1. cvičení z PSI

3. - 7. října 2016

1.1 Kolik různých slov můžeme vytvořit přeskupením písmen slov:

(a) MISSISSIPPI,

(b) PROBLÉM (kde písmena B a R nestojí vedle sebe)?

Řešení:
Jde o permutace s opakováním. Pro n prvků, z nichž

- k_1 je 1. druhu, k_2 je 2. druhu atd. až k_ℓ je m-tého druhu,
- přičemž $k_1 + \cdots + k_\ell = n$ a prvky stejného druhu jsou navzájem nerozlišitelné,

je počet všech uspořádaných n-tic roven $\frac{n!}{k_1! \cdots k_\ell!}$.

(a) Písmeno M se vyskytuje $1\times$, písmeno I pak $4\times$, písmeno S také $4\times$ a písmeno P máme $2\times$. Počet znaků ve slově je $1 + 4 + 4 + 2 = 11$. Počet různých slov je tedy

$$\frac{11!}{1! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 2!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 = 34650 \ .$$

(b) Jednodušší je zjistit počet zbylých slov, tj. těch, kde písmena B a R *stojí* vedle sebe, a odečíst je od počtu všech přesmyček původního slova. Skupinu slov B a R budeme považovat za jeden nedělitelný prvek, který se může vyskytovat ve 2! různých stavech: BR nebo RB. Budeme tedy permutovat 6 prvků: P, O, L, É, M a X (kde X={B, R}). Počet slov, kde písmena B a R *stojí* vedle sebe je tak $2! \cdot 6!$.

Počet slov, kde písmena B a R *nestojí* vedle sebe tudíž bude

$$7! - 2! \cdot 6! = 5 \cdot (6!) = 3600 \ .$$

1.2 Na jedné poličce je náhodně rozestavěno 10 knih. Jaká je pravděpodobnost, že 3 určité knihy jsou postaveny vedle sebe?

Řešení:
Podobně jako v předchozím příkladu budeme dané 3 knihy považovat za jednu nedělitelnou skupinu. Dostaneme tak 8 prvků. V rámci nedělitelné skupiny máme 3! možností. Počet požadovaných rozestavení je proto

$$3! \cdot 8! = 241\,920 \ .$$

1.3 Kolika různými způsoby může sportovec rozmístit 10 různých pohárů do 5 polic, jestliže se na každou polici vejde všech 10 pohárů?

Řešení:
Dané rozestavení můžeme jednoznačně vyjádřit také tak, že k 10 různým pohárům přidáme 4 ($= 5 - 1$) navzájem nerozlišitelných přepážek, a budeme uvažovat permutace $10 + 4 = 14$ prvků s opakováním. V rámci tohoto "zakódování", ty poháry, které stojí *před* 1. přepážkou půjdou do 1. police, ty *mezi* 1. a 2. přepážkou do druhé police atd.

Počet všech různých rozmístění tak je

$$\frac{14!}{1! \cdots 1! \cdot 4!} = \frac{14!}{4!} = 3\,632\,428\,800 \doteq 3.6 \cdot 10^9 \ .$$

Pokud jde o numerický výpočet, můžeme ho také srovnat s přibližným *Stirlingovým* vzorcem

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

kde přibližnost znamená, že v *podíl* obou hodnot se blíží k 1 pro $n \to \infty$. Pro $n = 14$ máme

$$\frac{14!}{4!} \doteq \frac{\sqrt{2\pi 14}}{24} \left(\frac{14}{e}\right)^{14} = \frac{\sqrt{7\pi}}{12} \left(\frac{14}{e}\right)^{14} \doteq 3\,610\,875\,072 \ .$$

1.4 Chceme rozestavit do řady vedle sebe 5 vodníků a 7 čarodějnic. Kolika způsoby to můžeme udělat, pokud žádní dva vodníci nemají stát vedle sebe? (Vodníci i čarodějnice jsou rozlišitelní.)

