6. cvičení z PSI

2. - 6. listopadu 2015

6.1 Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení na intervalu $(-2, 2)$. Zobrazíme ji funkci h, definovanou následovně:

$$h(x) = \begin{cases} 0 & , \ x < 0 \\ x^2 & , \ 0 \le x \le 1 \\ 1 & , \ x > 1. \end{cases}$$

Nalezněte rozdělení náhodné veličiny $Y = h(X)$.

Řešení:
(a) **Krátké řešení:** Protože $0 \le Y = h(X) \le 1$, tak

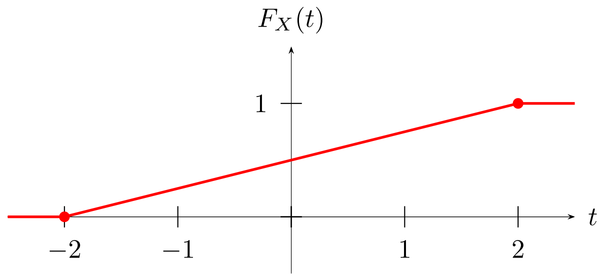
$$F_Y(t) = P(h(X) \le t) = \begin{cases} 0 & , \ t < 0 \\ 1 & , \ t > 1. \end{cases}$$

Na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ má funkce h inverzi, takže pro $t \in \langle 0, 1\rangle$ máme

$$F_Y(t) = P(h(X) \le t) = P(X < 0) + P\Big(X \in \langle 0, 1\rangle \ \& \ X^2 \le t\Big) =$$

$$= P(X < 0) + P\Big(X \in \langle 0, 1\rangle \ \& \ X \le \sqrt{t}\Big) = P(X \le \sqrt{t}) = F_X(\sqrt{t})$$

Teď už stačí jen dosadit za F_X. Protože veličina X je spojitá s konstantní hustotou na intervalu $(-2, 2)$, tak její distribuční funkce F_X bude lineární na tomto intervalu. Jinak bude konstantní a celkově spojitá:

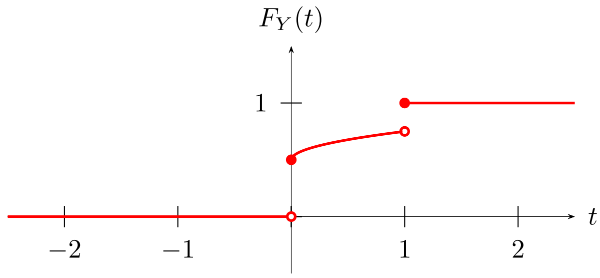


Tedy

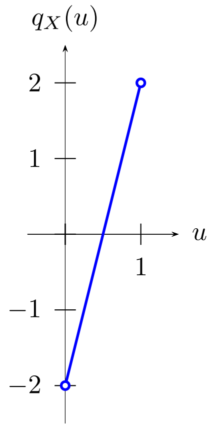
$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & , \ t < -2 \\ \frac{t+2}{4} & , \ t \in \langle -2, 2\rangle \\ 1 & , \ t > 2. \end{cases}$$

a po dosazení dostaneme:

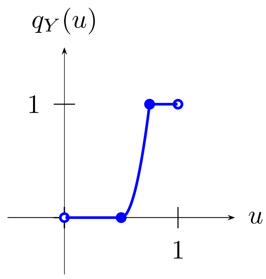
$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & , \ t < 0 \\ \frac{\sqrt{t}+2}{4} & , \ t \in \langle 0, 1\rangle \\ 1 & , \ t > 1. \end{cases}$$



Veličina $Y = h(X)$ tedy kupodivu nemá spojité rozdělení ale smíšené, přestože veličina X je (absolutně) spojitá a i funkce h je spojitá. Abychom tomu porozuměli, podíváme se na kvantil. Kvantil q_X je spojitý:



A tedy i kvantil $q_Y = q_{h(X)} = h(q_X)$ je spojitý:

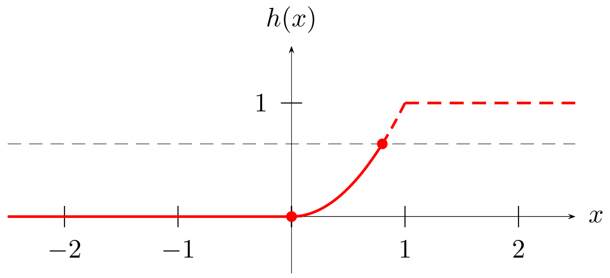


Ale protože je místy konstantní, tak F_Y má skoky.

(b) **Řešení použitelné i pro obecnější případy:** Pro distribuční funkci veličiny $Y = h(X)$ máme

$$F_Y(t) = P(Y \le t) = P(h(X) \le t) = P\Big(h(X) \in (-\infty, t\rangle\Big) = P\Big(X \in h^{-1}(-\infty, t\rangle\Big)$$

Podíváme se proto, jak vypadají množiny $h^{-1}(-\infty, t\rangle$. To snadno uvidíme z grafu funkce h:



Když "uřízneme"z grafu všechno, co je nad danou hladinou t a zbytek promítneme na vodorovnou osu, dostaneme právě hledanou množinu. Tedy:

$$h^{-1}(-\infty,t\rangle = \begin{cases} \mathbb{R} & , \ t \geq 1 \\ (-\infty, \sqrt{t}\rangle & , \ 0 \leq t < 1 \\ \emptyset & , \ t < 0. \end{cases}$$

Takze můžeme psát:

$$F_Y(t) = P\Big(X \in h^{-1}(-\infty,t\rangle\Big) = \begin{cases} P(X \in \mathbb{R}) = 1 & , \ t \geq 1 \\ P\Big(X \in (-\infty, \sqrt{t}\rangle\Big) = F_X(\sqrt{t}) & , \ 0 \leq t < 1 \\ P(X \in \emptyset) = 0 & , \ t < 0. \end{cases}$$

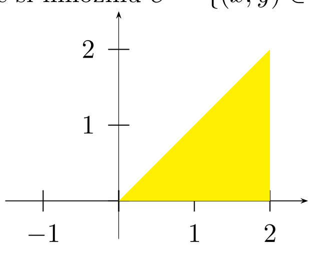
Zbytek postupu už pak bude stejný jako v předchozím případě.

6.2 Sdružená hustota náhodného vektoru (X, Y) je rovna

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c \cdot xy & , \ 0 \leq x \leq 2 \ \& \ 0 \leq y \leq x \\ 0 & , \ \text{jinak} \end{cases}$$

kde $c > 0$ je konstanta. Určete sdruženou distribuční funkci $F_{X,Y}$, marginální distribuční funkce F_X, F_Y marginální hustoty f_X, f_Y a střední hodnotu vektoru (X, Y).

Řešení:
Znázorníme si množinu $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2 \ \& \ 0 \leq y \leq x\}$, mimo níž je hustota nulová:



Nejdříve určíme konstantu c tak, aby $h_{X,Y}$ byla skutečně hustota:

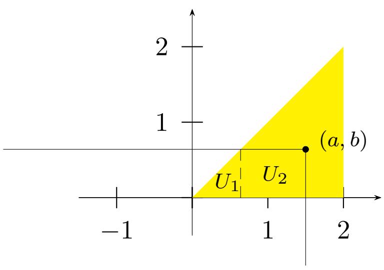
$$1 = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y} \ dS = \iint\limits_{U} f_{X,Y} \ dS = \int_0^2 \Big(\int_0^x c \cdot xy \ dy\Big) \ dx = c\int_0^2 x \cdot \frac{x^2}{2} \ dx = c\Big[\frac{x^4}{8}\Big]_0^2 = 2c$$

Tedy $c = \frac{1}{2}$.

