27.11.2014, 3. skupina Jméno:

Zápočtový test z PSI

Nezapomeňte podepsat VŠECHNY papíry, které odevzdáváte. Škrtejte zřetelně a stejně zřetelně pište i věci, které platí. Co je škrtnuto, nebude bráno v úvahu a naopak. Jestliže něčemu nerozumíte, zeptejte se. Postup je třeba odůvodnit (okomentovat) nebo uvést výpočet. Výsledek bez uvedení jakéhokoliv postup či výpočtu není akceptován. Abyste uspěli v testu, potřebujete získat alespoň 15 bodů.

(1) (10 bodů) Student přišel na zkoušku na poslední chvíli, ale nemůže si vzpomenout, který ze tří možných (stejně pravděpodobných) předmětů (analýza, pravděpodobnost, algebra) se vlastně zkouší. Ví, že neumí 40% otázek z analýzy, 35% z pravděpodobnosti a 20% z algebry.

(a) Jaká je pravděpodobnost, že zkoušku udělá?

(b) Jestliže zkoušku udělal, jaká je pravděpodobnost toho, že to bylo z pravděpodobnosti?

Řešení:
Označme jevy:

$A_1 =$ "zkouška je z analýzy",
$A_2 =$ "zkouška je z pravděpodobností",
$A_3 =$ "zkouška je z algebry",
$Z =$ "student udělá zkoušku".

Víme, že A_1, A_2, A_3 je úplný disjunktní systém jevů a

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$$

$$P(\overline{Z}|A_1) = 0.4 \qquad P(\overline{Z}|A_2) = 0.35 \qquad P(\overline{Z}|A_3) = 0.2\ .$$

(a) Zajímá nás $P(Z)$. Z Bayesovy věty máme:

$$P(\overline{Z}) = \sum_{i=1}^{3} P(\overline{Z}|A_i) \cdot P(A_i) = \frac{1}{3}(0.4 + 0.35 + 0.2) = \frac{19}{60} \doteq 0.3167$$

$$P(Z) = 1 - P(\overline{Z}) = \frac{41}{60} \doteq 0.6833\ .$$

(b) Zajímá nás $P(A_2|Z)$. Opět z Bayesovy věty máme

$$P(A_2|Z) = \frac{P(Z|A_2) \cdot P(A_2)}{P(Z)} = \frac{\Big(1 - P(\overline{Z}|A_2)\Big) \cdot P(A_2)}{P(Z)} = \frac{0.65 \cdot 1/3}{41/60} \doteq 0.3171\ .$$

(2) (10 bodů) Náhodná veličina X má rozdělení dané hustotou

$$f_X(t) = \begin{cases} c(t-1)^2 & ,\ t \in (0,1) \\ 0 & ,\ \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete konstantu c, distribuční funkci, střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X.

Řešení:
Pro určení konstanty c potřebujeme, aby

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\ dt = c\int_0^1 (t-1)^2\ dt = c\Big[\frac{(t-1)^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{c}{3}$$

tedy $c = 3$. Distribuční funkce je rovna

$$F_X(u) = \int_{-\infty}^{u} f_X(t)\ dt$$

a pro $u \in (0,1)$ tedy máme

$$F_X(u) = \int_0^u 3(t-1)^2\ dt = \Big[(t-1)^3\Big]_0^u = (u-1)^3 + 1$$

celkově pak

$$F_X(u) = \begin{cases} 0 & ,\ u \le 0 \\ (u-1)^3 + 1 & ,\ u \in (0,1) \\ 1 & ,\ u \ge 1. \end{cases}$$

Pomocí hustoty spočítáme střední hodnotu

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_X(t)\ dt = \int_0^1 t \cdot 3(t-1)^2\ dt = 3\Big[\frac{t^4}{4} - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{1}{4} = 0.25$$

a rozptyl

$$D(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2\ .$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot f_X(t)\ dt = \int_0^1 t^2 \cdot 3(t-1)^2\ dt = 3\Big[\frac{t^5}{5} - \frac{2t^4}{4} + \frac{t^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{10} = 0.1\ .$$

Tedy

$$D(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = \frac{1}{10} - \Big(\frac{1}{4}\Big)^2 = \frac{3}{80} = 0.0375\ .$$

(3) (10 bodů) Náhodná veličina X nabývá hodnot z množiny $\{0,1,2\}$ a pravděpodobnostmi $P(X = j) = a + bj$ pro všechna $j \in \{0,1,2\}$. Odhadněte metodou momentů parametry a, b na základě četností podle následující tabulky:

hodnota	0	1	2
pozorovaná četnost	17	15	8

Řešení:
Protože $P(X = j) = a + bj$ jsou pravděpodobnosti, dostáváme podmínky

$$a + b \cdot 0 \ge 0 \qquad a + b \cdot 1 \ge 0 \qquad a + b \cdot 2 \ge 0$$

$$1 = (a + b \cdot 0) + (a + b \cdot 1) + (a + b \cdot 2) = 3a + 3b$$

Dále budeme chtít, aby se rovnal první moment a jeho odhad:

$$E(X) = m_X$$

Pro střední hodnotu dostáváme

$$E(X) = 0 \cdot (a + b \cdot 0) + 1 \cdot (a + b \cdot 1) + 2 \cdot (a + b \cdot 2) = 3a + 5b\ .$$

Pro výběrový průměr (tj. odhad prvního momentu) pak máme

$$m_X = \frac{0 \cdot 17 + 1 \cdot 15 + 2 \cdot 8}{17 + 15 + 8} = \frac{31}{40}\ .$$

Celkově máme soustavu rovnic

$$3a + 3b = 1$$

$$3a + 5b = \frac{31}{40}$$

s řešením $b = -\frac{9}{80} = -0.1125$ a $a = \frac{1}{3} - b = \frac{107}{240} \doteq 0.4458$. Jednotlivé pravděpodobnosti pak vycházejí jako

$$P(X = 0) = a = \frac{107}{244} \doteq 0.4459$$

$$P(X = 1) = a + b = \frac{1}{3} \doteq 0.3333$$

$$P(X = 2) = a + 2b = \frac{53}{240} \doteq 0.2208$$

takže všechny podmínky máme splněny a našli jsme skutečně odhad parametru.