10. cvičení z PSI

5. - 9. prosince 2016

10.1 (intervalový odhad)

Veličina X, představující životnost žárovky, má exponenciální rozdělení s parametrem τ. Průměrná životnost $n = 64$ náhodně vybraných žárovek je $\overline{\boldsymbol{x}} = 210$ hodin. Pomocí centrální limitní věty určete oboustranný symetrický 95% interval spolehlivosti pro střední hodnotu životnosti τ.

Řešení:

Pro veličinu X máme $E(X) = \tau$ a $D(X) = \tau^2$. Veličina průměrná životnost $n = 64$ žárovek je dána jako

$$\overline{\boldsymbol{X}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \ .$$

Pro ni máme $E(\overline{\boldsymbol{X}}) = \tau$ a $D(\overline{\boldsymbol{X}}) = \frac{\tau^2}{n}$. Podle CLV má veličina

$$\mathrm{norm}(\overline{\boldsymbol{X}}) = \frac{\overline{\boldsymbol{X}} - \tau}{\tau}\sqrt{n}$$

přibližně normované normální rozdělení $N(0,1)$. Pro $\alpha = 0.05$ označme

$$u_{0.975} = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = \Phi^{-1}(0.975) \doteq 1.96 \ .$$

Díky CLV můžeme přibližně psát

$$0.95 \doteq P\left(-u_{0.975} \le \mathrm{norm}(\overline{\boldsymbol{X}}) \le u_{0.975}\right) = P\left(-u_{0.975} \le \frac{\overline{\boldsymbol{X}} - \tau}{\tau}\sqrt{n} \le u_{0.975}\right) =$$

$$= P\left(-\frac{u_{0.975}}{\sqrt{n}} \le \frac{\overline{\boldsymbol{X}}}{\tau} - 1 \le \frac{u_{0.975}}{\sqrt{n}}\right) = P\left(\frac{\overline{\boldsymbol{X}}}{1 + \frac{u_{0.975}}{\sqrt{n}}} \le \tau \le \frac{\overline{\boldsymbol{X}}}{1 - \frac{u_{0.975}}{\sqrt{n}}}\right) \ .$$

Realizace veličiny $\overline{\boldsymbol{X}}$ je $\overline{\boldsymbol{x}} = 210$ (hodin). Hledaný oboustranný symetrický 95% interval spolehlivosti (v hodinách) pro τ je tak přibližně

$$\left\langle \frac{\overline{\boldsymbol{x}}}{1 + \frac{u_{0.975}}{\sqrt{n}}},\ \frac{\overline{\boldsymbol{x}}}{1 - \frac{u_{0.975}}{\sqrt{n}}} \right\rangle = \left\langle \frac{210}{1 + \frac{1.96}{\sqrt{64}}},\ \frac{210}{1 - \frac{1.96}{\sqrt{64}}} \right\rangle \doteq \left\langle 168.675,\ 278.146 \right\rangle \ .$$

10.2 (odhad parametru - diskrétní rozdělení)

Náhodná veličina X nabývá hodnot z množiny $\{0,1,2\}$ a pravděpodobnostmi

$$P(X = j) = a + bj$$

pro všechna $j \in \{0,1,2\}$. Odhadněte metodou momentů parametry a, b na základě četností podle následující tabulky:

hodnota	0	1	2
pozorovaná četnost	17	15	8

Řešení:
Protože hodnoty $P(X = j) = a + bj$ musí být pravděpodobnosti, dostáváme podmínky

$$a + b \cdot 0 \geq 0 \qquad a + b \cdot 1 \geq 0 \qquad a + b \cdot 2 \geq 0$$

$$1 = (a + b \cdot 0) + (a + b \cdot 1) + (a + b \cdot 2) = 3a + 3b\ .$$

Dále budeme chtít, aby se rovnal první moment a jeho odhad:

$$E(X) = m_X$$

Pro střední hodnotu dostáváme

$$E(X) = 0 \cdot (a + b \cdot 0) + 1 \cdot (a + b \cdot 1) + 2 \cdot (a + b \cdot 2) = 3a + 5b\ .$$

Pro výběrový průměr (tj. odhad prvního momentu) pak máme

$$m_X = \frac{0 \cdot 17 + 1 \cdot 15 + 2 \cdot 8}{17 + 15 + 8} = \frac{31}{40}\ .$$

Celkově máme soustavu rovnic

$$3a + 3b = 1$$

$$3a + 5b = \frac{31}{40}$$

s řešením $b = -\frac{9}{80} = -0.1125$ a $a = \frac{1}{3} - b = \frac{107}{240} \doteq 0.4458$. Jednotlivé pravděpodobnosti pak vycházejí jako

$$P(X = 0) = a = \frac{107}{244} \doteq 0.4459$$

$$P(X = 1) = a + b = \frac{1}{3} \doteq 0.3333$$

$$P(X = 2) = a + 2b = \frac{53}{240} \doteq 0.2208$$

takže všechny podmínky máme splněny a našli jsme skutečně odhad parametru.

