5. cvičení z PSI

26. - 30. října 2015

5.1 (kvantil, střední hodnota, rozptyl - pokračování příkladu z minula)
Náhodná veličina X má distribuční funkci

$$F_X(t) = \begin{cases} \frac{e^t}{3} & , t < 0 \\ \frac{1}{2} & , t \in \langle 0, \frac{1}{2}) \\ \frac{t+1}{3} & , t \in \langle \frac{1}{2}, 1) \\ 1 & , 1 \leq t \end{cases}$$

a je směsí diskrétní náhodné veličiny U a spojité náhodné veličiny V, konkrétně $X = \mathrm{Mix}_{\frac{1}{2}}(U, V)$.
Pro X, U a V najděte kvantilové funkce, střední hodnoty a rozptyly.

Řešení:
Kvantilová funkce pro veličinu X je definována jako

$$q_X(\alpha) = \frac{1}{2}\Big(\sup\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \leq \alpha\} + \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq \alpha\}\Big)$$

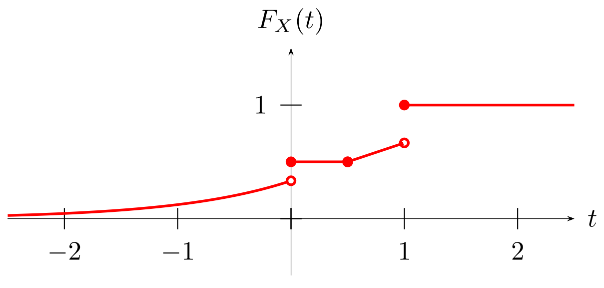
pro $\alpha \in (0, 1)$. Tato definice vypadá poněkud složitě, ale je to jen kvůli případným bodům nespojitosti funkce $F(x)$. Pro zbylé body platí následující:

Veta: *Distribuční funkce F_X a kvantilová funkce q_X jsou vůči sobě navzájem inverzní tam, kde jsou spojité a ostře rostoucí.*

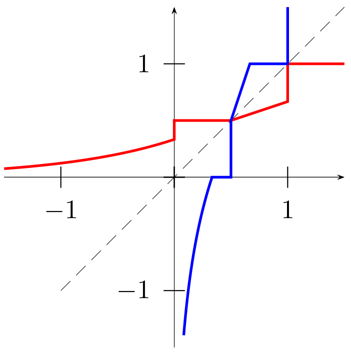
Obecněji pak platí následující: graf kvantilové funkce q_X získáme z grafu distribuční funkce F_X takto

- graf F_X doplníme na "souvislou čáru", tj. skoky funkce F_X nahradíme spojitou svislou úsečkou,
- tento útvar převrátíme podle osy 1. a 3. kvadrantu (tj. podle přímky "$x = y$"),
- tam, kde převrácený útvar není funkcí (tj. obsahuje svislé čáry) tyto úseky odstraníme a nahradíme jedinou hodnotou, a sice průměrem limit z práva a zleva (případné krajní úseky v bodech $\alpha = 0$ a $\alpha = 1$ odstraníme úplně, protože tam se kvantil nedefinuje).

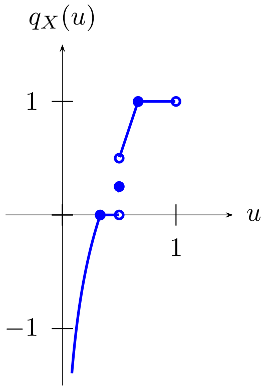
V našem případě tedy graf F_X:



přejde na



a dostaneme graf q_X:



Kvantilovou funkci určíme také explicitně a to tak, že najdeme příslušné inverze, tj. vyjádříme u z rovnic $\frac{e^t}{3} = u$ a $\frac{t+1}{3} = u$:

$$q_X(u) = \begin{cases} \ln(3u) & , \ u \in (0, \frac{1}{3}) \\ 0 & , \ u \in \langle \frac{1}{3}, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{4} & , \ u = \frac{1}{2} \\ 3u - 1 & , \ u \in (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}) \\ 1 & , \ u \in \langle \frac{2}{3}, 1). \end{cases}$$

Jestliže nyní budeme uvažovat Kolmogorův model na intervalu $\Omega = (0,1)$ s rovnoměrným rozdělením pravděpodobnosti, můžeme kvantilovou funkci $q_X : \Omega \to \mathbb{R}$ chápat jako jeden ze způsobů, jak si představit veličinu X, tj. q_X je nyní náhodná veličina se stejnou distribuční funkcí jako má X (skutečně je $F_{q_X} = F_X$). Tato představa má tu výhodu, že na $\Omega = (0,1)$ můžeme "běžně"integrovat a např. střední hodnotu X nyní nemusíme složité vypočítávat přes její diskrétní a spojitou část, ale můžeme ji spočítat prostě jako střední hodnotu z q_X. Díky tomu, že interval $(0,1)$ má délku jedna, bude střední hodnota z q_X jednoduše integrál z této funkce. Dostáváme tak jiný pohled na to, proč je $E(X) = \int_0^1 q_X(u)\ du$.

