2. cvičení z PSI

5. - 9. října 2015

2.1 (Kolmogorův model) Zjistěte, zda $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je Kolmogorův model pravděpodobnosti, je-li dáno:

(i) $\Omega = \{1, 2, 3\}$,
$\mathcal{A} = \big\{\emptyset, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2, 3\}\big\}$,
$P(A) = \frac{1}{3}|A|$, $A \in \mathcal{A}$ (kde $|A|$ je počet prvků množiny A).

(ii) $\Omega = \{+, \circ, \odot\}$,
$\mathcal{A} = \big\{\emptyset, \{+\}, \{\circ, \odot\}, \{+, \circ, \odot\}\big\}$,
$P(A) = \frac{1}{3}|A|$, $A \in \mathcal{A}$.

Řešení:
Pro Kolmogorův model je potřeba ověřit, že $\mathcal{A}$ je σ-algebra:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$,
- $A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$,
- $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$,

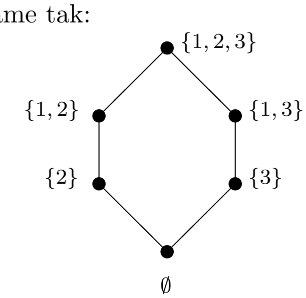
a že $P : \mathcal{A} \to \langle 0, 1\rangle$ je pravděpodobnost:

- $P(\Omega) = 1$,
- $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}$ & A_n jsou navzájem disjunktní $\;\Rightarrow\; P\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$,

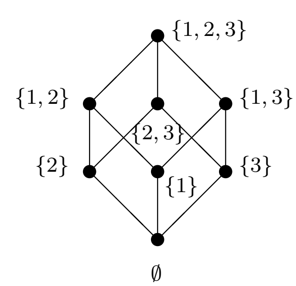
(i) První dvě podmínky pro σ-algebru jsou zřejmě splněny, poslední ne, protože $\{2\}, \{3\} \in \mathcal{A}$, ale $\{2\} \cup \{3\} \notin \mathcal{A}$. Množina $\mathcal{A}$ tedy není σ-algebra a $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ není Kolmogorův model. Tuto nedokonalost, ale můžeme spravit tak, že přidáme prvky, které chybí: tedy prvek $\{2\} \cup \{3\} = \{2, 3\}$ a $\overline{\{2, 3\}} = \{1\}$. Dostaneme tak celou potenční množinu $\mathcal{A}' = \exp(\Omega)$, která σ-algebrou určitě je. Teď ještě ukážeme, že $P : \mathcal{A}' \to \langle 0, 1\rangle$ je pravděpodobnost. Zřejmě $P(\Omega) = \frac{3}{3} = 1$ a dále pro $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \exp(\Omega)$ navzájem disjunktní máme $P\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big) = \frac{1}{3}\big|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big| = \frac{1}{3}\sum_{n\in\mathbb{N}} |A_n| = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$.

Uspořádané množiny (v našem případě inkluzí) můžeme zakreslit tzv. Hasseovým diagramem (větší prvky se zakreslují nad menší a spojují se čárkou, pokud už mezi nimi žádné další prvky nejsou). Dostáváme tak:

$\mathcal{A}$:



$\exp(\Omega)$:



To, že jsme dostali obrázek, který vypadá jako krychle, není náhoda. Každá konečná σ-algebra $\mathcal{B}$ je totiž izomorfní (tj. "chová se jako") potenční množina nějaké konečné množiny $\{1, \dots, n\}$. Konkrétně existuje bijektivní zobrazení $\varphi : \mathcal{B} \to \exp(\{1, \dots, n\})$, že

$$\varphi(A \cap B) = \varphi(A) \cap \varphi(B), \quad \varphi(A \cup B) = \varphi(A) \cup \varphi(B), \quad \varphi(\overline{A}) = \overline{\varphi(A)}$$

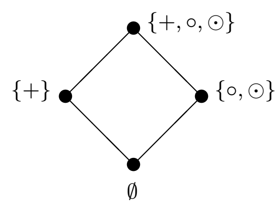
pro libovolné $A, B \in \mathcal{B}$. Množinu $X \subseteq \{1, \dots, n\}$ teď můžeme jednoznačně charakterizovat vektorem $\mathbf{a}_X = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, kde $a_i = 0$ pokud $i \notin X$ a $a_i = 1$ pokud $i \in X$. Dostaneme tak právě všechny vrcholy n-rozměrné krychle a hrany této krychle odpovídají právě všem spojením v Hasseově diagramu množiny $\exp(\{1, \dots, n\})$. Speciálně, každá konečná σ-algebra musí mít velikost 2^n pro nějaké $n \in \mathbb{N}_0$ (což např. zadaná $\mathcal{A}$ neměla).

