26.11.2014, 1. skupina Jméno:

Zápočtový test z PSI

Nezapomeňte podepsat VŠECHNY papíry, které odevzdáváte. Škrtejte zřetelně a stejně zřetelně pište i věci, které platí. Co je škrtnuto, nebude bráno v úvahu a naopak. Jestliže něčemu nerozumíte, zeptejte se. Postup je třeba odůvodnit (okomentovat) nebo uvést výpočet. Výsledek bez uvedení jakéhokoliv postup či výpočtu není akceptován. Abyste uspěli v testu, potřebujete získat alespoň 15 bodů.

(1) (10 bodů) Manžel neprišel včas (tj. v 18.00) ze zaměstnání. Manželka ze zkušenosti ví, že s pravděpodobností 0.3 (resp. 0.6, 0.1) pracuje presčas (resp. odpočívá v hospodě; zdržel se z jiné příčiny). Pravděpodobnosti, že manžel bude ve 20.00 doma jsou (podle toho, kde se zdržel) 0.9, 0.2 a 0.9. Manžel nakonec ve 20.00 doma byl. Jaká je pravděpodobnost, že byl v hospodě?

Řešení:
Označme jevy:

$A_1 =$ "je v zaměstnání přesčas",
$A_2 =$ "odpočívá v hospodě",
$A_3 =$ "zdržel se z jiné příčiny",
$D =$ "přijde domů až v 20.00".

Víme, že A_1, A_2, A_3 je úplný disjunktní systém jevů a

$$P(A_1) = 0.3 \qquad P(A_2) = 0.6 \qquad P(A_3) = 0.1$$

$$P(D|A_1) = 0.9 \qquad P(D|A_2) = 0.2 \qquad P(D|A_3) = 0.9$$

a zajímá nás $P(A_2|D)$. Z Bayesových vět máme:

$$P(A_2|D) = \frac{P(D|A_2) \cdot P(A_2)}{P(D)}$$

$$P(D) = \sum_{i=1}^{3} P(D|A_i) \cdot P(A_i) = 0.9 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.6 + 0.9 \cdot 0.1 = 0.48$$

a tedy

$$P(A_2|D) = \frac{0.2 \cdot 0.6}{0.48} = 0.25\ .$$

(2) (10 bodů) Náhodná veličina X má rozdělení dané hustotou

$$f_X(t) = \begin{cases} a \cdot t^2 & , \ t \in (0,3) \\ 0 & , \ \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete konstantu a, distribuční funkci náhodné veličiny X, střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny $Y = 3X - 1$ a $P(0 \leq X < 2)$.

Řešení:

Pro určení konstanty a potřebujeme, aby

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\ dt = a\int_0^3 t^2\ dt = a\Big[\frac{t^3}{3}\Big]_0^3 = 9a$$

tedy $a = \frac{1}{9}$. Distribuční funkce je rovna

$$F_X(u) = \int_{-\infty}^{u} f_X(t)\ dt$$

a pro $u \in (0,3)$ tedy máme

$$F_X(u) = \int_0^u \frac{t^2}{9}\ dt = \Big[\frac{t^3}{27}\Big]_0^u = \frac{u^3}{27}$$

celkově pak

$$F_X(u) = \begin{cases} 0 & ,\ u \leq 0 \\ \frac{u^3}{27} & ,\ u \in (0,3) \\ 1 & ,\ u \geq 3. \end{cases}$$

Pro střední hodnotu a rozptyl veličiny $Y = 3X - 1$ platí

$$E(Y) = E(3X-1) = 3 \cdot E(X) - 1$$

$$D(Y) = D(3X-1) = D(3X) = 3^2 \cdot D(X) = 9 \cdot \Big(E(X^2) - \big(E(X)\big)^2\Big)\ .$$

Pomocí hustoty tudíž spočítáme momenty $E(X)$ a $E(X^2)$:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_X(t)\ dt = \int_0^3 t \cdot \frac{t^2}{9}\ dt = \Big[\frac{t^4}{36}\Big]_0^3 = \frac{9}{4}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot f_X(t)\ dt = \int_0^3 t^2 \cdot \frac{t^2}{9}\ dt = \Big[\frac{t^5}{45}\Big]_0^3 = \frac{27}{5}.$$