Sdružená distribuční funkce je definována jako

$$F_{X,Y}(a,b) = \int\limits_{(-\infty,a\rangle\times(-\infty,b\rangle}\int f_{X,Y}\ dS = \int\limits_{(-\infty,a\rangle\times(-\infty,b\rangle\cap U}\int f_{X,Y}\ dS$$

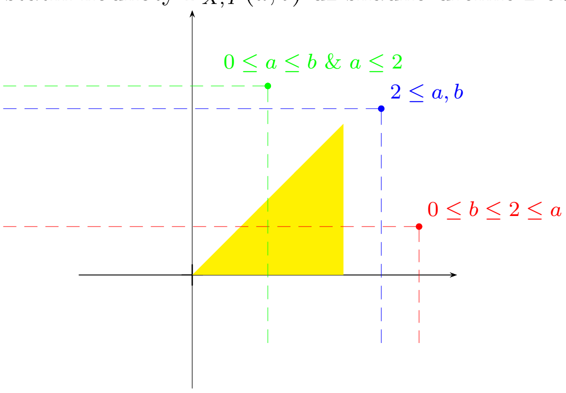
tedy jako integrál pres množinu, kterou vysekne interval $(-\infty, a\rangle \times (-\infty, b\rangle$ v množině U. Nejdříve ji určíme pro $(a, b) \in U$:



$$F_{X,Y}(a,b) = \int\limits_{U_1\cup U_2}\int f_{X,Y}\ dS = \frac{1}{2}\int_0^b\left(\int_0^x xy\ dy\right)dx + \frac{1}{2}\int_b^a\left(\int_0^b xy\ dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^b x\cdot\frac{x^2}{2}\ dx + \frac{1}{2}\int_b^a x\cdot\frac{b^2}{2}\ dx = \frac{1}{4}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^b + \frac{b^2}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_b^a = \frac{a^2b^2}{8} - \frac{b^4}{16}$$

Ostatní hodnoty $F_{X,Y}(a, b)$ už snadno určíme z obrázku (funkce $F_{X,Y}(a, b)$ je spojitá):



$$F_{X,Y}(a,b) = \begin{cases} 0 & ,\ a \le 0 \text{ nebo } b \le 0 \\ \frac{a^2b^2}{8} - \frac{b^4}{16} & ,\ (a,b) \in U \\ F_{X,Y}(2,b) = \frac{b^2}{2} - \frac{b^4}{16} & ,\ 0 \le b \le 2 \le a \\ F_{X,Y}(a,a) = \frac{a^4}{16} & ,\ 0 \le a \le b\ \&\ a \le 2 \\ 1 & ,\ 2 \le a, b. \end{cases}$$

Marginální distribuční funkce představují distibuční funkce jednotlivých složek vektoru, tj. (samostatných) náhodných veličin X a Y. Získáme je jednoduše jako limity sdružené distribuční funkce (také s využitím obrázků):

$$F_X(a) = P(X \le a) = \lim_{b\to\infty} P(X \le a, Y \le b) = \lim_{b\to\infty} F_{X,Y}(a,b) = \begin{cases} 0 & ,\ a \le 0 \\ \frac{a^4}{16} & ,\ 0 \le a \le 2 \\ 1 & ,\ 2 \le a \end{cases}$$

$$F_Y(b) = P(Y \le b) = \lim_{a\to\infty} P(X \le a, Y \le b) = \lim_{a\to\infty} F_{X,Y}(a,b) = \begin{cases} 0 & ,\ b \le 0 \\ \frac{b^2}{2} - \frac{b^4}{16} & ,\ 0 \le b \le 2 \\ 1 & ,\ 2 \le b \end{cases}$$

Je dobré si uvědomit, že náhodný vektor (X, Y) můžeme snadno sestavit z libovolných dvou náhodných veličin X a Y. Zatímco ale k počítání s veličinou X nám stačí znát jen její distribuční funkci F_X, k práci s vektorem nám NESTAČÍ znalost distribučních funkcí jeho složek! Potřebujeme totiž znát, jaký je vztah mezi veličinami X a Y, a ten je schovaný právě ve sdružené distribuční funkci.

