16.12.2015, 1. skupina (16:15 - 17:45) Jméno:

Zápočtový test z PSI

Nezapomeňte podepsat VŠECHNY papíry, které odevzdáváte. Škrtejte zřetelně a stejně zřetelně pište i věci, které platí. Co je škrtnuto, nebude bráno v úvahu a naopak. Jestliže něčemu nerozumíte, zeptejte se. Postup je třeba odůvodnit (okomentovat) nebo uvést výpočet. Výsledek bez uvedení jakéhokoliv postup či výpočtu není akceptován. Abyste uspěli v testu, potřebujete získat alespoň 15 bodů.

(1) (10 bodů) V dílně pracuje 10 dělníků rozdělených do skupin A, B a C, přičemž každý z dělníků vyrobí stejný počet výrobků. Skupina A se skládá z pěti dělníků, skupina B ze tří a skupina C ze dvou dělníků. Z výrobků skupiny A je jich 96% standardních, ze skupiny B je to 90% a z výrobků skupiny C je jich jen 85% standardních. Všechny výrobky jdou do skladu, ze kterého jsme náhodně vybrali jeden výrobek, a zjistili, že je standardní. Jaká je pravděpodobnost, že ho vyrobil někdo ze skupiny A?

Řešení:
Skupiny si pro přehlednost očísluje 1 až 3.

Označme jevy:

A_i = "vybraný výrobek je vyrobený i-tou skupinou",
S = "vybraný výrobek je standardní".

Víme, že A_1, A_2 a A_3 je úplný disjunktní systém jevů a vzhledem k tomu, že každý dělník přispěje do skladu stejným počtem výrobků, je pravděpodobnost $P(A_i)$ úměrná počtu dělníků v i-té skupině. Tedy

$$P(A_1) = 0,5 \qquad P(A_2) = 0.3 \qquad P(A_3) = 0.2$$

$$P(S|A_1) = 0.96 \qquad P(S|A_2) = 0.9 \qquad P(S|A_3) = 0.85$$

a zajímá nás $P(A_1|S)$. Z Bayesovy věty máme:

$$P(A_1|S) = \frac{P(S|A_1) \cdot P(A_1)}{P(S)}$$

$$P(S) = \sum_{i=1}^{3} P(S|A_i) \cdot P(A_i) = 0.96 \cdot 0.5 + 0.9 \cdot 0.3 + 0.85 \cdot 0.2 = 0.92$$

a tedy

$$P(A_1|S) = \frac{0.96 \cdot 0.5}{0.92} = \frac{12}{23} \doteq 0.5217\ .$$

Ještě je dobré uvědomit si, jak vypadá Kolmogorův model, speciálně jaké jsou pravděpodobnosti elementárních jevů:

- Ω = "sklad výrobků", počet výrobků ve skladu je $n := |\Omega|$
- elementární jev $\omega \in \Omega$ je tedy vytažení daného výrobku ze skladu
- pravděpodobnost vytažení daného výrobku ze skladu bude dána Laplaceovou pravděpodobnosti, tj. $P(\{\omega\}) = \frac{1}{n}$
- $A_i = \{\omega \in \Omega \mid \text{vytažení } \omega \text{ takového výrobku, který byl vyroben } i\text{-tou skupinou}\}$
- pokud každý dělník vyrobí právě K výrobků a počet dělníků v i-té skupině je m_i a celkový počet dělníků je $m = 10$, pak je $n = K \cdot m$ a $|A_i| = K \cdot m_i$ a tedy $P(A_i) = \sum_{\omega \in A_i} \frac{1}{K \cdot m} = \frac{K \cdot m_i}{K \cdot m} = \frac{m_i}{m}$

Zásadní věcí je tedy to, že "sesypáním"výrobků do skladu jsme způsobili, že každý výrobek má stejnou šanci, že ho vybereme.

(2) (10 bodů) Náhodná veličina X představuje hodnoty, které padají na pravidelné hrací kostce. Pro veličinu $Y = 2X - 1$ určete její střední hodnotu, rozptyl a distribuční funkci.