10.3 (odhad parametru - směs veličin)

V osudí jsou dva druhy kostek - na prvních jsou čísla $1, \ldots, 6$ a na druhých pouze čísla $2, 4, 6$. U obou druhů jsou všechny možné výsledky na dané kostce vždy stejně pravděpodobné. Vytáhli jsme 20 kostek a jednou jimi hodili. Četnost výsledků udává tabulka:

hodnota	1	2	3	4	5	6
pozorovaná četnost	3	4	4	4	2	3

Odhadněte v jakém poměru jsou jednotlivé druhy kostek mezi kostkami, které jsme vytáhli a kolik z vytažených kostek bylo prvního druhu. Použijte metodu momentů i metodu maximální věrohodnosti.

Řešení:
Celkem jsem vytáhli $3 + 4 + 4 + 4 + 2 + 3 = 20$ kostek. Označme k počet kostek prvního druhu mezi těmito vytaženými. Zřejmě tedy je $k \in \{0, 1, \ldots, 20\}$. Protože liché hodnoty padají pouze na kostkách prvního druhu, musí být $k \geq 3 + 4 + 2 = 9$.

Označme si

$\Omega =$"*množina kostek, které jsme si vytáhli*",

$\Omega_1 =$"*kostky* $1.druhu$ *z* Ω",

$\Omega_2 =$"*kostky* $2.druhu$ *z* Ω".

Zřejmě je $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $|\Omega| = 20$ a $P(\Omega_1) = \frac{k}{20}$. Naše veličina $X : \Omega \to \mathbb{R}$,

$X =$"*hodnota, která padne na kostce z* Ω"

je pak směsí veličin $Y_1 : \Omega_1 \to \mathbb{R}$ a $Y_2 : \Omega_2 \to \mathbb{R}$

$Y_1 =$"*hodnota, která padne na kostce z* Ω_1"

$Y_2 =$"*hodnota, která padne na kostce z* Ω_2"

ve tvaru $X = \mathrm{Mix}_{\frac{k}{20}}(Y_1, Y_2)$.

Metoda maximální věrohodnosti:

Z definice směsi máme

$$p_X(i) = \frac{k}{20} \cdot p_{Y_1}(i) + \left(1 - \frac{k}{20}\right) \cdot p_{Y_2}(i) = \begin{cases} \frac{k}{20} \cdot \frac{1}{6} = \frac{k}{120} & , \ i = 1, 3, 5 \ , \\ \frac{k}{20} \cdot \frac{1}{6} + \left(1 - \frac{k}{20}\right)\frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{k}{120} & , \ i = 2, 4, 6 \ . \end{cases}$$

Takže pro věrohodnost dostáváme

$$L(k) = \left(\frac{k}{120}\right)^{3+4+2} \left(\frac{1}{3} - \frac{k}{120}\right)^{4+4+3}$$

$$\ell(k) = \ln(L(k)) = 9 \cdot \ln\left(\frac{k}{120}\right) + 11 \cdot \ln\left(\frac{40-k}{120}\right)$$

kde $k \in \{9, \dots, 20\}$. Pro nalezení maxima je jednodušší na chvíli předpokládat, že funkce ℓ je dodefinována na vhodném intervalu. Můžeme tedy postupovat jako při hledání maxima funkce na intervalu a to pomocí derivace

$$\ell'(k) = \frac{9}{k} - \frac{11}{40-k} = \frac{360 - 20k}{k(40-k)} \ .$$

Z tvaru derivace ℓ' je ihned zřejmé, ze např. na intervalu $(0, 40)$ má funkce ℓ jediné maximum tam, kde je ℓ' nulová, tedy pro

$$k = \frac{360}{20} = 18 \ .$$

Tato hodnota je i v souladu s počátečními omezujícími podmínkami.

