17.12.2015, 4. skupina (16:15 - 17:45) Jméno:

Zápočtový test z PSI

Nezapomeňte podepsat VŠECHNY papíry, které odevzdáváte. Škrtejte zřetelně a stejně zřetelně pište i věci, které platí. Co je škrtnuto, nebude bráno v úvahu a naopak. Jestliže něčemu nerozumíte, zeptejte se. Postup je třeba odůvodnit (okomentovat) nebo uvést výpočet. Výsledek bez uvedení jakéhokoliv postup či výpočtu není akceptován. Abyste uspěli v testu, potřebujete získat alespoň 15 bodů.

(1) (10 bodů) Cestovatel přijede do města, kde je 30% lhářů, 15% náladových a 55% normálních lidí. Lháři lžou s pravděpodobností 0.9. Normální lidi mluví s pravděpodobností 0.75 pravdu. Náladový lidé v polovině případů lžou a v polovině říkají pravdu. Cestovatel potkal jednoho z obyvatel města a zeptal se ho, jestli je normální. Jaká je pravděpodobnost, že mu cizinec odpoví, že je normální?

Řešení:
Označme si jevy:

$A =$ "cestovatel se zeptal lháře",
$B =$ "cestovatel se zeptal náladového člověka",
$C =$ "cestovatel se zeptal normálního člověka",

$W =$ "dotyčný odpoví, že je normální"
(doplňkový jev: $\overline{W} =$ "dotyčný odpoví, že není normální")

Víme, že A, B, C je úplný disjunktní systém jevů a

$$P(A) = 0.3 \quad P(B) = 0.15 \quad P(C) = 0.55$$

$$P(W|A) = 0.9 \quad P(W|B) = 0.5 \quad P(W|C) = 0.75$$

a zajímá nás $P(W)$. Z věty o úplné pravděpodobnosti máme:

$$P(W) = P(W|A) \cdot P(A) + P(W|B) \cdot P(B) + P(W|C) \cdot P(C) =$$

$$= 0.9 \cdot 0.3 + 0.5 \cdot 0.15 + 0.75 \cdot 0.55 = 0.7575 \ .$$

Cizinec tedy odpoví, že je normální, s pravděpodobností $75,75\%$.

Je dobré si ještě všimnout, jak souvisí jev $W =$ "dotyčný odpoví, že je normální"s jevy

$T =$ "dotyčný odpovídá pravdivě",
$F =$ "dotyčný odpovídá nepravdivě".

Vztah je zřejmě tento:

$$W = (A \cap F) \cup (B \cap F) \cup (C \cup T) \ .$$

(2) (10 bodů) Nezáporná náhodná veličina X má hustotu

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & , \ t < 1 \\ c \cdot t^{-3} & , \ t \geq 1 \end{cases}$$

kde c je vhodná konstanta. Určete hodnotu c a napište vzorec pro distribuční funkci F_X a distribuční funkci F_Y veličiny $Y = \frac{1}{X+1}$.

Řešení:
Pro určení konstanty c potřebujeme, aby

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\ dt = c\int_1^{\infty} t^{-3}\ dt = c\Big[\frac{t^{-2}}{-2}\Big]_1^{\infty} = \frac{c}{2}$$

tedy $c = 2$. Distribuční funkce je rovna

$$F_X(u) = \int_{-\infty}^{u} f_X(t)\ dt$$

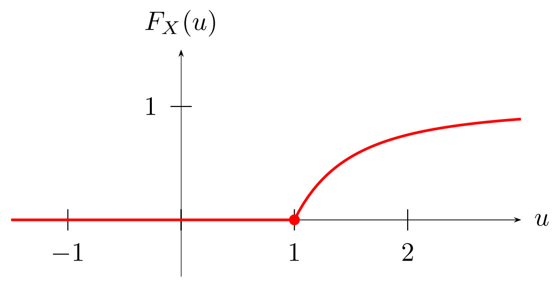
a pro $u \geq 1$ tedy máme

$$F_X(u) = \int_1^{u} 2t^{-3}\ dt = \Big[-t^{-2}\Big]_1^{u} = 1 - \frac{1}{u^2}$$