Protože máme určen kvantil, můžeme ho využít pro výpočet střední hodnoty $E(X)$:

$$E(X) = \int_0^1 q_X(u)\ du = \int_0^{\frac{1}{3}} \ln(3u)\ du + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} 3u - 1\ du + \int_{\frac{2}{3}}^{1} 1\ du =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \ln v \; dv + \left[\frac{3u^2}{2} - u\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} + \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}\Big[v(\ln v - 1)\Big]_0^1 + \frac{11}{24} = -\frac{1}{3} + \frac{11}{24} = \frac{1}{8} = 0.125$$

Střední hodnota odpovídá tedy ploše určené kvantilem a ta se dá při překlopení podle osy 1. a 3. kvadrantu spočítat i z distribuční funkce jako $E(X) = -\int_{-\infty}^{0} F_X(t)\; dt + \int_0^{\infty} \big(1 - F_X(t)\big)\; dt$. To má tu výhodu, že nemusíme určovat kvantil, ani veličinu rozkládat na diskrétní a spojitou složku. Na druhou stranu rozptyl ani jiné transformace veličiny X takhle nespočítáme.

Pro rozptyl platí $D(X) = E\Big(\big(X - E(X)\big)^2\Big) = E(X^2) - \Big(E(X)\Big)^2$. Můžeme tedy opět využít kvantil, protože pro každou měřitelnou (tj. "rozumnou") funkci $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ máme, že $E(h(X)) = \int_0^1 h(q_X(u))\; du$. Neboli s kvantilem můžeme zacházet opravdu úplně stejně jako s původní veličinou. Můžeme tak psát

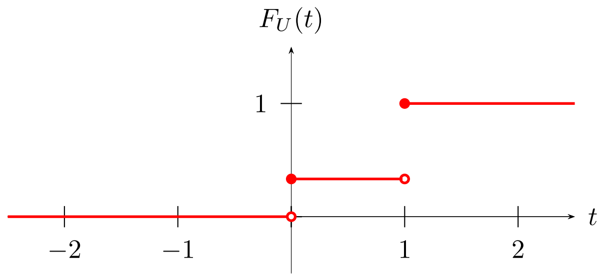
$$E(X^2) = \int_0^1 \big(q_X(u)\big)^2\; du = \int_0^{\frac{1}{3}} \Big(\ln(3u)\Big)^2\; du + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} (3u-1)^2\; du + \int_{\frac{2}{3}}^{1} 1^2\; du =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \big(\ln v\big)^2\; dv + \left[\frac{(3u-1)^3}{9}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} + \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}\Big[v\Big((\ln v)^2 - 2\ln v + 2\Big)\Big]_0^1 + \frac{31}{72} = \frac{2}{3} + \frac{31}{72} = \frac{79}{72} \doteq 1.097$$

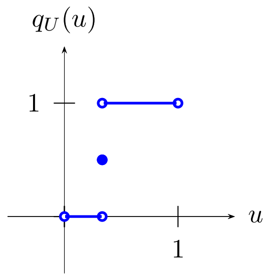
a rozptyl tedy bude

$$D(X) = E(X^2) - \Big(E(X)\Big)^2 = \frac{79}{72} - \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{623}{576} \doteq 1.082\;.$$

Výpočet pro *diskrétní část* U: z distribuční funkce F_U



určíme graf q_U:



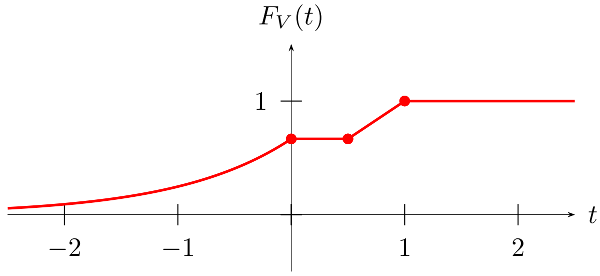
Explicitní tvar q_U:

$$q_U(u) = \begin{cases} 0 & , \; u \in (0, \frac{1}{3}) \\ \frac{1}{2} & , \; u = \frac{1}{3} \\ 1 & , \; u \in (\frac{1}{3}, 1). \end{cases}$$