Řešení:
Je potřeba si ještě ujasnit, co se myslí řadou - tj. jestli máme pevně daný začátek (pak má každá postava své pořadové číslo) anebo je to jen dáno tím, které postavy stojí vedle sebe (pak tatáž řada vznikne pokud ji postavíme "pozpátku"). My budeme uvažovat první případ, tj. očíslování. Rozestavení, které splňuje požadovanou podmínku lze ekvivalentně dostat tak, že nejdříve rozestavíme čarodějnice (7! možností) a na místa mezi nimi nebo na krajích (což je dohromady 8 míst) umístíme nejvýše jednoho vodníka (máme tedy zobrazení "vodník $\mapsto$ i-té místo", $i \in \{1, \ldots, 8\}$ - neboli variace bez opakování - celkem $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$ možností). Dohromady máme

$$(7!) \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 33\,868\,800$$

možností.

1.5 Kolika způsoby můžeme do 5 různých důlků vybrat po jedné kouli, jestliže máme

(a) 5 bílých, 11 modrých a 6 červených koulí?

(b) 4 bílé, 4 modré a 3 červené koule?

Koule stejné barvy považujeme za nerozlišitelné.

Řešení:
(a) Od každé barvy *máme* dostatek koulí pro úplné zaplnění všech 5 důlků jednou barvou. To odpovídá variacím 5-té třídy nad 3 prvky s opakováním (tj. máme 3 barvy a 5 pozic). Počet způsobů tak je

$$V(5,3) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 243 \ .$$

(b) Od každé barvy tentokrát *nemáme* dostatek koulí pro úplné zaplnění všech 5 důlků jednou barvou. Počet koulí se tomuto číslu ale blíží. Proto bude výhodnější předpokládat dostatek koulí od každé barvy a v rámci nich spočítat raději počet nepříznivých možností (tj. těch, co se *nedají* sestavit pomocí zadaného počtu 4 bílých, 4 modrých a 3 červených koulí). K sestavě jsme tak museli použít buď více jak 4 bílé nebo více jak 4 modré nebo více jak 3 červené koule.

Nepříznivé možnosti jsou pak tyto:

- použili jsme ≥ 5 bílých koulí (taková možnost je jen 1).
- použili jsme ≥ 5 modrých koulí (opět jen 1 možnost).
- použili jsme ≥ 4 červené koule:
  - máme ≥ 5 červených koulí (opět jen 1 možnost),
  - máme právě 4 červené a buď 1 bílou nebo 1 modrou kouli ($2 \cdot 5 = 10$ možností).

Celkem tedy 13 nepříznivých možností z celkového počtu $3^5 = 243$ všech možností. Počet hledaných sestav koulí tak je

$$243 - 13 = 230\ .$$

1.6 Určete kolik má rovnice $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$ (kde $k \in \mathbb{N}_0$)

(a) nezáporných celočíselných řešení,

(b) kladných celočíselných řešení.

Řešení:

(a) Řešením rozumíme uspořádanou n-tici $(x_1, \ldots, x_n)$. Tuto n-tici můžeme jednoznačně vyjádřit také tak, že pro k nerozlišitelných koulí a n různých přihrádek bude x_i znamenat počet koulí v i-té přihrádce.

Tato situace odpovídá kombinacím bez opakování (máme n druhů prvků v dostatečném množství a vybíráme z nich k prvků, při výběru přitom rozlišujeme vždy, jen kolik je od kterého druhů prvků).

Podobně jako v příkladu s poháry a policemi můžeme rozdělení koulí do přihrádek zakódovat pomocí $n-1$ nerozlišitelných přihrádek a k nerozlišitelných koulí. To ale odpovídá permutacím s opakováním (pro dva druhy předmětů). Celkový počet řešení tak je kombinační číslo

$$\binom{n-1+k}{k} = \frac{(n-1+k)!}{(n-1)! \cdot k!} = \binom{n-1+k}{n-1}\ .$$

(b) Alespoň jedno řešení bude existovat právě když $k \geq n$. Pro $k \geq n$ situaci převedeme na předchozí příklad: pokud x_i je kladné celé číslo, pak $y_i = x_i - 1$ je nezáporné celé číslo. Hledáme tedy počet řešení rovnice

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = k'\ ,$$

kde $k' = k - n$. Podle (a) je to tedy rovno

$$\binom{n-1+(k-n)}{k-n} = \binom{k-1}{k-n} = \binom{k-1}{n-1} = \frac{(k-1)!}{(n-1)! \cdot (k-n)!}\ .$$