Metoda momentů:

Zřejmě $E(Y_1) = \frac{7}{2}$ a $E(Y_2) = 4$. Z definice směsi máme

$$E(X) = \frac{k}{20} \cdot E(Y_1) + \left(1 - \frac{k}{20}\right) \cdot E(Y_2) = \frac{k}{20} \cdot \frac{7}{2} + \left(1 - \frac{k}{20}\right) \cdot 4 = 4 - \frac{k}{40}$$

a výběrový průměr je

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6}{20} = \frac{67}{20} \ .$$

Srovnáním dostaneme

$$4 - \frac{k}{40} = E(X) = \overline{\boldsymbol{x}} = \frac{67}{20} \ ,$$

což dává

$$k = 26 \ .$$

Tato hodnota ale **NEODPOVÍDÁ** počátečním omezujícím podmínkám. Metoda momentů nám tedy v tomto případě žádný odhad **NEPOSKYTUJE**.

10.4 (odhad parametru - spojité rozdělení)

Náhodná veličina X s oborem hodnot $\langle a, +\infty)$ má hustotu

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & , \ t \in (-\infty, a), \\ e^{a-t} & , \ t \in \langle a, \infty), \end{cases}$$

kde $a \in \mathbb{R}$ je parametr. Pomocí metody maximální věrohodnosti i metody momentů odhadněte parametr a.

Úlohu vyřešte obecně pro realizaci $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a také pro konkrétní realizaci

$$\boldsymbol{x} = (1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 4)$$

rozsahu $n = 7$.

Řešení:

Funkce f_X je posunutá hustota exponenciálního rozdělení s parametrem $\tau = 1$. Je to tedy opět hustota, tj. je nezáporná a platí $\int_{\mathbb{R}} f_X(t)\ dt = 1$. Realizované výsledky musí spadat do oboru hodnot, tj.

$$x_i \in \langle a, +\infty)$$

pro všechna $i = 1, \ldots, n$ neboli musí platit, že

$$a \leq \min\{x_1, \ldots, x_n\} \ .$$

Metoda maximální věrohodnosti:

Naším cílem je maximalizovat funkci

$$\Lambda(a) = \prod_{i=1}^{n} e^{a - x_i} = e^{n\,a} \cdot e^{-\sum_i x_i} \ .$$

Tato funkce nabývá maxima pro největší přípustnou hodnotu parametru

$$\widehat{a} = \min\{x_1, \ldots x_n\} \ .$$

Pro konkrétní zadání je to pak

$$\widehat{a} = \min\{1, 2, 2, 2, 3, 3, 4\} = 1 \ .$$

Metoda momentů:

Porovnáme teoretickou střední hodnotu

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_X(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a}^{\infty} t\,e^{a-t}\,\mathrm{d}t = [-t\,e^{a-t}]_{t=a}^{\infty} + \int_{a}^{\infty} e^{a-t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= a + [-e^{a-t}]_{t=a}^{\infty} = a + 1$$

a výběrový průměr $\overline{\boldsymbol{x}}$. Odtud tak pro parametr $\widehat{a}$ dostaneme

$$\widehat{a} = \overline{\boldsymbol{x}} - 1\ ,$$

POKUD je ovšem splněno, že $a \leq \min\{x_1, \ldots, x_n\}$!

Pro konkrétní zadání je $\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{1+2+2+2+3+3+4}{7} = \frac{17}{7}$ a tedy $\widehat{a} = \frac{17}{7} - 1 \doteq 1.43$, což ale **NENÍ** menší než $\min\{1,2,2,2,3,3,4\} = 1$. V tomto případě tedy metoda momentů **NEDÁVÁ** žádný odhad.

10.5 (odhad parametru - spojité rozdělení)

Náhodná veličina X má biexponenciální rozdělení s hustotou

$$f_X(t) = c \cdot e^{-a|t|},\ t \in \mathbb{R}$$

kde $a, c > 0$. Metodou momentů odhadněte parametry na základě realizace rozsahu $n = 10$, z níž jsme vypočítali realizaci výběrového průměru $\overline{\boldsymbol{x}} = 2$ a realizaci výběrového rozptylu $s_{\boldsymbol{x}}^2 = 4$.

Řešení:

Aby funkce f_X byla hustotou, musí být splněno, že

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\ dt = 2c \int_{0}^{\infty} e^{-at}\ dt = 2c \left[\frac{e^{-at}}{-a}\right]_{t=0}^{\infty} = \frac{2c}{a}$$

tedy $c = \frac{a}{2}$ a zbývá odhadnout parametr a.

