9. cvičení z PSI

17. - 21. listopadu 2014

9.1 [N, 11.3.17] Náhodná veličina X má *biexponenciální* rozdělení s hustotou

$$f_X(t) = c \cdot e^{-a|t|},\ t \in \mathbb{R}$$

kde $a, c \in (0, +\infty)$. Metodou momentů odhadněte parametry na základě realizace rozsahu $n = 10$, z níž jsme vypočítali realizaci výběrového průměru $\overline{\mathbf{x}} = 2$ a realizaci výběrového rozptylu $s_{\mathbf{x}}^2 = 4$.

Řešení:

$$a = \sqrt{\frac{5}{19}} = \frac{\sqrt{95}}{19}, \quad c = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{19}} = \frac{\sqrt{95}}{38}.$$

9.2 [N, 12.2.8](Test střední hodnoty při známém rozptylu)

Posuďte na hladině významnosti $\alpha = 0,01$ hypotézu, že výsledky hodů mincí mají pravděpodobnost $1/2$, jestliže při $n = 200$ hodech padl líc 80 krát.

(Návod: Pro náhodnou veličinu $X(líc) = 1$, $X(rub) = 0$ použijte (normovanou) charakteristiku

$$T = \frac{\overline{\mathbf{X}} - \mathrm{E}\overline{\mathbf{X}}}{\sqrt{\mathrm{D}\overline{\mathbf{X}}}},$$

jejíž rozdělení aproximujte na základě centrální limitní věty normálním rozdělením.)

Řešení:
Protože $|t| = |\frac{\overline{\mathbf{x}}-0,5}{\frac{1}{2\sqrt{n}}}| = |\frac{0,4-0,5}{0,5}\sqrt{200}| \doteq 2,828 > 2,576 \doteq \Phi^{-1}(0.995)$, hypotézu $H_0 : \mu = \frac{1}{2}$ **zamítáme** pro dané α.

9.3 [C, 60; N, 12.2.10](Test střední hodnoty normálního rozdělení při neznámém rozptylu)

Z $n = 10$ měření krevního tlaku u jednoho pacienta jsme obdrželi výběrový průměr $\overline{\mathbf{x}} = 150$ a výběrovou směrodatnou odchylku $s_{\mathbf{x}} = 20$. Rozhodněte na hladině významnosti $\alpha = 0,05$, zda je střední hodnota krevního tlaku nejvýše 140. Předpokládejte, že výška krevního tlaku má normální rozdělení a jednotlivá měření jsou nezávislá.

Řešení:
Protože $t = \frac{\bar{\mathbf{x}}-c}{s_{\mathbf{x}}}\sqrt{n} = \frac{150-140}{20}\sqrt{10} \doteq 1,58 \leq 1,83 \doteq q_{t(9)}(0.95)$, hypotézu $H_0 : \mu \leq 140$ **nezamítáme** pro dané α.

9.4 [C, 62](Test rozptylu normálního rozdělení)

Do laboratoře bylo odesláno $n = 5$ stejných vzorků krve ke stanovení obsahu alkoholu. Výsledkem byla realizace $\mathbf{x} = (0.8,\ 1,\ 0.6,\ 1.4,\ 0.9)$ (v promilích alkoholu). Posuďte na hladině významnosti $\alpha = 0,05$, zda směrodatná odchylka měření je nejvýše $0,1$ promile alkoholu. Předpokládejte, že obsah alkoholu má normální rozdělení a jednotlivá měření jsou nezávislá.

Řešení:
Protože $t = \frac{(n-1)s_{\mathbf{x}}^2}{c} = \frac{4 \cdot 0,088}{(0,1)^2} \doteq 35,2 > 9,49 \doteq q_{\chi^2(4)}(0.95)$, hypotézu $H_0 : \sigma^2 \leq (0,1)^2$ **zamítáme** pro dané α.