1. cvičení z PSI

28. září - 2. října 2015

1.1 Tři muži a šest žen se náhodně rozdělí na tři stejně početné skupiny. S jakou pravděpodobností bude v každé z nich jeden muž? (Muži i ženy jsou rozlišitelní.)

Řešení:
Rozdělení je určeno tím, kteří lidé jsou spolu ve skupinách. Skupiny tedy nejsou konkrétně označeny, ale pro výpočet je výhodnější si je očíslovat. Tím se nám sice možnosti rozdělení budou pro různá číslování opakovat (tedy skupiny A, B, C dostaneme např. v pořadí (A, B, C) ale také v pořadí (B, A, C) a dalších), ale protože každému rozdělení na skupiny odpovídá stejný počet očíslování (konkrétně $3! = 6$), tak na hodnotu pravděpodobnosti to nebude mít vliv, protože se počítá jako:

$$p = \frac{\text{počet příznivých možností}}{\text{počet všech možností}}.$$

Počet všech možností je tedy nyní počet způsobů jak 9 lidí rozdělit na 3 očíslované skupiny, tj. $\binom{9}{3} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3}$.

Počet příznivých možností je počet všech (očíslovaných) skupin, kde každá obsahuje právě jednoho muže. Každé takové rozdělení je tedy určeno tím, jak zvlášť rozdělíme muže, tedy 3! možností, a zvlášť rozdělíme ženy do 3 (očíslovaných) skupin po dvou, tedy $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2}$. Celkově tak máme:

$$p = \frac{3! \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2}}{\binom{9}{3} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3}} = \frac{3! \cdot \frac{6!}{2!4!} \cdot \frac{4!}{2!2!}}{\frac{9!}{3!6!} \cdot \frac{6!}{3!3!}} = \frac{(3!)^4}{9!} \cdot \frac{6!}{2^3} = \frac{2 \cdot 3^4}{9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{3^2}{4 \cdot 7} = \frac{9}{28} \doteq 0,3214.$$

1.2 Chceme rozestavit do řady vedle sebe 5 vodníků a 7 čarodějnic. Kolika způsoby to můžeme udělat, pokud žádní dva vodníci nemají stát vedle sebe? (Vodníci i čarodějnice jsou rozlišitelní.)

Řešení:
Je potřeba si ještě ujasnit, co se myslí řadou - tj. jestli máme pevně daný začátek (pak má každá postava své pořadové číslo) anebo je to jen dáno tím, které postavy stojí vedle sebe (pak tatáž řada vznikne pokud ji postavíme "pozpátku"). My budeme uvažovat první případ, tj. očíslování. Rozestavení, které splňuje požadovanou podmínku lze ekvivalentně dostat tak, že nejdříve rozestavíme čarodějnice (7! možností) a na místa mezi nimi nebo na krajích (což je dohromady 8 míst) umístíme nejvýše jednoho vodníka (máme tedy zobrazení "vodník $\mapsto$ i-té místo", $i \in \{1, \ldots, 8\}$ - neboli variace bez opakování - celkem $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$ možností). Dohromady máme $(7!) \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 33868800$ možností.

1.3 Vybíráme z pěti vstupenek po 10 Kč, tří vstupenek po 30 Kč a dvou vstupenek po 50 Kč. Vylosujeme-li si náhodně 3 vstupenky, s jakou pravděpodobností bude jejich cena 70 Kč?

Řešení:
Vstupenek je dohromady 10 a počet všech mozných trojic je tedy $\binom{10}{3}$ (pro jednodušší výpočet považujeme vstupenky za rozlišitelné). Pokud má být celková cena tří vstupenek 70 Kč, lze to udělat pouze takto:

$$70 = 50 + 10 + 10$$

nebo

$$70 = 30 + 30 + 10.$$

V prvním případě je to $2 \cdot \binom{5}{2}$ možností a ve druhém $\binom{3}{2} \cdot 5$ možností. Pravděpodobnost je tedy

$$p = \frac{2 \cdot \binom{5}{2} + \binom{3}{2} \cdot 5}{\binom{10}{3}} = \frac{(5 \cdot 4 + 3 \cdot 5) \cdot 6}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{7}{3 \cdot 8} \doteq 0,2917.$$