(ii) Budeme postupovat podobně jako v předchozím případě. Systém $\mathcal{A}$ je zřejmě uzavřen na sjednocení (stačí testovat jen dvojice množin a to navíc takových, které jsou různé od Ω a $\emptyset$) i na doplňky. Tedy $\mathcal{A}$ je σ-algebra, která je navíc podalgebrou $\exp(\{1, 2, 3\})$ při vhodném přejmenování prvků, např.

$$+ \mapsto 1, \quad \circ \mapsto 2, \quad \odot \mapsto 3.$$

Z tohoto důvodu budou splněny i požadavky na pravděpodobnost, protože ta má stejný předpis jako v případě (i), kde už to, jak víme, funguje. Tím spíše to musí platit i pro menší systém množin. Tedy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je Kolmogorův model. Zakreslíme ještě Hasseův diagram:

$\mathcal{A}$:



2.2 (Náhodná veličina) Zjistěte, zda $X : \Omega \to \mathbb{R}$ je náhodná veličina, pokud $(\Omega, \mathcal{A})$ jsou jako v předchozím příkladě 2.1 (2) a platí-li, že

(i) $X(+) = 1$, $X(\circ) = 2$, $X(\odot) = 3$,

(ii) $X(+) = -2$, $X(\circ) = 1$, $X(\odot) = 1$.

Řešení:
Označme $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ dvojici, kde $\mathcal{B}$ je tzv. borelovská σ-algebra. To je nejmenší σ-algebra na $\mathbb{R}$, která obsahuje všechny intervaly. Její prvky se nazývají borelovské množiny. Náhodná veličina je pak takové zobrazení, že pro každou borelovskou množinu $B \in \mathcal{B}$ je $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ (tedy vzorem borelovské množiny - neboli měřitelné množiny v $\mathbb{R}$ - je opět měřitelná množina, tentokrát v Ω). Tuto vlastnost stačí ověřit jen pro určité typy intervalů v $\mathbb{R}$:

X je náhodná veličina $\Leftrightarrow$ $(\forall t \in \mathbb{R})$ $X^{-1}\Big((-\infty, t\rangle\Big) \in \mathcal{A}$

(i) X není náhodná veličina, protože např. $X^{-1}\Big((-\infty, 2.5\rangle\Big) = \{a \in \Omega \mid X(a) \leq 2.5\} = \{+, \circ\} \notin \mathcal{A}$.

(ii) Máme

$$X^{-1}\Big((-\infty, t\rangle\Big) = \begin{cases} \emptyset & , \ t \in (-\infty, -2) \\ \{+\} & , \ t \in \langle 2, 1) \\ \{+, \circ, \odot\} & , \ t \in \langle 1, +\infty) \end{cases}$$

takže X je náhodná veličina. Můžeme si všimnout, že pokud $\mathcal{A}$ je konečná σ-algebra a prvek $\emptyset \neq A \in \mathcal{A}$ je v Hasseově diagramu těsně nad prázdnou množinou, pak každá náhodná veličina musí být na A konstantní (jinak by bylo možné prvky v A ještě dále oddělovat, viz část (i)). V tomto případě tedy σ-algebra udává "hrubost"prostoru Ω.

2.3 (Geometrická pravděpodobnost) Dva přátelé A a B si domluví schůzku mezi 9.00 a 10.00. Jejich příchody na dané místo jsou náhodné v rámci smluveného časového intervalu. Každý bude čekat 10 minut a pak odchází. Jaká je pravděpodobnost, že dojde k setkání?