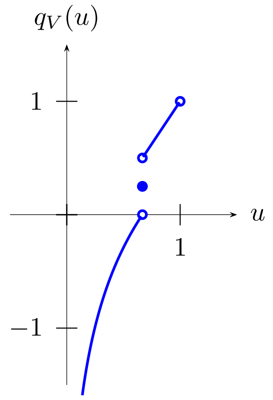
Střední hodnotu $E(U)$ a rozptyl $D(U)$ teď pro změnu spočítáme způsobem, který je obvyklejší pro diskrétní veličiny, tedy přes pravděpodobnostní funkci (která má nenulové hodnoty $p_U(0) = \frac{1}{3}$ a $p_U(1) = \frac{2}{3}$):

$$E(U) = \sum_{t\in\mathbb{R}} t \cdot p_U(t) = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$
$$E(U^2) = \sum_{t\in\mathbb{R}} t^2 \cdot p_U(t) = 0^2 \cdot \frac{1}{3} + 1^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$
$$D(U) = E(U^2) - \big(E(U)\big)^2 = \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}\ .$$

Výpočet pro *spojitou část* V: z distribuční funkce F_V



určíme graf q_V:



Explicitní tvar q_V:

$$q_V(u) = \begin{cases} \ln(\frac{3}{2}u) & ,\ t \in (0, \frac{2}{3}) \\ \frac{1}{4} & ,\ t = \frac{2}{3} \\ \frac{3u-1}{2} & ,\ t \in (\frac{2}{3}, 1). \end{cases}$$

Střední hodnotu $E(V)$ a rozptyl $D(V)$ opět spočítáme obvyklým způsobem přes hustotu (která má nenulové hodnoty $f_V(t) = \frac{2}{3}e^t$ pro $t \le 0$ a $f_V(t) = \frac{2}{3}$ pro $t \in \langle \frac{1}{2}, 1\rangle$):

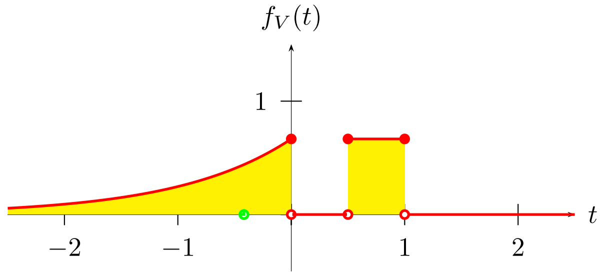
$$E(V) = \int_{-\infty}^{\infty} t\cdot f_V(t)\, dt = \int_{-\infty}^{0} t\cdot \frac{2}{3}e^t\, dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1} t\cdot \frac{2}{3}\, dt = \frac{2}{3}\Big[(t-1)e^t\Big]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{t^2}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = -\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = -\frac{5}{12} \doteq -0.417$$

$$E(V^2) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot f_V(t)\, dt = \int_{-\infty}^{0} t^2 \cdot \frac{2}{3} e^t\, dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1} t^2 \cdot \frac{2}{3}\, dt = \frac{2}{3}\Big[(t^2 - 2t + 2)e^t\Big]_{-\infty}^{0} + \frac{2}{9}\Big[t^3\Big]_{\frac{1}{2}}^{1} =$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{7}{36} = \frac{55}{36} \doteq 1.528$$

$$D(V) = E(V^2) - \big(E(V)\big)^2 = \frac{55}{36} - \left(\frac{5}{12}\right)^2 = \frac{65}{48} \doteq 1.354\ .$$

Názornou interpretací střední hodnoty spojité veličiny V, která má hustotu, je, že $E(V)$ je x-ová souřadnice těžiště plochy (zelený bod), která je určena grafem hustoty f_V:



Celkově si výsledky ještě můžeme překontrolovat pomocí vztahu pro střední hodnotu a rozptyl směsi $X = \mathrm{Mix}_c(U, V)$:

$$E(X) = cE(U) + (1-c)E(V)$$

$$D(X) = cD(U) + (1-c)D(V) + c(1-c)\Big(E(U) - E(V)\Big)^2$$

V našem případě tedy skutečně pro $c = \frac{1}{2}$ dostaneme:

	X	U	V
$E(\cdot)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{12}$
$D(\cdot)$	$\frac{623}{576}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{65}{48}$

$$E(X) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} - \frac{5}{12}\right) = \frac{1}{8}$$

$$D(X) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{9} + \frac{65}{48}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3} + \frac{5}{12}\right)^2 = \frac{623}{576}\ .$$

5.2 (exponenciální rozdělení, transformace veličiny)
Náhodná veličina X má exponenciální rozdělení s distribuční funkcí

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & ,\ t \le 0 \\ 1 - e^{-2t} & ,\ t > 0\ . \end{cases}$$

Popište rozdělení náhodné veličiny $Y = 2 - 2X$ a stanovte její střední hodnotu a rozptyl.

Řešení:
Exponenciální rozdělení popisuje pravděpodobnost veličiny

$$X = \textit{doba mezi dvěma následnými výskyty udalosti},$$

pokud události nemají paměť. Tedy to, co se stane od určitého okamžiku nezávisí na tom, co bylo předtím. V praxi jde např. o zařízení, které se "neopotřebovává" (žárovka, polovodičové součástky) bude mít poruchu nebo o dobu radioaktivního rozpadu atd. Exponenciální rozdělení je jediné, které splňuje následující rovnici:

$$P(X > x + y | X > y) = P(X > x)$$

pro všechna $x, y > 0$. Rovnice vyjadřuje to, že pravděpodobnost, že zařízení bude bez poruchy pracovat x hodin je stejná v případě, že jsme jej právě zapli jako za předpokladu, že předtím už bez poruchy pracovalo y hodin.

Exponenciální rozdělení je charakterizováno parametrem $\tau > 0$ (s fyzikálním rozměrem času), který představuje střední dobou čekání, tedy $E(X) = \tau$ a dále ještě platí $D(X) = \tau^2$. Hustota je pak dána jako

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & , \ t \leq 0 \\ \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} & , \ t > 0 \ . \end{cases}$$

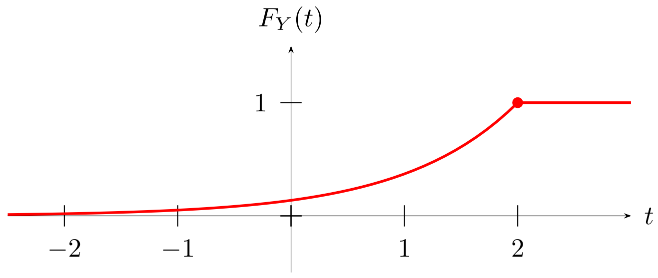
Teď tedy najdeme rozdělení veličiny $Y = 2 - 2X$:

$$F_Y(t) = P(Y \leq t) = P(2 - 2X \leq t) = P\Big(1 - \frac{t}{2} \leq X\Big) = 1 - P\Big(X < 1 - \frac{t}{2}\Big) = 1 - F_X\Big(1 - \frac{t}{2}\Big)$$

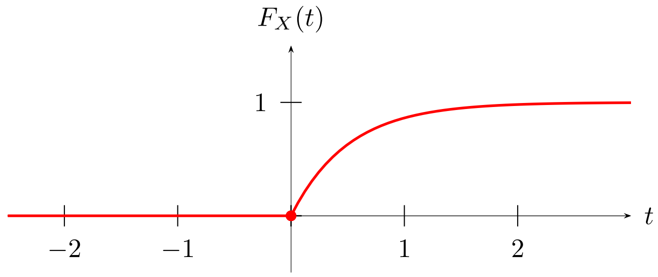
Pro $1 - \frac{t}{2} \leq 0$ je tedy $F_Y(t) = 1$ a pro $1 - \frac{t}{2} > 0$ máme $F_Y(t) = 1 - (1 - e^{-2(1-\frac{t}{2})}) = e^{t-2}$. Celkově tedy dostáváme

$$F_Y(t) = \begin{cases} e^{t-2} & , \ t < 2 \\ 1 & , \ t \geq 2 \ . \end{cases}$$

Graf F_Y si snadno nakreslíme:



ale je dobré si uvědomit, že pro tvar $F_Y(t) = 1 - F_X\Big(-\frac{1}{2}(t-2)\Big)$ lze F_Y získat z grafu F_X:



následující posloupností transformací:

- $g_0(a) := F_X(a)$
- $g_1(b) := g_0(-\frac{1}{2}b) = F_X(-\frac{1}{2}b)$ (graf g_0 se otočí kolem osy y a 2-krát se roztáhne podle středu 0 ve směru osy x)
- $g_2(c) := g_1(c-2) = F_X(-\frac{1}{2}(c-2))$ (graf g_1 se posune o vektor $(2,0)$, tj. doprava o 2)
- $g_3(d) := 1 - g_2(d) = 1 - F_X\Big(-\frac{1}{2}(d-2)\Big) = F_Y(d)$ (graf g_2 se otočí kolem osy x a posune nahoru o 1)

Určíme ještě střední hodnotu (tentokrát pro změnu z distribuční funkce):

$$E(Y) = -\int_{-\infty}^{0} F_Y(t)\,dt + \int_0^{\infty} \big(1 - F_Y(t)\big)\,dt = -\int_{-\infty}^{0} e^{t-2}\,dt + \int_0^2 \big(1 - e^{t-2}\big)\,dt = 2 - \Big[e^{t-2}\Big]_{-\infty}^{2} = 1$$

Mohli jsme také využít, že X má exponenciální rozdělení s parametrem $\tau = \frac{1}{2}$, a pak bychom opět měli $E(Y) = E(2-2X) = 2 - 2E(X) = 1$.

Pro rozptyl použijeme, že $D(X) = \tau^2 = \frac{1}{4}$, takže $D(Y) = D(2-2X) = D(-2X) = (-2)^2 D(X) = 1$.

Diskrétní analogií exponenciálního rozdělení je *geometrické* rozdělení, které neměří čas spojitě ale pouze diskrétně. Lze ho také chápat jako:

$$X = \textit{počet neúspěšných pokusů než nastane první úspěch},$$

např. házení míče na koš atd. Je to opět jediné takové diskrétní rozdělení splňující analogickou rovnici:

$$P(X > k + n | X > n) = P(X > k)$$

pro všechna $k, n \in \mathbb{N}_0$ s podobným významem jako u exponenciálního rozdělení.

5.3 (určení rozdělení dané veličiny)

Diskrétní náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení na množině $\{0,1\}$ a spojitá náhodná veličina Y má rovnoměrné rozdělení na intervalu $[0,1]$. Veličiny X a Y jsou nezávislé. Určete rozdělení veličiny $W = X + Y$ a veličiny $Z = XY$.

Řešení:
Protože X nabývá pouze konečně mnoha hodnot, bude výhodné použít Bayesovu větu:

$$F_W(t) = P(X+Y \le t) = P(X+Y \le t | X = 0) \cdot P(X=0) + P(X+Y \le t | X = 1) \cdot P(X = 1)$$

Díky nezávislosti veličin X a Y máme

$$P(X+Y \le t | X = 1) = P(1 + Y \le t | X = 1) = P(Y \le t-1) = F_Y(t-1)$$

a podobně

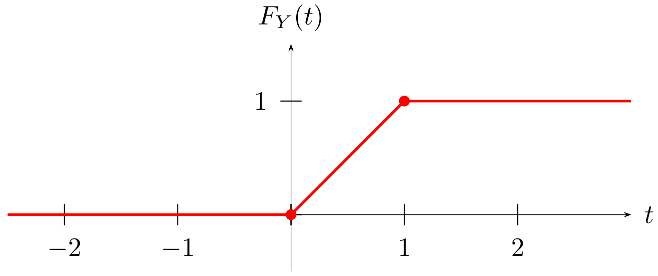
$$P(X+Y \le t | X = 0) = P(Y \le t) = F_Y(t).$$

Protože ještě víme, že $P(X=0) = \frac{1}{2} = P(X=1)$, tak můžeme psát

$$F_W(t) = \frac{1}{2}\Big(F_Y(t) + F_Y(t-1)\Big)$$

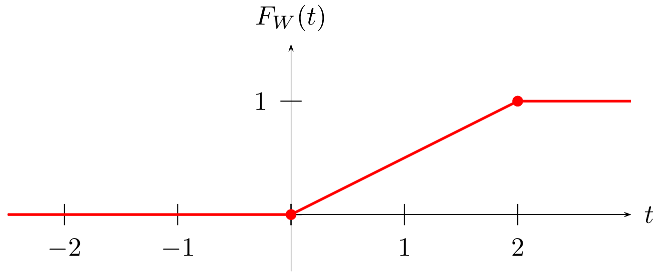
Nyní jen vyjádříme distribuční funkci veličiny Y

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & , \ t < 0 \\ t & , \ t \in \langle 0, 1 \rangle \\ 1 & , \ t > 1 \ . \end{cases}$$



