17.12.2015, 5. skupina (18:00 - 19:30) Jméno:

**Zápočtový test z PSI**

Nezapomeňte podepsat VŠECHNY papíry, které odevzdáváte. Škrtejte zřetelně a stejně zřetelně pište i věci, které platí. Co je škrtnuto, nebude bráno v úvahu a naopak. Jestliže něčemu nerozumíte, zeptejte se. Postup je třeba odůvodnit (okomentovat) nebo uvést výpočet. Výsledek bez uvedení jakéhokoliv postup či výpočtu není akceptován. Abyste uspěli v testu, potřebujete získat alespoň 15 bodů.

**(1)** (10 bodů) Když vypravěč vypráví dětem nějaký svůj zážitek, je šance 40%, že si vymýšlí. Děti to poznají v 70% případů. Na druhou stranu, i když si zrovna nevymýšlí, tak mu zase ve 20% případů nevěří.

(a) Jaká je pravděpodobnost, že následující zážitek budou děti vypravěči věřit?

(b) Další vypravěčův příběh mu děti uvěřili. Jaká je pravděpodobnost, že vypravěč si nevymýšlel?

**Řešení:**
Označme si jevy:

$V =$ "vypravěč si vymýšlí",
(doplňkový jev: $\overline{V} =$ "vypravěč si nevymýšlí")

$D =$ "děti vyprávění věří",
(doplňkový jev: $\overline{D} =$ "děti vyprávění nevěří").

Víme, že

$$P(V) = 0.4 \qquad P(\overline{D}|V) = 0.7 \qquad P(\overline{D}|\overline{V}) = 0.2\ .$$

(a) Zajímá nás $P(D)$. Z věty o úplné pravděpodobnosti máme:

$$P(\overline{D}) = P(\overline{D}|V)\cdot P(V) + P(\overline{D}|\overline{V})\cdot P(\overline{V}) = 0.7\cdot 0.4 + 0.2\cdot 0.6 = 0.4$$

a tedy

$$P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - 0.4 = 0.6\ .$$

(b) Zajímá nás $P(\overline{V}|D)$. Z Bayesovy věty a předchozího máme:

$$P(\overline{V}|D) = \frac{P(D|\overline{V})\cdot P(\overline{V})}{P(D)} = \frac{\big(1 - P(\overline{D}|\overline{V})\big)\cdot\big(1 - P(V)\big)}{P(D)} = \frac{0.8\cdot 0.6}{0.6} = 0.8\ .$$

**(2)** (10 bodů) Náhodný vektor $(X,Y)$ má diskrétní rozdělení určené pravděpodobnostní funkcí $p_{X,Y}$, jejíž hodnoty udává tabulka

| X \ Y | -1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1/6 | 0 | 1/3 |
| 2 | 1/8 | 1/4 | 1/8 |

Vypočtěte pravděpodobnost $P(X > Y)$ a střední hodnotu $E(XY^2)$.

**Řešení:**
Pro výpočet pravděpodobnosti $P(X > Y)$ je jednodušší spočítat doplněk

$$P(X > Y) = 1 - P(X \leq Y) = 1 - P(X = 1 \;\&\; Y = 1) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \; .$$

Pro střední hodnotu veličiny $XY^2$ použijeme obvyklý vzorec s pravděpodobnostní funkcí

$$E(XY^2) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{R}^2} i \cdot j^2 \cdot p_{X,Y}(i,j) =$$

$$= 1 \cdot (-1)^2 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot (0)^2 \cdot 0 + 1 \cdot (1)^2 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot (-1)^2 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot (0)^2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot (1)^2 \cdot \frac{1}{8} =$$
$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 \; .$$

**(3)** (10 bodů) Náhodná veličina $X$ nabývá hodnot s pravděpodobnostmi dle tabulky, kde $c, q$ jsou reálné parametry rozdělení. Z četností hodnot v náhodném výběru, uvedených v tabulce, odhadněte parametry $c$ a $q$.

| hodnota $i$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| pravděpodobnost $p_X(i)$ | $c - q$ | $c$ | $c + q$ |
| četnost $n_i$ | 8 | 10 | 5 |

**Řešení:**
Protože součet pravděpodobností všech hodnot je 1, musí být

$$1 = (c - q) + c + (c + q) = 3c$$

tedy $c = \frac{1}{3}$. Současně musí být pravděpodobnosti nezáporné, tj. $0 \leq c - q = \frac{1}{3} - q$ a $0 \leq c + q = \frac{1}{3} + q$, takze $|q| \leq \frac{1}{3}$. Zbývá tedy odhadnout parametr $q$.

**Metoda maximální věrohodnosti:**

Hledáme hodnotu $q$, která maximalizuje funkci věrohodnosti

$$L(q) = P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i) = \left(\frac{1}{3} - q\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \cdot \left(\frac{1}{3} + q\right)^5$$

kde $X_i$ jsou jednotlivé nezávislé veličiny (pokusy) a $x_i$ naměřené hodnoty. To odpovídá hledání maxima funkce

$$\ell(q) = \ln\big(L(q)\big) = 8 \cdot \ln\left(\frac{1}{3} - q\right) + 10 \cdot \ln\frac{1}{3} + 5 \cdot \ln\left(\frac{1}{3} + q\right)$$

na intervalu $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Protože maximum existuje, musí pro něj platit

$$0 = \ell'(q) = \frac{-8}{\frac{1}{3} - q} + \frac{5}{\frac{1}{3} + q}$$

Odhad parametru $q$ je

$$q = -\frac{1}{13} \doteq -0.07692 \; .$$

Odhady pravděpodobností hodnot $1, 2, 3$ jsou tedy

$$p_X(1) = \frac{16}{39} \doteq 0.4103 \qquad p_X(2) = \frac{1}{3} \doteq 0.3333 \qquad p_X(3) = \frac{10}{39} \doteq 0.2564$$

což vyhovuje zadání.

**Metoda momentů:**

Střední hodnota je

$$E(X) = \left(\frac{1}{3} - q\right) + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \left(\frac{1}{3} + q\right) = 2 + 2\,q$$

její odhad z realizace je

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_i i\, n_i = \frac{1}{8 + 10 + 5} \cdot (8 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 5) = \frac{43}{23} \; .$$

Porovnáním dostaneme

$$2 + 2q = E(X) = \overline{x} = \frac{43}{23}$$

což odpovídá hodnotě

$$q = -\frac{3}{46} \doteq -0.06522 \; .$$

Odhady pravděpodobností hodnot $1, 2, 3$ jsou tedy

$$p_X(1) = \frac{55}{138} \doteq 0.3986 \qquad p_X(2) = \frac{1}{3} \doteq 0.3333 \qquad p_X(3) = \frac{37}{138} \doteq 0.2681$$

což opět vyhovuje zadání.