Řešení:
V rámci geometrické pravděpodobnosti pracujeme vždy v $\mathbb{R}^n$, kde máme obvyklý n-rozměrný objem $\mathrm{vol}(\cdot)$ (a tudíž pracujeme s množinami, kterým nějaký objem přiřadit lze - tzv. borelovské). Kolmogorovým modelem pak bude $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, kde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je borelovská množina taková, že $\mathrm{vol}(\Omega) < \infty$, $\mathcal{B}$ je σ-algebra tvořena všemi borelovskými množinami obsaženými v Ω a $P(A) = \frac{\mathrm{vol}(A)}{\mathrm{vol}(\Omega)}$.

V našem konkrétním případě si jako elementární jev zvolíme dvojici (t_A, t_B), která znamená příchody jednotlivých osob. Tedy $\Omega = \langle 9, 10\rangle \times \langle 9, 10\rangle$. Jev $S \subseteq \Omega$ setkání obou přátel bude pak $S = \{(t_A, t_B) \in \Omega \mid |t_A - t_B| \leq \frac{1}{6}\}$ (za jednotku jsme si zvolili hodinu, takže 10 min $= \frac{1}{6}$ hod). Z grafického znázornění množin v $\mathbb{R}^2$ snadno zjistíme, že $\mathrm{vol}(S) = 1 - (\frac{5}{6})^2 = \frac{11}{36}$ a $\mathrm{vol}(\Omega) = 1$, takže $P(S) = \frac{11}{36}$.

Na tomto příkladě je vidět, že pojmu σ-algebra (a dalším definicím spojeným s pravděpodobností) se prostě nelze vyhnout, pokud máme pracovat s objemem množin (a později s integrováním funkcí).

2.4 (Nezávislé jevy) Revizor že zkušenosti ví, že zhruba v 26% tramvají při kontrole najde alespoň jednoho černého pasažéra. Kolik tramvají musí zkontrolovat, aby s pravděpodobností alespoň 95% našel alespoň jednoho černého pasažéra?

Řešení:
Nejdříve je potřeba správně interpretovat zadání: pravděpodobnost, že revizor v dané tramvaji najde alespoň jednoho černého pasažéra je 0.26. Mějme teď jevy

$$A_n = \text{"revizor v } n\text{-té tramvaji najde alespoň jednoho černého pasažéra"}$$

$$B_n = \text{"revizor v prvních } n \text{ tramvajích najde alespoň jednoho černého pasažéra"}$$

Dále budeme předpokládat, že všechny jevy A_n jsou navzájem nezávislé pro $n \in \mathbb{N}$ (bez tohoto vcelku přirozeného předpokladu bychom neměli dost informace pro další výpočet). Tedy platí

$$P\Big(\bigcap_{k=1}^{m} (A_{j_k})^{i_k}\Big) = \prod_{k=1}^{m} P\Big((A_{j_k})^{i_k}\Big)$$

pro libovolná $j_1 < j_2 < \cdots < j_m$ a $i_1, \ldots, i_m \in \{-1, 1\}$, kde používáme zápis $A^1 := A$ a $A^{-1} := \overline{A}$.

Chceme tedy znát nejmenší $n \in \mathbb{N}$ takové, že $P(B_n) \geq 0.95$. Víme, že $P(A_n) = 0.26$ a $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$. Jednodušší bude pracovat s doplňkovým jevem:

$$P(\overline{B_n}) = P\Big(\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k}\Big) = P\Big(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}\Big) = \prod_{k=1}^{n} P(\overline{A_k}) = (1 - 0.26)^n$$

$$0.05 = 1 - 0.95 \geq 1 - P(B_n) = P(\overline{B_n}) = (0.74)^n$$

$$\log 0.05 \geq n \log 0.74$$

$$9.95 \doteq \frac{\log 0.05}{\log 0.74} \leq n$$

Pozor, logaritmus je záporný pro hodnoty menší než 1. Revizor tedy musí projít alespoň 10 tramvají.

V tomto příkladě jsme pracovali pouze s jevy, aniž bychom znali konkrétní Kolmogorův model. Taková situace je poměrně běžná - Kolmogorův model se většinou nesestavuje, protože není k samotnému výpočtu potřeba. Slouží vlastně jen k tomu, abychom se ujistili, že v zadání nejsou rozpory - tj. existuje (alespoň jeden) model, ve kterém je zadání splněno.