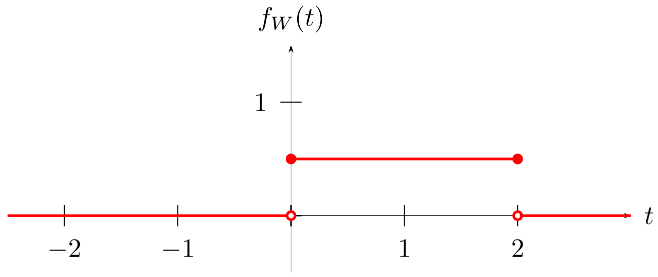
a dosadíme spolu s jejím posunutím do vzorce pro F_W, čímž získáme:

$$F_W(t) = \begin{cases} 0 & , \ t < 0 \\ \frac{t}{2} & , \ t \in \langle 0, 2 \rangle \\ 1 & , \ t > 2 \ . \end{cases}$$



Veličina W je tedy spojitá s rovnoměrným rozdělením na intervalu $\langle 0, 2 \rangle$ a hustotou:

$$f_W(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \ t \in \langle 0, 2 \rangle \\ 0 & , \ \text{jinak} \ . \end{cases}$$



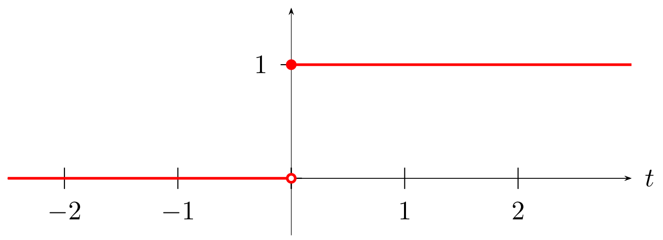
Pro veličinu $Z = XY$ budeme postupovat obdobně

$$F_Z(t) = P(XY \leq t) = P(XY \leq t | X = 0) \cdot P(X = 0) + P(XY \leq t | X = 1) \cdot P(X = 1) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(P(Z = 0 \le t|X = 0) + P(Y \le t|X = 1)\Big)$$

Na množině $A = X^{-1}(\{0\})$ je veličina Z konstantně nulová, takže výraz $P(Z = 0 \le t|X = 0)$ je buď roven 1, když $0 \le t$ anebo roven 0, když $t < 0$. Na množině A jde tedy o Diracovo rozdělení s distribuční funkci formálně psanou jako $P(0 \le t)$.

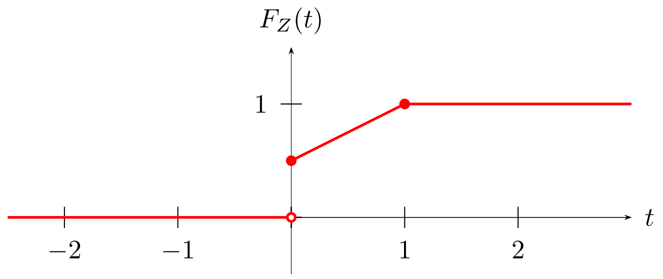
Diracovo rozdělení:



Nyní tedy máme

$$F_Z(t) = \frac{1}{2}\Big(P(0 \le t) + F_Y(t)\Big) = \begin{cases} 0 & , \ t < 0 \\ \frac{x+1}{2} & , \ t \in \langle 0, 1\rangle \\ 1 & , \ t > 1 \ . \end{cases}$$

takže veličina Z ma smíšené rozdělení a graf F_Z je:



Na začátku jsme také mohli veličiny vyjádřit jako směsi, kde by jedna ze složek odpovídala případu $X = 0$ a druhá případu $X = 1$ (tj. šlo by o zúžení veličin W a Z za daných podmínek):

$$W = \mathrm{Mix}_c(W|_A, W|_{\overline{A}}) = \mathrm{Mix}_c(Y|_A, Y + 1|_{\overline{A}})$$
$$Z = \mathrm{Mix}_c(Z|_A, Z|_{\overline{A}}) = \mathrm{Mix}_c(0|_A, Y|_{\overline{A}})$$

protože

$$W|_A = Y|_A, \quad W|_{\overline{A}} = Y + 1|_{\overline{A}}$$
$$Z|_A = 0|_A, \quad Z|_{\overline{A}} = Y|_{\overline{A}}$$

kde $A = X^{-1}(\{0\})$ a $c = P(A) = P(X = 0) = \frac{1}{2}$. Zbytek postupu by pak už ale byl stejný.