11. cvičení z PSI

1. - 5. prosince 2014

11.1 [N, 12.3.15](Test dobré shody)

Realizací náhodné veličiny X jsme dostali následující četnosti výsledků:

hodnota	0	1	2	3	4	5	6
pozorovaná četnost	20	15	10	5	3	0	2

Posuďte na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ hypotézu, že náhodná veličina X má geometrické rozdělení s parametrem $q = 1/2$, $p_X(i) = q^i(1-q)$, $i \in \mathbb{N}_0$.

Řešení:
Pro dosažení dostatečné četnosti sloučíme poslední skupiny:

hodnota i	0	1	2	≥ 3
pozorovaná četnost n_i	29	15	10	10
teoretická pravděpodobnost p_i	1/2	1/4	1/8	1/8

Rozsah výběru je $n = 29 + 15 + 10 + 10 = 64$, počet hodnot je $k = 4$. Hodnota kritéria $T = \sum_{i=0}^{3} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$ je $t = 1,3435$ což NENÍ větší než kvantil $q_{\chi(k-1)}(1-\alpha) = q_{\chi(3)}(0,95) \doteq 7,815$ a hypotézu $H_0 : X$ *má geometrické rozdělení s parametrem* $q = 1/2$, NEZAMÍTÁME.

11.2 [N, 12.4.6](Test nekorelovanosti dvou výběrů z normálních rozdělení)

Předpokládejme, že náhodný vektor (X, Y) má (dvourozměrné) normální rozdělení. Na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ posuďte hypotézu, že veličiny X a Y jsou nekorelované, pokud výběrový koeficient korelace vyšel $r_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} = 0,15$ pro výběr rozsahu

(a) $n = 30$.

(b) $n = 300$.

Řešení:
Hodnota kritéria $t = \frac{r_{x,y}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{x,y}^2}}$ a kvantilu $q_{t(n-2)}(1-\frac{\alpha}{2})$ jsou:

(a) $t \doteq 0,803 \not> 2,05 \doteq q_{t(28)}(0,975)$
(b) $t \doteq 2,619 > 1,96 \doteq \Phi^{-1}(0,975) \doteq q_{t(298)}(0,975)$ (pomocí CLV)

Hypotézu $H_0 : \rho_{x,y} = 0$ tedy:
(a) NEZAMÍTÁME
(b) ZAMÍTÁME.

11.3 [M, Cvičení 1](Markovovy řetězce)

V obousměrně orientovaném cyklu délky 4 přejde v každém kroku každý stav na dva sousední a to s pravděpodobností 2/3 ve směru hodinových ručiček a s pravděpodobností 1/3 ve směru opačném. Stanovte pravděpodobnosti stavů po 4 krocích, jestliže počáteční stav je v jednom pevně vybraném vrcholu. Klasifikujte stavy.

Řešení:
Pokud očíslujeme stavy grafu vzestupně ve směru hodinových ručiček bude odpovídající matice přechodu $P = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$. Rozdělení pravděpodobnosti pro počáteční stav ve vrcholu i odpovídá i-tému vektoru standardní báze vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ (označíme ho e_i). Rozdělení pravděpodobnosti po 4 krocích je tedy $e_i P^4$. Všechny stavy jsou trvalé s periodou 2, což se ukáže tak, že každá uzavřená cesta má sudou délku (indukcí podle délky cesty). Řetězec je nerozložitelný.

11.4 [M, Cvičení 2] V Markovově řetězci s následující maticí přechodu P oklasifikujte všechny stavy a najděte všechny uzavřené množiny trvalých stavů.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/5 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Řešení:
Nakreslíme si příslušný orientovaný graf přiřazený matici P, ze kterého už je snadno vidět, že stav 3 je trvalý absorpční, stavy 2 a 4 jsou trvalé s periodou 2, a stavy 1 a 5 jsou přechodné. Všechny uzavřené množiny trvalých stavů jsou $\emptyset, \{3\}, \{2,4\}, \{2,3,4\}$.