Poznámky k PSI

(P1) Přirozený způsob, jak zavést nezávislost jevů: Přítomnost jednoho jevu (tj. toho, že nastal nebo naopak nenastal) může mít vliv na pravděpodobnost toho, že nastane nějaký jiný jev. Nejdříve si tedy definujeme, co tím přesně myslíme - pravděpodobnost $P(A|B)$ toho, že nastane jev A za předpokladu, že už nastal jev B položíme $P(A|B) := \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$. Nyní řekneme, že jevy A a B jsou nezávislé, právě když $P(A) = P(A|B)$ a $P(B) = P(B|A)$. Ekvivalentně to znamená, že $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

(P2) Mějme množiny X, Y a zobrazeni $f : X \to Y$. Pro libovolný systém $\{U_i \subseteq Y \mid i \in I\}$ a libovolné $U, V \subseteq Y$ platí

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} U_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(U_i)$$

$$f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in I} U_i\Big) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(U_i)$$

$$f^{-1}(U \setminus V) = f^{-1}(U) \setminus f^{-1}(V).$$

Všimněte si, že podobné rovnosti nejsou obecně splněny, pokud f^{-1} nahradíme f (tj. místo vzoru si vezmeme obraz). Nyní si můžeme definovat nové zobrazení

$$\mathcal{P}(X) \xleftarrow{f^*} \mathcal{P}(Y)$$

$$f^{-1}(U) \hookleftarrow U$$

které množině $U \subseteq Y$ přiřadí její vzor $f^{-1}(U) \subseteq X$ (a jehož směr je opačný ke směru zobrazení původního). Vzhledem k rovnostem, které jsme uvedli, platí

$$f^*\Big(\bigcup_{i\in I} U_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f^*(U_i)$$

$$f^*\Big(\bigcap_{i\in I} U_i\Big) = \bigcap_{i\in I} f^*(U_i)$$

$$f^*(\overline{U}) = \overline{f^*(U)}$$

pro každý systém $\{U_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ a $U \in \mathcal{P}(Y)$. Jinými slovy: f^* je *homomorfismus úplných Booleových algeber* $(\mathcal{P}(Y), \cap, \cup, ^-)$ a $(\mathcal{P}(X), \cap, \cup, ^-)$.

Jestliže nyní máme na jedné straně zobrazení f nějaký systém množin popsaný pomocí průniků, sjednocení nebo doplňků (např. σ-algebru nebo tzv. *topologii* nebo něco jiného), můžeme jej pomocí f^* přenést na druhou stranu zobrazení f.

Konkrétně: Jestliže je množina Y vybavena σ-algebrou $\mathcal{B}$, pak $f^*(\mathcal{B})$ je σ-algebra na X a to *nejmenší* taková, při které je zobrazení $f : X \to Y$ stále ještě měřitelné.

Podobně, jestliže je množina X vybavena σ-algebrou $\mathcal{A}$, pak $(f^*)^{-1}(\mathcal{A})$ je σ-algebra na Y a to *největší* taková, při které je zobrazení $f : X \to Y$ stále ještě měřitelné.

Připomeňme si ještě definici: Nechť X' je množina se σ-algebrou $\mathcal{A}'$ a Y' je množina se σ-algebrou $\mathcal{B}'$. Zobrazení $g : X' \to Y'$ se nazývá *měřitelné* pokud vzorem měřitelné množiny v Y' je opět měřitelná množina v X' (tj. $g^*(\mathcal{B}') \subseteq \mathcal{A}'$ nebo ekvivaletně $\mathcal{B}' \subseteq (g^*)^{-1}(\mathcal{A}')$).

(P3) Z definice podmíněné pravděpodobnosti $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ snadno odvodíme, že pro libovolné jevy $A_1, \ldots, A_n$ platí

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i | A_1 \cap \cdots \cap A_{i-1})$$

kde průnik prázdného systému je definovaný jako celý prostor Ω.

Pokud navíc platí, že $A_1 \supseteq A_2 \cdots \supseteq A_n$ (a $A_0 = \Omega$) dostáváme

$$P(A_n) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i | A_{i-1})$$

což je vztah, který se hodí při řešení úlohy **3.1**.