Hustota je sudá funkce a proto střední hodnota $E(X)$ (stejně jako všechny liché momenty) bude nulová. Příslušné nevlastní integrály existují, protože klesající exponenciála převáží jakýkoliv polynom v nekonečnu.

Porovnáním teoretické střední hodnoty a výběrového průměru dostaneme $0 = E(X) = \overline{x} = 2$ což sice evidentně neplatí, ale nedává to žádné omezení na volbu parametrů a. Navíc těžko můžeme čekat, že se měřením přesně trefíme do teoretické hodnoty.

Musíme proto použít další moment:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f_X(t)\ dt = \int_{0}^{\infty} t^2 \big(ae^{-at}\big)\ dt = \underbrace{\big[t^2 \cdot (-e^{-at})\big]_{t=0}^{\infty}}_{=0} + \int_{0}^{\infty} 2te^{-at}\ dt =$$

$$= \underbrace{\left[2t \cdot \frac{e^{-at}}{-a}\right]_{t=0}^{\infty}}_{=0} + \frac{2}{a}\int_{0}^{\infty} e^{-at}\ dt = \frac{2}{a^2}\ ,$$

který chceme srovnat s druhým vyběrovým momentem (nikoliv s výběrovým rozptylem!):

$$m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\ .$$

Ten se dá získat z hodnot $\overline{\boldsymbol{x}} = 2$ a $s^2_{\boldsymbol{x}} = 4$ podobným vztahem jako máme pro rozptyl, tj. $D(X) = E(X^2) - \Big(E(X)\Big)^2$, jen si musíme dát pozor na to, že někde je $\frac{1}{n}$ a někde zase $\frac{1}{n-1}$. Máme tedy

$$\frac{n-1}{n} \cdot s^2_{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \Big(x_i - \overline{\boldsymbol{x}}\Big)^2 = m_2 - (\overline{\boldsymbol{x}})^2$$

takže

$$m_2 = \frac{n-1}{n} \cdot s^2_{\boldsymbol{x}} + (\overline{\boldsymbol{x}})^2 = \frac{9}{10} \cdot 4 + 2^2 = \frac{38}{5} \ .$$

Srovnáním dostaneme

$$\frac{2}{a^2} = E(X^2) = m_2 = \frac{38}{5}$$

a celkem tak máme

$$a = \sqrt{\frac{5}{19}} = \frac{\sqrt{95}}{19} \doteq 0.512\,989 \qquad \text{a} \qquad c = \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{95}}{38} \doteq 0.256\,495 \ .$$

10.6 (test střední hodnoty při známém rozptylu)

Posuďte na hladině významnosti $\alpha = 0.01$ hypotézu, že mince je symetrická, jestliže

(a) při $n = 200$ hodech padl líc $80\times$,

(b) při $n = 100$ hodech padl líc $40\times$.

(tj. v obou případech to bylo 40% výsledků).

(**Návod:** Použijte vhodnou statistiku s přibližně normálním rozdělením odvozenou na základě centrální limitní věty pro náhodnou veličinu $X(\mathit{líc}) = 1$, $X(\mathit{rub}) = 0$.)

Řešení:

Situace, kdy přesně známe rozptyl daného (normálního) rozdělení, není příliš obvyklá. Většinou jej máme jen odhadnutý a pak musíme používat Studentovo rozdělení namísto normálního. Výjimkou jsou ale případy, kdy rozptyl nějakého rozdělení (alternativního, exponenciálního, Poissonova, atd.) je svázaný se střední hodnotou tohoto rozdělení prostřednictvím nějakého parametru.

Může se zdát, že pak se ale nedá použít obvyklý postup pro *test střední hodnoty se známým rozptylem*, protože nemáme normální rozdělení. To si ale můžeme vyrobit (přibližně) pomocí CLV.

Výsledky hodu mincí představují náhodnou veličinu $X(\mathit{líc}) = 1$, $X(\mathit{rub}) = 0$ s alternativním rozdělením s parametrem p, tj. $P(X = 1) = p$.

Naše nulová hypotéza tedy bude

$$\mathbf{H}_0 : p = p_0$$

proti alternativní hypotéze:

$$\mathbf{H}_1 : p \neq p_0$$

kde $p_0 = \frac{1}{2}$.