Tedy $E(Y) = 3 \cdot \frac{9}{4} - 1 = \frac{23}{4} = 5.75$ a $D(Y) = 9 \cdot (\frac{27}{5} - (\frac{9}{4})^2) = \frac{567}{20} = 28.35$.
A nakonec (díky spojitosti veličiny X) máme:

$$P(0 \leq X < 2) = P(X < 2) - P(X < 0) = F_X(2) - F_X(0) = \frac{2^3}{27} - 0 = \frac{8}{27} \doteq 0.296$$

nebo alternativní řešení:

$$P(0 \leq X < 2) = \int_0^2 f_X(t)\ dt = \int_0^2 \frac{t^2}{9}\ dt = \frac{8}{27}.$$

(3) (10 bodů) Předpokládejme, že politická strana má volební preference 13%. Jaká je pravděpodobnost, že v průzkumu odhad jejích preferencí dosáhne alespoň 15%, je-li rozsah výběru (a) 500, (b) 1000 ?

Řešení:
Zadání si přeložíme tak, že jednotlivý volič volí danou stranu s pravděpodobností $p = 0.13$. Pro

$i = 1, \ldots, n$ si zavedeme veličiny

$$X_i = \begin{cases} 1 & , i\text{-tý volič zvolí danou stranu,} \\ \\ 0 & , i\text{-tý volič nezvolí danou stranu.} \end{cases}$$

Veličiny X_i považujeme za nezávislé, s alternativním rozdělení s parametrem p (protože $P(X_i = 1) = p$), střední hodnotou $E(X_i) = p = 0.13$ a rozptylem $D(X_i) = p(1-p) = 0.13 \cdot 0.87 = 0.1131$.

Preference strany se pak vyjádří jako

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

(tj. počet voličů dané strany ku počtu všech voličů). Máme teď určit $P(\overline{X} \geq 0.15)$, což uděláme za pomoci centrální limitní věty použité na normovanou veličinu $\operatorname{norm}(\overline{X}) = \frac{\overline{X} - E(\overline{X})}{\sqrt{D(\overline{X})}}$. K tomu potřebujeme znát:

$$E(\overline{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = p = 0.13$$

$$D(\overline{X}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} D(X_i) = \frac{p(1-p)}{n} = \frac{0.1131}{n}$$

Takže

$$\operatorname{norm}(\overline{X}) = \frac{\overline{X} - E(\overline{X})}{\sqrt{D(\overline{X})}} = \frac{\overline{X} - 0.13}{\sqrt{0.1131}} \cdot \sqrt{n}$$

a můžeme psát (pomocí úprav nerovností):

$$P(\overline{X} \geq 0.15) = P\Big(\frac{\overline{X} - 0.13}{\sqrt{0.1131}} \cdot \sqrt{n} \geq \frac{0.15 - 0.13}{\sqrt{0.1131}} \cdot \sqrt{n}\Big) = P\Big(\operatorname{norm}(\overline{X}) \geq \frac{0.02\sqrt{n}}{\sqrt{0.1131}}\Big) \doteq$$

$$\doteq 1 - \Phi\Big(\frac{0.02\sqrt{n}}{\sqrt{0.1131}}\Big)$$

(a) Pro $n = 500$ dostáváme

$$P(\overline{X} \geq 0.15) \doteq 1 - \Phi\Big(\frac{0.02\sqrt{500}}{\sqrt{0.1131}}\Big) \doteq 1 - \Phi(1.33) \doteq 1 - 0.9082 = 0,0918\ .$$

(b) Pro $n = 1000$ dostáváme

$$P(\overline{X} \geq 0.15) \doteq 1 - \Phi\Big(\frac{0.02\sqrt{1000}}{\sqrt{0.1131}}\Big) \doteq 1 - \Phi(1,88) \doteq 1 - 0.9699 = 0,0301\ .$$