Přesto si ho cvičně sestavíme. Jako množinu Ω všech elementárních jevů si vezmeme všechny možné posloupnosti nul a jedniček. Jednička na n-tém místě posloupnosti znamená nalezení alespoň jednoho černého pasažéra v n-té tramvaji a nula znamená, že tam nalezen nebyl. Posloupnosti budou nekonečné, protože není důvod omezovat je nějakým společným konkrétním číslem ani brát pouze všechny konečné posloupnosti (neměli bychom interpretaci toho, co znamená, že posloupnost končí).

Množina A_n pak sestává právě z těch posloupností, které mají na n-tém místě jedničku a $\overline{A_n}$ z těch, které tam mají nulu. Pro A_n chceme, aby to byly jevy. Jako $\mathcal{A}$ si tedy jednoduše zvolíme nejmenší σ-algebru, která obsahuje všechny množiny A_n, $n \in \mathbb{N}$. Říkáme pak, že A_n generují $\mathcal{A}$. Tato σ-algebra je poměrně složitá struktura, která se nedá nějak jednoduše popsat. Nyní je potřeba zjistit (což je nejtěžší část konstrukce), jestli jsme vůbec schopni definovat pravděpodobnost na celém $\mathcal{A}$ tak, aby $P(A_n) = p$ (kde $0 < p < 1$) byla předepsaná hodnota. Pomůžeme si tím, co už známe - borelovskými množinami a pravděpodobností na $\mathbb{R}$.

Nejdříve si všimneme, že za předpokladu, že pravděpodobnost $P : \mathcal{A} \to \langle 0, 1\rangle$ existuje, pro každé $\omega \in \Omega$ platí $\{\omega\} \in \mathcal{A}$ a $P(\{\omega\}) = 0$ (protože $\{\omega\}$ se dá vyjádřit jako nekonečný průnik množin A_n a jejich doplňků a protože hodnoty pravděpodobnosti konečných průniků klesají k nule). Nyní si vezmeme zobrazení $\varphi : \langle 0, 1\rangle \to \Omega$, které prvku $a \in \langle 0, 1\rangle$ přiřadí jeho rozvoj ve dvojkové soustavě, kde kvůli jednoznačnosti neuvažujeme rozvoje s periodickou jedničkou. Prvků s nejednoznačným rozvojem je ale pouze spočetně mnoho. Protože $\varphi^{-1}(A_n)$ je borelovská množina, platí že i $\varphi^{-1}(A)$ je borelovská pro každé $A \in \mathcal{A}$ (neboť A_n generují $\mathcal{A}$). Tedy φ je meřitelně zobrazení a nyní stačí už jen najít na borelovských podmnožinách intervalu $\langle 0, 1\rangle$ takovou pravděpodobnost $\tilde{P}$, že $\tilde{P}(\varphi^{-1}(A_n)) = p$. Pokud toto budeme mít, hledanou pravděpodobnost pak můžeme korektně definovat jako $P(A) := \tilde{P}\big(\varphi^{-1}(A)\big)$ pro $A \in \mathcal{A}$.

Pravděpodobnost $\tilde{P}$ určíme (na $\langle 0, 1\rangle$) pomocí funkce

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Big(\prod_{i=1}^{n} (a_i + (-1)^{a_i} p) \Big)$$

kde $x \in \langle 0, 1\rangle$ a $x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$ je zápis ve dvojkové soustavě (ne nutně jednoznačný), tj. $a_n \in \{0, 1\}$. Funkce F je spojitá, ostře rostoucí, $F(0) = 0$ a $F(1) = 1$. Takže můžeme pravděpodobnost $\tilde{P}$ zavést jako $\tilde{P}\big(\langle 0, x\rangle\big) = F(x)$, tedy ve smyslu distribuční funkce. Ověření toho, že $\tilde{P}(\varphi^{-1}(A_n)) = p$ je pak technickou záležitostí (kde využijeme i to, že bodů s nejednoznačným rozvojem je jen spočetně mnoho). Všimněme si ještě, že pro $p = \frac{1}{2}$ dostáváme prostě $F(x) = x$, tedy obvyklou "velikost množin" v $\mathbb{R}$.

Jak je vidět z této konstrukce, i na první pohled jednoduché zadání příkladu může vést k netriviálním σ-algebrám a vlastnostem nekonečné aditivity funkce pravděpodobnosti.