

## 2. cvičení z PSI

29. září - 3. října 2014

**2.1** [N, 1.3.11](Hypergeometrické rozdělení) Mezi  $M$  výrobky je  $K$  vadných. Jaká je pravděpodobnost, že mezi  $m$  náhodně vybranými výrobky je právě  $k$  vadných?

Určete, k čemu se blíží hodnota pravděpodobnosti pro pevné  $k$  a  $m$  pokud  $M \rightarrow \infty$  a  $K/M \rightarrow q$ , kde  $0 \leq q \leq 1$  (tzv. binomické rozdělení). Jak byste tento výsledek interpretovali?

**2.2** [N, 1.5.17] Pro hod dvěma mincemi uvažujme jevy:

- $A$ : na první minci padl líc,
- $B$ : na druhé minci padl líc,
- $C$ : na mincích padly různé výsledky.

Jak je to s nezávislostí jevů  $A, B, C$ ?

**2.3** [N, 1.6.8](Geometrická pravděpodobnost) Vybereme bod  $(x, y)$  ze čtverce  $I = \langle -1, 1 \rangle \times \langle -1, 1 \rangle$  s rovnoměrným rozdělením. Ukažte, že jevy

- $A = \{(x, y) \in I \mid x > 0\}$ ,
- $B = \{(x, y) \in I \mid y > 0\}$ ,
- $C = \{(x, y) \in I \mid x \cdot y > 0\}$ ,

nejsou nezávislé, ale pouze po dvou nezávislé.

**2.4** [N, 1.6.2](Buffonova úloha) Na linkovaný papír hodíme jehlu, jejíž délka  $d$  je menší nebo rovna vzdálenosti mezi linkami. Jaká je pravděpodobnost, že jehla protne nějakou linku?

**2.5** (Protipříklady na Kolmogorovu definici) Pro množinu  $\Omega$  se  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  nazývá  $\sigma$ -algebra na  $\Omega \Leftrightarrow$

- (i)  $\emptyset \in \mathcal{A}$
- (ii)  $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
- (iii)  $\{A_n \in \mathcal{P}(\Omega) \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ .

Najděte pro vhodné  $\Omega$  příklady takových  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ , které nesplňují vždy právě jednu z podmínek (i), (ii) a (iii) (např. pro  $\Omega = \mathbb{N}$ ). Při nesplnění (iii) se snažte, aby bylo splněno  $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$ .

Pro  $\Omega = \mathbb{N}$  najděte  $\sigma$ -algebru  $\mathcal{A}$  na  $\Omega$  takovou, že  $X \subseteq \mathcal{A}$  a  $Y \notin \mathcal{A}$  pro nějaké nekonečné podmnožiny  $X, Y \subseteq \Omega$ .

**2.6** [N, 2.5.26] Z cédéčka jsou čtena data s chybou o pravděpodobnosti  $c$ . Opravný program odhalí a opraví 80% chyb. Při následném zápisu dat na disk se do 1% všech dat (chyb i správných částí) dostanou nové chyby. Pro jakou hodnotu  $c$  je po zapsání procento chyb menší než po pouhém přečtení?