17.12.2015, 3. skupina (14:30 - 16:00) Jméno:

**Zápočtový test z PSI**

Nezapomeňte podepsat VŠECHNY papíry, které odevzdáváte. Škrtejte zřetelně a stejně zřetelně pište i věci, které platí. Co je škrtnuto, nebude bráno v úvahu a naopak. Jestliže něčemu nerozumíte, zeptejte se. Postup je třeba odůvodnit (okomentovat) nebo uvést výpočet. Výsledek bez uvedení jakéhokoliv postup či výpočtu není akceptován. Abyste uspěli v testu, potřebujete získat alespoň 15 bodů.

**(1)** (10 bodů) Máme testovací metodu pro výrobek, která ale nefunguje vždy. Pokud je výrobek defektní, test ukáže, že je defektní s pravděpodobností 0.9. Pokud je výrobek funkční, test řekne, že je defektní s pravděpodobností 0.2. Daný výrobek je funkční s pravděpodobností 0.7. Nyní nezávisle otestujeme 3 výrobky s výsledkem testu: funkční. Jaká je pravděpodobnost, že všechny výrobky jsou skutečně funkční?

**Řešení:**
Označme jevy:

$T_i =$ "test ukáže, že $i$-tý výrobek je funkční",
(doplňkový jev: $\overline{T_i} =$ "test ukáže, že $i$-tý výrobek je defektní")

$V_i =$ "$i$-tý výrobek je funkční",
(doplňkový jev: $\overline{V_i} =$ "$i$-tý výrobek je defektní").

Víme, že

$$P(\overline{T_i}|\overline{V_i}) = 0.9 \qquad P(\overline{T_i}|V_i) = 0.2 \qquad P(V_i) = 0.7\ .$$

Nejdříve si spočítáme pravděpodobnost, že $i$-tý výrobek je funkční, pokud test říká, že by funkční být měl. Bude nás tedy zajímat $P(V_i|T_i)$. Z Bayesovy věty máme:

$$P(V_i|T_i) = \frac{P(T_i|V_i)\cdot P(V_i)}{P(T_i)} = \frac{\big(1 - P(\overline{T_i}|V_i)\big)\cdot P(V_i)}{1 - P(\overline{T_i})}$$

$$P(\overline{T_i}) = P(\overline{T_i}|V_i)\cdot P(V_i) + P(\overline{T_i}|\overline{V_i})\cdot P(\overline{V_i}) = 0.2\cdot 0.7 + 0.9\cdot 0.3 = 0.41$$

a tedy

$$P(V_i|T_i) = \frac{0.8\cdot 0.7}{0.59} = \frac{56}{59} \doteq 0.9492\ .$$

Pro nezávislé testování 3 výrobků pak pravděpodobnost, že všechny výrobky jsou funkční za předpokladu, že test o všech ukázal, že jsou funkční je

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^{3} V_i \Big| \bigcap_{i=1}^{3} T_i\Big) = \frac{P\Big(\bigcap_{i=1}^{3} V_i \cap \bigcap_{i=1}^{3} T_i\Big)}{P\Big(\bigcap_{i=1}^{3} T_i\Big)} = \frac{P\Big(\bigcap_{i=1}^{3} (V_i \cap T_i)\Big)}{P\Big(\bigcap_{i=1}^{3} T_i\Big)} =$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{3} P\big(V_i \cap T_i\big)}{\prod_{i=1}^{3} P(T_i)} = \prod_{i=1}^{3} P(V_i|T_i) = \Big(\frac{56}{59}\Big)^3 \doteq (0.9492)^3 \doteq 0.8552$$

Zde jsme předpokládali, že jevy týkající se vždy výhradně $i$-tého výrobků jsou navzájem nezávislé (tedy $T_1, T_2, T_3$ jsou nezávislé a $V_1\cap T_1, V_2\cap T_2, V_3\cap T_3$ jsou nezávislé). Tedy dle očekávání je to třetí mocnina podmíněné pravděpodobnosti pro jeden výrobek.

**(2)** (10 bodů) Náhodná veličina $X$ má distibuční funkci

$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t-2} & , \ t \geq -2 \\ 0 & , \ t < -2 \end{cases}$$

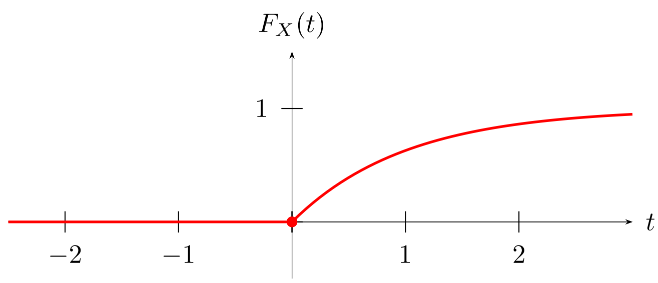
Načrtněte graf distribuční funkce, určete hustotu $f_X$ a spočítejte střední hodnotu veličiny $Y = \frac{X}{2}$.