K hustotám poznamenejme, že jsou opět určeny jednoznačně až na množinu pravděpodobností nula (tedy pokud f a g jsou hustoty pro X, pak se mohou lišit jen na takové množině $A \subseteq \mathbb{R}$, že $P(X \in A) = 0$). Říká se také, že f a g se rovnají *skoro všude* a zapisuje se to jako $f = g$ (s.v.). Pro množinu A to znamená, že $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$, kde U_n je množina, která je sjednocením intervalů s celkovým součtem délek ε_n, a platí, že $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.

Příkladem může být třeba $A = \mathbb{Q}$ nebo tzv. *Cantorovo diskontinuum*, což je nespočetná množina, která vznikne postupně vypouštěním středních třetin intervalů z počátečního intervalu $\langle 0, 1\rangle$.

Marginální hustoty f_X a f_Y jsou hustoty náhodných veličin X a Y a získají se buď zderivováním distribucí F_X a F_Y (tam, kde derivace existuje) nebo částečným zintegrováním sdružené hustoty $f_{X,Y}$ tj. jako

$$f_X(a) = \int\limits_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(a, b)\ db \qquad \text{(s.v.)}$$

a

$$f_Y(b) = \int\limits_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(a, b)\ da \qquad \text{(s.v.)}.$$

První způsob ale bude v tomto případě jednodušší:

$$f_X(a) = F'_X(a) = \begin{cases} \frac{a^3}{4} & , 0 \le a \le 2 \\ 0 & , \text{jinak.} \end{cases}$$

$$f_Y(b) = F'_Y(b) = \begin{cases} b - \frac{b^3}{4} & , 0 \le b \le 2 \\ 0 & , \text{jinak.} \end{cases}$$

Střední hodnota náhodného vektoru (X, Y) se v případě existence sdružené hustoty definuje jako

$$E(X, Y) := \int\int_{\mathbb{R}^2} \vec{u} \cdot f_{X,Y}(\vec{u})\ d\vec{u} =$$

$$= \Big(\int\int_{\mathbb{R}^2} x \cdot f_{X,Y}(x, y)\ dx\ dy,\quad \int\int_{\mathbb{R}^2} y \cdot f_{X,Y}(x, y)\ dx\ dy\Big) =$$

$$= \Big(\int_{\mathbb{R}} x\ \big(\int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y)\ dy\big)\ dx,\quad \int_{\mathbb{R}} y\ \big(\int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y)\ dx\big)\ dy\Big) =$$

$$= \Big(\int_{\mathbb{R}} x\ f_X(x)\ dx,\quad \int_{\mathbb{R}} y\ f_Y(y)\ dy\Big) = \Big(E(X), E(Y)\Big)$$

Neboli jako vektor ze středních hodnot jednotlivých složek (v případech, kdy neexistuje hustota se tento vztah vezme jako definice).

Máme:

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x\ f_X(x)\ dx = \int_0^2 x \cdot \frac{x^3}{4}\ dx = \left[\frac{x^5}{20}\right]_0^2 = \frac{8}{5} = 1.6$$

$$E(Y) = \int_{\mathbb{R}} y\ f_Y(y)\ dy = \int_0^2 y \cdot \left(y - \frac{y^3}{4}\right)\ dy = \frac{8}{3} - \frac{8}{5} = \frac{16}{15} \doteq 1.067$$

Celkem tedy:

$$E(X, Y) = \left(\frac{8}{5}, \frac{16}{15}\right).$$

6.3 Náhodné veličiny X a Y jsou nezávislé a mají diskrétní rozdělení s pravděpodobnostními funkcemi

a	-1	2
$p_X(a)$	0.3	0.7

b	0	1	3
$p_Y(b)$	0.2	0.45	0.35

Vypočtete střední hodnotu součinu $E(XY)$, pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny $Z = X + Y$ a koeficient korelace $\rho(X,Y)$.

