášeny v pozdějším období, než se staly.
- Označme $X_{j,s}$ celkovou výši plateb, které vznikly v období j a byly uhrazeny do konce období $j+s$ (tedy s značí zpoždění).
- Předpokládejme, že jsme v čase t.
- Data, která máme k dispozici, můžeme seřadit do tzv. kumulativního trojúhelníku:

	0	1	$\dots$	s	$\dots$	$t-2$	$t-1$
1	$X_{1,0}$	$X_{1,1}$	$\dots$	$X_{1,s}$	$\dots$	$X_{1,t-2}$	$X_{1,t-1}$
2	$X_{2,0}$	$X_{2,1}$	$\dots$	$X_{2,s}$	$\dots$	$X_{2,t-2}$	
$\vdots$							
$t-1$	$X_{t-1,0}$	$X_{t-1,1}$					
t	$X_{t,0}$						

Poznámka

Někdy se místo škod, které vznikly v roce j a byly urazeny do konce roku $j+s$, pracuje s hodnotami $Y_{j,s}$ plateb, které vznikly v roce j a byly urazeny právě v roce $j+s$. Pak mluvíme o nekumulativním trojúhelníku.

Trojúhelníková schémata - příklad

Výplaty pojistného plnění v havarijním pojištění (v milionech Kč):

- nekumulativní trojúhelník:

	0	1	2	3	4
prosinec	2	1.5	1.5	1	0.5
leden	2	2	0.5	1	
únor	1.5	1	1		
březen	2	1.5			
duben	1.5				

- a příslušný kumulativní trojúhelník:

	0	1	2	3	4
prosinec	2	3.5	5	6	**6.5**
leden	2	4	4.5	**5.5**	
únor	1.5	2.5	**3.5**		
březen	2	**3.5**			
duben	**1.5**				

- Cílem je pro každé j nalézt hodnotu $\hat{X}_{j,\infty}$, která je odhadem celkové výše výplat, jejichž povinnost vznikla v období j. Rezervou na výplatu za období j je pak hodnota $\hat{X}_{j,\infty} - X_{j,t-j}$.
- Samozřejmě se předpokládá, že po nějakém konečném počtu let jsou již všechny výplaty pro dané období vyplaceny.
- Za tuto dobu je považován právě čas $t \Rightarrow$ metody odhadu $\hat{X}_{j,\infty}$ spočívají v doplnění kumulativního trojúhelníku na čtverec.
- Celkouvou rezervou pak je

$$R = \sum_{j=2}^{t} \hat{X}_{j,t-1} - X_{j,t-j}.$$

Tato metoda předpokládá, že sloupce jsou si úměrné, tj. že

$$X_{j,s+1} \doteq c_s X_{j,s}, \quad s = 0, \dots, t-2,\ j = 1, \dots, t-s-1.$$

Odhadem parametru c_s je hodnota

$$\hat{c}_s = \frac{\sum_{j=1}^{t-s-1} X_{j,s+1}}{\sum_{j=1}^{t-s-1} X_{j,s}}.$$

Trojúhelník na čtverec pak tedy doplníme pomocí vztahu

$$\hat{X}_{j,r} = X_{j,t-j} \hat{c}_{t-j} \cdots \hat{c}_{r-1}$$

a pro odhad konečné celkové výše výplaty tak dostáváme

$$\hat{X}_{j,\infty} = \hat{X}_{j,t-1}$$

a výše rezervy je tudíž

$$\hat{X}_{j,t-1} - X_{j,t-j}.$$

Předpokládejme, že tzv. **vývojové faktory**

$$d_{j,s} = X_{j,s+1}/X_{j,s}, \quad s = 0, \ldots, t-2, \; j = 1, \ldots, t-1,$$

závisejí na řádkovém indexu j, tj. máme

	0	1	$\ldots$	s	$\ldots$	$t-2$
1	$d_{1,0}$	$d_{1,1}$	$\ldots$	$d_{1,s}$	$\ldots$	$d_{1,t-2}$
$\vdots$						
$t-1$	$d_{t-1,0}$					

a následně počítáme

$$\hat{d}_s = \frac{\sum_{j=1}^{t-s-1} \omega_{j,s} d_{j,s}}{\sum_{j=1}^{t-s-1} \omega_{j,s}}, \quad s = 0, \ldots, t-2,$$

kde $\omega_{j,s}$ jsou váhy pro $d_{j,s}$ (větší váhy pro novější hodnoty). Pak opět

$$\hat{X}_{j,r} = X_{j,t-j} \hat{d}_{t-j} \cdots \hat{d}_{r-1}.$$

Poznámka

Klasickou metodu chain-ladder získáme, pokud volíme $\omega_{j,s} = X_{j,s}$.

Tato metoda stejně jako klasická metoda chain ladder předpokládá, že sloupce na sobě závisejí bez ohledu na řádek, tentokrát vztahem

$$X_{j,s+1} \doteq a_s + c_s X_{j,s}, \quad s = 0, \dots, t-2, \; j = 1, \dots, t-s-1.$$

Parametry a_s a c_s se určí tzv. metodou nejmenších čtverců, tj. minimalizací výrazu

$$\sum_{j=1}^{t-s-1} (X_{j,s+1} - a_s - c_s X_{j,s})^2, \quad s = 0, \dots, t-3, \tag{1}$$

(pro $s = t-2$ pak volíme $a_{t-2} = 0$ a $c_{t-2} = X_{1,t-1}/X_{1,t-2}$).

Řešením minimalizace je

$$\hat{a}_s = \frac{\sum_{j=1}^{t-s-1} X_{j,s+1} \sum_{j=1}^{t-s-1} X_{j,s}^2 - \sum_{j=1}^{t-s-1} X_{j,s} \sum_{j=1}^{t-s-1} X_{j,s+1} X_{j,s}}{(t-s-1)\sum_{j=1}^{t-s-1} X_{j,s}^2 - (\sum_{j=1}^{t-s-1} X_{j,s})^2}$$

$$\hat{c}_s = \frac{(t-s-1)\sum_{j=1}^{t-s-1} X_{j,s+1} X_{j,s} - \sum_{j=1}^{t-s-1} X_{j,s+1} \sum_{j=1}^{t-s-1} X_{j,s}}{(t-s-1)\sum_{j=1}^{t-s-1} X_{j,s}^2 - (\sum_{j=1}^{t-s-1} X_{j,s})^2}.$$

Na čtverec pak doplňujeme postupně počítáním

$$\hat{X}_{j,s+1} = \hat{a}_s + \hat{c}_s \hat{X}_{j,s}, \quad s = t-j, \dots, t-2, \ j = 2, \dots, t,$$

kde $\hat{X}_{j,t-j} = X_{j,t-j}$ je známá hodnota na diagonále.