

6. cvičení z PSI

27. - 31. října 2014

6.1 [C, 43] Ryby si mohou vybrat ze dvou cest, z nichž jedna je správná (vede k potravě). Každá ryba nezávisle na ostatních pozná správnou cestu s pravděpodobností 0,6. Jaká je pravděpodobnost, že hejno n ryb vybere při "většinovém hlasování" správnou cestu?

6.2 [C, 44] Ve vzorku je 1 mg uhlíku (tj. asi $6 \cdot 10^{23} \cdot 10^{-3}/12 = 5 \cdot 10^{19}$ atomů). Z nich je přibližně $1/10^{12}$ -tina (tj. asi $5 \cdot 10^7$) atomů radioaktivního izotopu C_{14} . Určete symetrický 95%-ní intervalový odhad počtu atomů, které se rozpadnou za 1 rok (tj. za $1/5730$ poločasu rozpadu). Co o tom říká Čebyševova nerovnost?

(**Poznámka:** Doba rozpadu (přeměny) X radioaktivních prvků se řídí podle *exponenciálního rozdělení*

$$F_X(u) = \begin{cases} 0 & , u < 0 \\ 1 - e^{-u/\tau} & , u \geq 0 \end{cases}$$

kde τ je parametr. *Poločas přeměny* $T_{1/2}$ se pak definuje jako doba, za kterou pravděpodobnost přeměny klesne na polovinu, tj. $P(X \leq T_{1/2}) = 1/2$ neboli $T_{1/2} = \tau \ln 2$. Prakticky to pak znamená, že radioaktivita prvků klesne na polovinu, tedy (měřeno počtem atomů) rozpadne se polovina atomů. V našem případě je tedy poločas rozpadu 5730 let a pravděpodobnost rozpadu prvků za 1 rok je rovna $P(X \leq T_{1/2}/5730) = F_X(T_{1/2}/5730) = 1 - (1/2)^{1/5730}$.)

6.3 [C, 48] Počet X ryb, které rybář uloví za den je popsán Poissonovým rozdělením s pravděpodobnostní funkcí

$$p_X(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

s parametrem $\lambda = 3$. Na ryby jde $n = 100$ -krát za rok. Najděte (co nejmenší) symetrický interval, v němž se počet ulovených ryb za rok nachází s pravděpodobností alespoň 95%.

6.4 [C, 46] Na oboru má studovat 600 studentů. Přibližně jen $2/3$ z přijatých studentů se pak nakonec zapíše na studium. Kolik studentů by se mělo přijmout, aby počet zapsaných byl co největší, ale aby překročil 600 s pravděpodobností nejvýše 5%? Jaký pak bude průměrný počet zapsaných studentů? Jak se výsledek změní pro obor, na který má být přijato 60 studentů?

6.5 [C, 45] Životnost baterie má exponenciální rozdělení (viz úloha **6.2**) se střední hodnotou 3 hodiny. Určete pravděpodobnost, že sada obsahující 100 baterií zajistí alespoň 252 hodin provozu.