Řešení:
Veličiny jsou *nezávislé*, proto můžeme psát:

$$E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$$

$$E(X) = \sum_{a \in \mathbb{R}} a \cdot p_X(a) = (-1) \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.7 = 1.8$$

$$E(Y) = 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.45 + 3 \cdot 0.35 = 1.5$$

takže $E(XY) = 1.8 \cdot 1.5 = 2.7$.
Pro pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny $Z = X + Y$ máme:

$$p_Z(c) = P(X + Y = c) = \sum_{a+b=c} P(X = a \ \& \ Y = b) = \sum_{a+b=c} p_X(a) \cdot p_Y(b)$$

takže

c	-1	0	2	3	5
možné rozklady $a + b = c$	-1+0	-1+1	2+0, -1+3	2+1	2+3
$\sum p_X(a) p_Y(b)$	$0.3 \cdot 0.2$	$0.3 \cdot 0.45$	$0.7 \cdot 0.2 + 0.3 \cdot 0.35$	$0.7 \cdot 0.45$	$0.7 \cdot 0.35$
$p_Z(c)$	0.06	0.135	0.245	0.315	0.245

Protože veličiny jsou *nezávislé*, koeficient korelace je $\rho(X,Y) = 0$.

6.4 Dvourozměrný náhodný vektor (X,Y) má pravděpodobnosti hodnot dané tabulkou:

X \ Y	0	1
1	1/3	0
2	1/3	1/3

Vypočtěte korelaci náhodných veličin $\rho(X,Y)$.

Řešení:
Pro koeficient korelace

$$\rho(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)} \cdot \sqrt{D(Y)}} = \frac{E(XY) - E(X) \cdot E(Y)}{\sqrt{E(X^2) - E(X)^2} \cdot \sqrt{E(Y^2) - E(Y)^2}}$$

potřebujeme znát $E(X)$, $E(Y)$, $E(X^2)$, $E(Y^2)$ a $E(XY)$. Do tabulky doplníme marginální pravděpodobnostní funkce (součty přes řádky a sloupce), které představují pravděpodobnostní funkce jednotlivých náhodných veličin:

X \ Y	0	1	p_X
1	1/3	0	1/3
2	1/3	1/3	2/3
p_Y	2/3	1/3	

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$
$$E(Y) = 0 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$
$$E(X^2) = 1^2 \cdot \frac{1}{3} + 2^2 \cdot \frac{2}{3} = 3$$
$$E(Y^2) = 0^2 \cdot \frac{2}{3} + 1^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$
$$E(XY) = 1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Takže
$$\rho(X,Y) = \frac{\frac{2}{3} - \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\sqrt{3 - \left(\frac{5}{3}\right)^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^2}} = \frac{1}{2}.$$

Protože $\rho(X,Y) = \cos\alpha$, kde $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$ je úhel, který svírají veličiny $X - E(X)$ a $Y - E(Y)$, dostáváme, že $\alpha = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$.

Pro připomenutí: Množina všech náhodných veličin na pravděpodobnostním prostoru Ω, (které ztotožníme, pokud se rovnají skoro všude na Ω) a které mají konečný rozptyl tvoří (reálný) vektorový prostor označený jako
$$\mathcal{L}_2 := \{X : \Omega \to \mathbb{R} \mid X \text{ je náhodná veličina } \& \ D(X) < \infty\}.$$
Na tomto prostoru můžeme zavést skalární součin $\bullet : \mathcal{L}_2 \times \mathcal{L}_2 \to \mathbb{R}$ (tj. pozitivně definitní bilineární symetrickou formu) jako
$$X \bullet Y := E(XY)$$
který pak přirozeně umožňuje zavést *normu* $\|\cdot\| : \mathcal{L}_2 \to \mathbb{R}$ (neboli "délku"vektoru) jako
$$\|X\| := \sqrt{X \bullet X} = \sqrt{E(X^2)}$$
Náhodné veličiny $X, Y \in \mathcal{L}_2$ jsou pak kolmé (tj. *nekorelované*), pokud $X \bullet Y = E(XY) = 0$.

