# 12. cvičení z PSI

8. - 12. prosince 2014

**12.1** [N, 12.2.18](Test střední hodnoty dvou normálních rozdělení se stejným neznámým rozptylem)

Z realizací náhodných veličin $X$ a $Y$ (s normálním rozdělením) jsme z výběrů rozsahu $m = 11$ a $n = 21$ obdrželi realizace odhadů $\overline{\boldsymbol{x}} = 10$, $\overline{\boldsymbol{y}} = 12$, $s_{\boldsymbol{x}} = 2$, $s_{\boldsymbol{y}} = 3$. Posuďte na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ hypotézu, že střední hodnoty náhodných veličin $X$ a $Y$ jsou stejné. Současně zkontrolujte, zda je možné použít potřebné předpoklady.

**Řešení:**
Abychom mohli použít test střední hodnoty dvou normálních rozdělení se stejným neznámým rozptylem, měli bychom nejdříve otestovat, zda obě veličiny stejný rozptyl skutečně mají.

Test stejného rozptylu: Pro hodnoty kritéria $\tilde{t} = \frac{s_x^2}{s_y^2} = \frac{4}{9} \doteq 0,444$ a kvantilů $q_{F(m-1,n-1)}(\frac{\alpha}{2}) = q_{F(10,20)}(0,025) = \frac{1}{q_{F(20,10)}(0,975)} \doteq \frac{1}{3,42} \doteq 0,2924$ a $q_{F(m-1,n-1)}(1-\frac{\alpha}{2}) = q_{F(10,20)}(0,975) \doteq 2,77$ máme

$$\tilde{t} \doteq 0,444 \not< 0,2924 \doteq q_{F(m-1,n-1)}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

a

$$\tilde{t} \doteq 0,444 \not> 2,77 \doteq q_{F(m-1,n-1)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$$

tedy hypotézu $\tilde{H}_0 : X$ *a* $Y$ *mají stejný rozptyl*, NEZAMÍTÁME.

Test stejných středních hodnot: Máme $s^2 = \frac{(m-1)s_{\boldsymbol{x}}+(n-1)s_{\boldsymbol{y}}}{m+n-2} = \frac{22}{3}$. Pro hodnoty kritéria $t = \frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{s\sqrt{1/m+1/n}} = -\frac{3}{4}\sqrt{7} \doteq -1,984$ a kvantilu $q_{t(m+n-2)}(1-\frac{\alpha}{2}) = q_{t(30)}(0,975) \doteq 2,042$ máme

$$|t| \doteq 1,984 \not> 2,042 \doteq q_{t(m+n-2)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$$

tedy hypotézu $H_0 : X$ *a* $Y$ *mají stejnou střední hodnotu* také NEZAMÍTÁME.

**12.2** [M, Cvičení 12](Asymptotické pravděpodobnosti stavů)

Najděte asymptotické pravděpodobnosti stavů Markovova řetězce s maticí přechodu $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ jestliže počáteční stav je 2.

**Řešení:**
Stavy 1 a 2 jsou přechodné, stavy 3 a 4 jsou absorpční. Permutací stavů $1' = 3$, $2' = 4$, $3' = 1$, $4' = 2$ dostaneme matici

$$\mathbf{P}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}, \ \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Tedy $(\mathbf{P}')^\infty := \lim_{n\to\infty} (\mathbf{P}')^n = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ (\mathbf{I}_2 - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{R} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, kde

$$(\mathbf{I}_2 - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

Protože počáteční stav 2 odpovídá stavu $4'$, odpovídají asymptotické pravděpodobnosti (očárkovaných) stavů 4. řádku matice $(\mathbf{P}')^\infty$, tedy vektoru $(1/4, 3/4, 0, 0)$. Asymptotické pravděpodobnosti v původních (nečárkovaných) stavech dostaneme zpětným přepermutováním, tj. výsledek je $(0, 0, 1/4, 3/4)$.

**12.3** [M, Cvičení 23](Maximálně věrohodné odhady)
Odhadněte stavy $i$ a $k$ Markovova řetězce s maticí přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

z pozorované posloupnosti stavů $1 \to i \to 2 \to k \to 3$.

**Řešení:**
Stavy odhadneme pomocí maximální věrohodnosti

$$L(i, k) = P\Big((X_0, X_1, X_2, X_3, X_4) = (1, i, 2, k, 3)\Big).$$

Protože

$$P\Big((X_0, \ldots, X_n) = (i_0, \ldots, i_n)\Big) =$$

$$P\Big(X_n = i_n | (X_0, \ldots, X_{n-1}) = (i_0, \ldots, i_{n-1})\Big) \cdot P\Big((X_0, \ldots, X_{n-1}) = (i_0, \ldots, i_{n-1})\Big) =$$

$$P\Big(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}\Big) \cdot P\Big((X_0, \ldots, X_{n-1}) = (i_0, \ldots, i_{n-1})\Big) =$$

$$p_{i_{n-1}, i_n} \cdot P\Big((X_0, \ldots, X_{n-1}) = (i_0, \ldots, i_{n-1})\Big)$$

máme, že

$$L(i,k) = P(X_0 = 1) \cdot p_{1i} \cdot p_{i2} \cdot p_{2k} \cdot p_{k3}$$

kde $p_{j,\ell}$ je prvek matice $\mathbf{P}$ v $j$-tém řádku a $\ell$-tém sloupci. Nejvyšší hodnoty funkce $L(i,k)$ můžeme tedy v tomto případě hledat zvlášť pro proměnnou $i$ a zvlášť pro proměnnou $k$. Hodnota $p_{1i} \cdot p_{i2}$ je nejvyšší pro $i = 2$ a hodnota $p_{2k} \cdot p_{k3}$ je nejvyšší pro $k = 2$.

**12.4** [M, Cvičení 32](Stacionární rozdělení pravděpodobností)

Najděte všechna stacionární rozdělení pravděpodobnosti stavů Markovova řetězce s maticí přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Řešení:**
Stacionární rozdělení pravděpodobnosti pro matici $\mathbf{P}$ je takový vektor $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$, s nezápornými složkami a $\sum_j p_j = 1$, že

$$\vec{p} = \vec{p} \cdot \mathbf{P} \quad (\text{neboli} \quad \vec{p} \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{I}_3) = 0).$$

Ekvivalentní zápis je $\mathbf{P}^T \cdot \vec{p}^T = \vec{p}^T$ a také $(\mathbf{P}^T - \mathbf{I}_3^T) \cdot \vec{p}^T = 0$. Je tedy třeba najít vlastní vektor matice $\mathbf{P}^T$ pro její vlastní číslo 1. Pomocí Gaussovy eliminace najdeme tudíž řešení soustavy reprezentované maticí

$$\mathbf{P}^T - \mathbf{I}_3^T = \begin{pmatrix} -1 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -1 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tato soustava má hodnost 2, tedy má pouze $3 - 2 = 1$ lineárně nezávislých řešení. Po jeho znormování pak dostaneme $\vec{p} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Jedinečnost řešení také plyne z toho, že daný řetězec má všechny stavy trvalé, neperiodické (tj. ergodické) a samotný řetězec je nerozložitelný (tj. jediná uzavřená neprázdná množina trvalých stavů je množina všech těchto stavů). Tyto vlastnosti se dají ihned odvodit z příslušného orientovaného grafu.