**Řešení:**

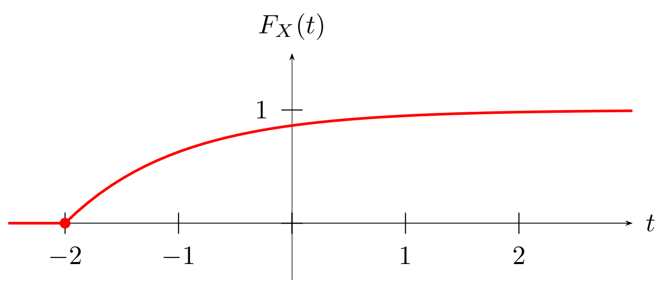
Pro veličinu $Z := X + 2$ máme

$$F_Z(t) = P(X + 2 \leq t) = P(X \leq t - 2) = F_X(t - 2) = \begin{cases} 1 - e^{-t} & , \ t \geq 0 \\ 0 & , \ t < 0 \end{cases}$$

takže $Z$ má exponenciální rozdělení a graf $F_Z$ je




pro $X = Z - 2$ tedy graf $F_X$ bude posunutý o 2 směrem doleva:




Hustotu $f_X$ získáme jako derivaci $F_X$:

$$f_X(t) = \begin{cases} e^{-t-2} & , \ t \geq -2 \\ 0 & , \ t < -2 \end{cases}$$

Pomocí hustoty spočítáme střední hodnotu

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_X(t) \ dt = \int_{-2}^{\infty} t \cdot e^{-t-2} \ dt = \Big[ -(t+1)e^{-t-2} \Big]_{-2}^{\infty} = -1$$

a tudíž $E(Y) = E(\frac{X}{2}) = -\frac{1}{2}$.

**(3)** (10 bodů) Výška mužů (určitého věku) je náhodná veličina o střední hodnotě 180 cm a směrodatnou odchylkou 10 cm. Určete pravděpodobnost, že průměrná výška $n = 20$ mužů bude v intervalu 175 cm a 185 cm

(a) pomocí centrální limitní věty,

(b) pomocí Čebyševovy nerovnosti.

**Řešení:**
Výšku $i$-tého může (pro $i = 1, \ldots, n$) si označíme jako $X_i$. Veličiny $X_i$ považujeme za nezávislé, se střední hodnotou $E(X_i) = 180$ cm a směrodatnou odchylkou $\sigma_i = \sqrt{D(X_i)} = 10$ cm.

Průměrná výška se pak vyjádří jako

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \ .$$

Zajímá nás $P(175 \leq \overline{X} \leq 185)$. Budeme potřebovat:

$$E(\overline{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = 180$$

$$D(\overline{X}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 = \frac{10^2}{n} = \frac{100}{20} = 5$$

Takže

$$\mathrm{norm}(\overline{X}) = \frac{\overline{X} - E(\overline{X})}{\sqrt{D(\overline{X})}} = \frac{\overline{X} - 180}{\sqrt{5}} \ .$$

(a) Odhad pomocí centrální limitní věty - úpravami nerovností dostaneme:

$$P(175 \leq \overline{X} \leq 185) = P\Big(\frac{175-180}{\sqrt{5}} \leq \frac{\overline{X}-180}{\sqrt{5}} \leq \frac{185-180}{\sqrt{5}}\Big) = P\Big(-\sqrt{5} \leq \mathrm{norm}(\overline{X}) \leq \sqrt{5}\Big) \doteq$$

$$\doteq \Phi\Big(\sqrt{5}\Big) - \Phi\Big(-\sqrt{5}\Big) = 2\cdot\Phi\Big(\sqrt{5}\Big) - 1 \doteq 2\cdot\Phi\Big(2.2361\Big) - 1 \doteq 2\cdot 0.98733 - 1 = 0.97466$$

Tedy asi 97.5%.

(b) Odhad pomocí Čebyševovy nerovnosti - použijeme tvar, který už máme:

$$P(175 \leq \overline{X} \leq 185) = P\Big(\big|\mathrm{norm}(\overline{X})\big| \leq \sqrt{5}\Big) \geq 1 - \frac{1}{(\sqrt{5})^2} = \frac{4}{5} = 0.8$$

Dostáváme tedy sice spodní odhad 80%, zato přesný.