celkově pak

$$F_X(u) = \begin{cases} 0 & ,\ u \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{u^2} & ,\ u \geq 1 \end{cases}$$

s grafem



Protože X je nezáporná spojitá veličina, pro distribuční funkci F_Y pro $u > 0$ máme

$$F_Y(u) = P(Y \leq u) = P\Big(\frac{1}{X+1} \leq u\Big) = P\Big(\frac{1}{u} \leq X + 1\Big) = P\Big(\frac{1}{u} - 1 \leq X\Big) =$$
$$= 1 - P\Big(X < \frac{1}{u} - 1\Big) = 1 - F_X\Big(\frac{1-u}{u}\Big)\ .$$

Pro $\frac{1-u}{u} \geq 1$ a $u > 0$ tak dostáváme

$$F_Y(u) = 1 - F_X\Big(\frac{1-u}{u}\Big) = 1 - \Big(1 - \frac{1}{(\frac{1-u}{u})^2}\Big) = \frac{u^2}{(1-u)^2}\ .$$

Pro $\frac{1-u}{u} \leq 1$ a $u > 0$ pak máme

$$F_Y(u) = 1 - F_X\Big(\frac{1-u}{u}\Big) = 1\ .$$

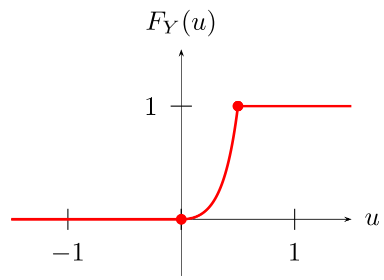
A nakonec, X je nezáporná veličina, takže $Y = \frac{1}{X+1} > 0$ a tudíž pro $u \leq 0$ je

$$F_Y(u) = P(Y \leq 0) = 0\ .$$

Celkově pak dostáváme

$$F_Y(u) = \begin{cases} 0 & ,\ u \leq 0 \\ \frac{u^2}{(1-u)^2} & ,\ u \in (0, \frac{1}{2}\rangle \\ 1 & ,\ u \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

s grafem



Distribuční funkce F_Y je opět (absolutně) spojitá.

(3) (10 bodů) Hmotnost jedné součástky v kilogramech je náhodná veličina s rozdělením o střední hodnotě 5 kg a rozptylu 9 kg^2. Každá součástka je zabalena do krabice o hmotnosti 2 kg. Určete pravděpodobnost, že auto, naložené $n = 150$ takovými (plnými) krabicemi bude přetížené, je-li maximální možné zatížení auta 1100 kg.

Řešení:
Pro $i = 1, \ldots, n$ si zavedeme veličiny

$$X_i = \textit{hmotnost součástky zabalené v krabici.}$$

Veličiny X_i považujeme za nezávislé s rozdělením se střední hodnotou $E(X_i) = 5 + 2 = 7$ kg a rozptylem $D(X_i) = 9$ kg^2.

Hmotnost nákladu auta pak bude

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

což je opět veličina s rozdělením takovým, že

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = n \cdot 7 = 1050$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) = n \cdot 9 = 1350$$

$$\sqrt{D(X)} = \sqrt{1350} = 15\sqrt{6} \doteq 36.742\ .$$

Pravděpodobnost, že auto bude přetížené je tedy $P(X > 1100)$. Určíme ji za pomoci centrální limitní věty použité na normovanou veličinu

$$\mathrm{norm}(X) = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}} = \frac{X - 1050}{15\sqrt{6}}$$

Pomocí úprav nerovností můžeme psát:

$$P(X > 1100) = P\Big(\frac{X - 1050}{15\sqrt{6}} > \frac{1100 - 1050}{15\sqrt{6}}\Big) = P\Big(\mathrm{norm}(X) > \frac{10}{3\sqrt{6}}\Big) \doteq$$

$$\doteq 1 - \Phi\Big(\frac{10\sqrt{6}}{3 \cdot 6}\Big) = 1 - \Phi\Big(\frac{5\sqrt{6}}{9}\Big) \doteq 1 - \Phi(1.3608) \doteq 1 - 0.91321 = 0.08679\ .$$

Pravděpodobnost, že auto bude přetížené, tedy bude asi $8,68\%$.