Řešení:
Veličina X má hodnoty $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ a pravděpodobnostní funkcí

$$p_X(i) = \begin{cases} \frac{1}{6} & , \ i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ \\ 0 & , \ \text{jinak.} \end{cases}$$

Protože $E(Y) = E(2X - 1) = 2E(X) - 1$ a $D(Y) = D(2X - 1) = D(2X) = 2^2 D(X)$, stačí zjistit střední hodnotu a rozptyl pro veličinu X:

$$E(X) = \sum_{i \in \mathbb{R}} i \cdot p_X(i) = \frac{1}{6}\big(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6\big) = \frac{1}{2}(1 + 6) = \frac{7}{2} = 3.5$$

$$E(X^2) = \sum_{i \in \mathbb{R}} i^2 \cdot p_X(i) = \frac{1}{6}\big(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2\big) = \frac{91}{6} \doteq 15.166$$

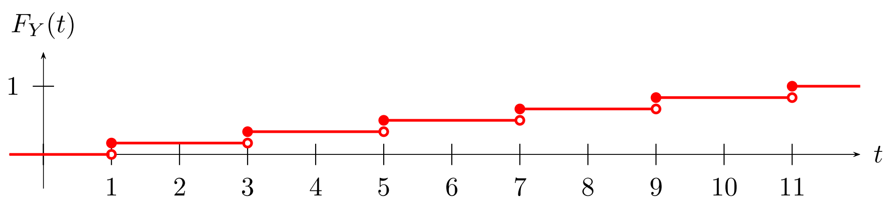
$$D(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12} \doteq 2.9167\ .$$

Takže máme

$$E(Y) = 6 \quad \text{a} \quad D(Y) = \frac{35}{3} \doteq 11,67\ .$$

Veličina Y nabývá hodnot $1, 3, 5, 7, 9, 11$ se stejnou pravděpodobností, takže distribuční funkce bude

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & , \ t < 1 \\ \\ \frac{1}{6} i & , \ t \in \langle 2i - 1, 2i + 1), \quad i = 1, 2, 3, 4, 5 \\ \\ 1 & , \ t \geq 11 \end{cases}$$



(3) (10 bodů) Hodíme 420 krát pravidelnou šestistěnnou hrací kostkou a výsledky hodů sčítáme. Pomocí centrální limitní věty odhadněte pravděpodobnost, že součet bude ležet mezi čísly 1400 a 1550.

Řešení:
Pro $i = 1, \ldots, n$ (kde $n = 420$) si zavedeme diskrétní veličiny

$$X_i = \text{"}\textit{hodnota, která padne na kostce při i-tém hodu}\text{"}$$

Veličiny X_i považujeme za nezávislé. Střední hodnotu a rozptyl už máme spočítánu z předchozího příkladu:

$$E(X_i) = 3.5 \qquad D(X_i) = \frac{35}{12}\ .$$

Součet hodnot se vyjádří jako

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i\ .$$

Máme teď určit $P(1400 \leq X \leq 1550)$, což uděláme za pomoci centrální limitní věty použité na normovanou veličinu $\mathrm{norm}(X) = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}$. K tomu potřebujeme znát:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = 420 \cdot 3.5 = 1470$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) = 420 \cdot \frac{35}{12} = 1225 = (35)^2$$

Takže

$$\mathrm{norm}(X) = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}} = \frac{X - 1470}{35}$$

a můžeme psát (pomocí úprav nerovností):

$$P(1400 \leq X \leq 1550) = P\Big(\frac{1400 - 1470}{35} \leq \frac{X - 1470}{35} \leq \frac{1550 - 1470}{35}\Big) =$$

$$= P\Big(-2 \leq \mathrm{norm}(X) \leq \frac{16}{7}\Big) \doteq \Phi\Big(\frac{16}{7}\Big) - \Phi(-2) \doteq$$

$$\doteq \Phi(2.2857) - 1 + \Phi(2) \doteq 0.98886 + 0.97725 - 1 = 0.96611 \ .$$