V prostoru $\mathcal{L}_2$ je význačným podprostorem množina všech náhodných veličin s nulovou střední hodnotou:
$$\mathcal{N} := \{X \in \mathcal{L}_2 \mid E(X) = 0\} \subseteq \mathcal{L}_2$$
ke kterému je ortogonálním doplněk (tj. prostor všech náhodných veličin kolmých k $\mathcal{N}$) množina všech konstantních veličin:
$$\mathcal{R} := \mathcal{N}^\perp = \{Y \in \mathcal{L}_2 \mid (\forall\ X \in \mathcal{N})\ X \bullet Y = 0\} =$$
$$= \{Y \in \mathcal{L}_2 \mid Y \text{ je konstantní skoro všude na } \Omega\}.$$
Prostor $\mathcal{C}$ má dimenzi 1 a můžeme si ho představit jako přímku, která je kolmá na vektorový prostor $\mathcal{N}$, který má dimenzi obvykle podstatně větší (např. nekonečnou).

Každá náhodná veličina se dá snadno jednoznačně rozložit na složku ležící v $\mathcal{N}$ a na složku k ni kolmou, která má nulovou střední hodnotu:
$$X = E(X) + \big(X - E(X)\big)$$
kde $E(X) \in \mathcal{R}$ a $X - E(X) \in \mathcal{N}$. Současně máme k dispozici ortogonální projekci na prostor $\mathcal{N}$ (podle kolmice na něj, tedy podle prostoru $\mathcal{R}$):
$$\pi : \mathcal{L}_2 \to \mathcal{N}$$
$$\pi(X) := X - E(X)$$
Zřejmě π je lineární zobrazení a platí $\pi(\pi(Z)) = \pi(Z)$ a $\pi(Z + c) = \pi(Z)$ pro každou náhodnou veličinu $Z \in \mathcal{L}_2$ a konstantu $c \in \mathbb{R}$.

Korelace veličin X a Y pak je
$$\rho(X,Y) := \frac{\pi(X) \bullet \pi(Y)}{\|\pi(X)\| \cdot \|\pi(Y)\|}$$
tedy kosinus úhlu mezi složkami $\pi(X)$ a $\pi(Y)$ v prostoru $\mathcal{N}$.

6.5 Náhodné veličiny X, Y vyhovují vztahu $\alpha X - \beta Y = \gamma$, kde α, β jsou nenulové reálné konstanty. Určete korelační koeficient $\rho(X, Y)$ a poměr směrodatných odchylek σ_X/σ_Y.

Řešení:
Pro veličinu $Z \in \mathcal{L}_2$ (tj. takovou, že má konečný rozptyl) máme

$$\sigma_Z = \sqrt{D(Z)} = \sqrt{(Z - E(Z)) \bullet (Z - E(Z))} = \|\pi(Z)\|.$$

Pro další výpočty potřebujeme předpokládat, že $D(X) \neq 0 \neq D(Y)$, jinak nemáme co zjišťovat.
Použijeme vztah z předchozího příkladu, tedy

$$\rho(X, Y) := \frac{\pi(X) \bullet \pi(Y)}{\|\pi(X)\| \cdot \|\pi(Y)\|}.$$

Máme tedy $X = \frac{\beta}{\alpha} Y - \frac{\gamma}{\alpha}$, takze $\pi(X) = \pi\left(\frac{\beta}{\alpha} Y - \frac{\gamma}{\alpha}\right) = \pi\left(\frac{\beta}{\alpha} Y\right) = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \pi(Y)$ a můžeme psát

$$\rho(X, Y) := \frac{\left(\frac{\beta}{\alpha} \cdot \pi(Y)\right) \bullet \pi(Y)}{\|\frac{\beta}{\alpha} \cdot \pi(Y)\| \cdot \|\pi(Y)\|} = \frac{\frac{\beta}{\alpha} \cdot \left(\pi(Y) \bullet \pi(Y)\right)}{\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \cdot \|\pi(Y)\| \cdot \|\pi(Y)\|} =$$

$$= \frac{\frac{\beta}{\alpha}}{\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|} \cdot \frac{\|\pi(Y)\|^2}{\|\pi(Y)\|^2} = \operatorname{sgn}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \in \{-1, 1\}$$

