26.11.2014, 2. skupina   Jméno:

Zápočtový test z PSI

Nezapomeňte podepsat VŠECHNY papíry, které odevzdáváte. Škrtejte zřetelně a stejně zřetelně pište i věci, které platí. Co je škrtnuto, nebude bráno v úvahu a naopak. Jestliže něčemu nerozumíte, zeptejte se. Postup je třeba odůvodnit (okomentovat) nebo uvést výpočet. Výsledek bez uvedení jakéhokoliv postup či výpočtu není akceptován. Abyste uspěli v testu, potřebujete získat alespoň 15 bodů.

(1) (10 bodů) Ve sbírce 50 obrazů je 5 padělků. Jestliže je obraz falešný, znalec to pozná s pravděpodobností 80%. Je-li obraz originál, znalec ho mylně posoudí s pravděpodobností 5%. Určete

(a) pravděpodobnost, že obraz je originál, jestliže byl znalcem označen za originál,

(b) pravděpodobnost, že obraz je padělaný, jestliže byl znalcem označen za padělek.

Řešení:
Označme jevy:

O = "obraz je originál",
(doplňkový jev: $\overline{O}$ = "obraz je padělek")

Z = "znalec obraz označí za originál",
(doplňkový jev: $\overline{Z}$ = "znalec obraz označí za padělek").

Víme, že

$$P(\overline{O}) = \frac{5}{50} = 0.1 \qquad P(\overline{Z}|\overline{O}) = 0.8 \qquad P(\overline{Z}|O) = 0.05\ .$$

(a) Zajímá nás $P(O|Z)$. Z Bayesových vět máme:

$$P(O|Z) = \frac{P(Z|O)\cdot P(O)}{P(Z)} = \frac{\big(1-P(\overline{Z}|O)\big)\cdot\big(1-P(\overline{O})\big)}{1-P(\overline{Z})}$$

$$P(\overline{Z}) = P(\overline{Z}|O)\cdot P(O) + P(\overline{Z}|\overline{O})\cdot P(\overline{O}) = 0.05\cdot 0.9 + 0.8\cdot 0.1 = 0.125$$

a tedy

$$P(O|Z) = \frac{0.95\cdot 0.9}{0.875} = 0.9771\ .$$

(b) Zajímá nás $P(\overline{O}|\overline{Z})$. Z Bayesovy věty a předchozího máme:

$$P(\overline{O}|\overline{Z}) = \frac{P(\overline{Z}|\overline{O})\cdot P(\overline{O})}{P(\overline{Z})} = \frac{0.8\cdot 0.1}{0.125} = 0.64\ .$$

(2) (10 bodů) Náhodná veličina X má rozdělení dané hustotou

$$f_X(t) = \begin{cases} c\cdot e^t & ,\ t<0 \\ 0 & ,\ \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete konstantu c, distribuční funkci, střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X.

Řešení:
Pro určení konstanty c potřebujeme, aby

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\ dt = c\int_{-\infty}^{0} e^t\ dt = c\Big[e^t\Big]_{-\infty}^{0} = c$$

tedy $c = 1$. Distribuční funkce je rovna

$$F_X(u) = \int_{-\infty}^{u} f_X(t)\ dt$$

a pro $u < 0$ tedy máme

$$F_X(u) = \int_{-\infty}^{u} e^t\ dt = \Big[e^t\Big]_{-\infty}^{u} = e^u$$

celkově pak

$$F_X(u) = \begin{cases} e^u & ,\ u < 0 \\ \\ 1 & ,\ u \geq 0. \end{cases}$$

Pomocí hustoty spočítáme střední hodnotu

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_X(t)\ dt = \int_{-\infty}^{0} t \cdot e^t\ dt = \Big[(t-1)e^t\Big]_{-\infty}^{0} = -1$$

a rozptyl

$$D(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2\ .$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot f_X(t)\ dt = \int_{-\infty}^{0} t^2 \cdot e^t\ dt = \Big[(t^2 - 2t + 2)e^t\Big]_{-\infty}^{0} = 2.$$

Tedy

$$D(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = 2 - (-1)^2 = 1\ .$$

(3) (10 bodů) Střední hodnota chyby měření je 5 a směrodatná odchylka je 36. Jaká je pravděpodobnost toho, že chyba měření nepřekročí v absolutní hodnotě 5? (Předpokládáme normální rozdělení chyby.)

Řešení:
Veličina X představující chybu měření má normální rozdělení $N(5, 36^2)$. Zajímá nás pravděpodobnost $P(|X| \leq 5)$. K jejímu výpočtu potřebujeme pracovat s normovanou veličinou

$$\mathrm{norm}(X) = \frac{X-5}{36}$$

(protože k té jsou hodnoty v tabulkách, tj. hodnoty funkce Φ):

$$P(|X| \leq 5) = P(-5 \leq X \leq 5) = P\Big(\frac{-5-5}{36} \leq \frac{X-5}{36} \leq \frac{5-5}{36}\Big) = P\Big(-\frac{5}{18} \leq \mathrm{norm}(X) \leq 0\Big) =$$

$$= \Phi(0) - \Phi\Big(-\frac{5}{18}\Big) \doteq 0.5 - \Big(1 - \Phi\Big(0.2778\Big)\Big) \doteq 0.6094 - 0.5 = 0.1094\ .$$