Výsledek je tedy dán čistě znaménkem čísla $\frac{\beta}{\alpha}$ a hodnota korelace tak říká, jestli lineárně závislé veličiny $\pi(X)$ a $\pi(Y)$ jsou stejně orientované ($\rho(X, Y) = 1$) nebo opačně orientované ($\rho(X, Y) = -1$).
Pro poměr směrodatných odchylek pak máme

$$\frac{\sigma_X}{\sigma_Y} = \frac{\|\pi(X)\|}{\|\pi(Y)\|} = \frac{\|\frac{\beta}{\alpha} \cdot \pi(Y)\|}{\|\pi(Y)\|} = \left|\frac{\beta}{\alpha}\right|.$$

6.6 Pro náhodné veličiny X a Y platí, že

$$E(X) = -1, \quad D(X) = 3, \quad E(Y) = 5, \quad D(Y) = 4, \quad \operatorname{cov}(X, Y) = -2.$$

Pro náhodné veličiny $U = 3X + 4Y - 1$ a $V = -2X + 2Y + 3$ určete koeficient kovariance $\operatorname{cov}(U, V)$.

Řešení:
Opět použijeme lineární ortogonální projekci $\pi(Z) = Z - E(Z)$ pro $Z \in \mathcal{L}_2$. Kovariance se pak počítá jako

$$\operatorname{cov}(Z, W) = \pi(Z) \bullet \pi(W)$$

a má tyto vlastnosti:

- je lineární v každé složce zvlášť (tj. bilineární),
- $\operatorname{cov}(Z + c, W + d) = \operatorname{cov}(Z, W)$ pro všechna $c, d \in \mathbb{R}$,
- symetrická (tj. $\operatorname{cov}(Z, W) = \operatorname{cov}(W, Z)$) a

- $\operatorname{cov}(Z, Z) = D(Z)$.

Díky tomu můžeme tedy jednotlivé složky "roznásobit":

$$\operatorname{cov}(U, V) = \operatorname{cov}(3X + 4Y - 1, -2X + 2Y + 3) = \operatorname{cov}(3X + 4Y, -2X + 2Y) =$$

$$= 3 \cdot (-2) \cdot \operatorname{cov}(X, X) + 3 \cdot 2 \cdot \operatorname{cov}(X, Y) + 4 \cdot (-2) \cdot \operatorname{cov}(Y, X) + 4 \cdot 2 \cdot \operatorname{cov}(Y, Y) =$$

$$= (-6) \cdot D(X) + (-2) \cdot \operatorname{cov}(X, Y) + 8 \cdot D(Y) = (-6) \cdot 3 + (-2) \cdot (-2) + 8 \cdot 4 = 18\ .$$

Jak je vidět znalost $E(X)$ a $E(Y)$ jsme vůbec nepotřebovali!

Je dobré si všimnout, ze díky bilinearitě můžeme také používat přehlednější maticový zápis:

$$\operatorname{cov}(aX + bY, cX + dY) = (a, b) \begin{pmatrix} \operatorname{cov}(X,X) & \operatorname{cov}(X,Y) \\ \operatorname{cov}(X,Y) & \operatorname{cov}(Y,Y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

V našem případě tedy

$$\operatorname{cov}(U, V) = (3, 4) \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = (3, 4) \begin{pmatrix} -10 \\ 12 \end{pmatrix} = 18\ .$$