Vezmeme si nezávislé náhodné veličiny (kopie veličiny X)

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{, při } i\text{-tém pokusu padl líc,} \\ 0 & \text{, při } i\text{-tém pokusu padl rub .} \end{cases}$$

Za předpokladu nulové hypotézy budeme pro veličinu

$$\overline{\boldsymbol{X}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

mít $E(\overline{\boldsymbol{X}}) = \frac{1}{2}$ a $D(\overline{\boldsymbol{X}}) = \frac{1}{4n}$, takže podle CLV má (normovaná) statistika

$$T = \frac{\overline{\boldsymbol{X}} - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4n}}} = \frac{\overline{\boldsymbol{X}} - 0.5}{0.5}\sqrt{n},$$

přibližně (normované) normální rozdělení $N(0,1)$.

Poznámka: Tato statistika je analogií statistiky

$$T' = \frac{\overline{\boldsymbol{X}}' - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n},$$

pro případ veličiny X' s normálním rozdělením $N(\mu, \sigma)$ a pro nulovou hypotézu

$$\mathbf{H}_0' : \mu = \mu_0 \ .$$

Pozor! Nenaznačujeme tím, že by naše původní veličina X s alternativním rozdělením snad měla vlastnosti nějaké jiné veličiny X' s normálním rozdělením! Jde tu o to, ze při hledání kritického oboru pro X (při dané hladině významnosti α) je postup principiálně stejný jako pro případ, kdy X' má normální rozdělení - viz dále.

Kritérium pro **ZAMÍTNUTÍ** je tvaru

$$|t| > \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \text{zamítáme } \mathbf{H}_0 \text{ (na dané hladině } \alpha) \ .$$

Zdůvodnění tvaru zamítacího kritéria: Nulová hypotéza je tvaru $\mathbf{H}_0 : p = p_0$ a hodnotu p aproximujeme pomocí $\overline{\boldsymbol{x}}$. Chceme si proto zvolit takovou dolní hranici $u_1 \in \mathbb{R}$ a takovou horní hranici $u_2 \in \mathbb{R}$, aby pravděpodobnost, že je hodnota veličiny $\overline{\boldsymbol{X}}$ překročí, byla nejvýše rovna hodnotě $\alpha = 1\%$ (zvolená hladina významnosti) a navíc tak, že překročení směrem výše bude stejně pravděpodobné jako směrem níže (neboli na každou stranu $\alpha/2$). Jinými slovy, má platit, že

$$P(\overline{\boldsymbol{X}} < u_1) = \frac{\alpha}{2} = P(u_2 < \overline{\boldsymbol{X}})$$

neboli

$$u_1 = q_{\overline{\boldsymbol{X}}}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \qquad \text{a} \qquad u_2 = q_{\overline{\boldsymbol{X}}}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

(u veličiny $\overline{\boldsymbol{X}}$ předpokládáme normální rozdělení.)

Pokud nastane jedno z překročení (tj. pro realizaci $\overline{\boldsymbol{x}}$ máme $\overline{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R} \setminus \langle u_1, u_2 \rangle$), budeme to považovat za příliš porušení nulové hypotézy (pro danou toleranci chyby) a zamítneme ji. Místo veličiny $\overline{\boldsymbol{X}}$ a jejích kvantilů si ale raději vezmeme už zmíněnou statistiku $T = \frac{\overline{\boldsymbol{X}} - 0.5}{0.5}\sqrt{n}$, která je jen transformací veličiny $\overline{\boldsymbol{X}}$, a problém pomocí ní ekvivalentně přeformulujeme. Veličina T má přibližně rozdělení $N(0,1)$, takže meze pro T snadno najdeme:

$$P\left(T < \Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = \frac{\alpha}{2} = P\left(\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) < T\right) \ .$$

Tedy kritériem pro **ZAMÍTNUTÍ** nulové hypotézy je případ, kdy pro realizaci t statistiky T nastane

$$t < \Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \qquad \text{nebo} \qquad \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) < t$$

neboli

$$|t| > \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \ ,$$

protože máme rovnost $\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$.

Nyní stačí už jen dosadit:

(a) Zde máme $n = 200$, $\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{80}{200} = 0.4$ a $1 - \frac{\alpha}{2} = 0.995$ takže

$$|t| = \left| \frac{\overline{\boldsymbol{x}} - 0.5}{0.5} \sqrt{n} \right| = \left| \frac{0.4 - 0.5}{0.5} \sqrt{200} \right| \doteq 2,828 > 2,576 \doteq \Phi^{-1}(0.995) \ .$$

Hypotézu $\mathbf{H}_0 : p = \frac{1}{2}$ tedy **ZAMÍTÁME** na dané hladině $\alpha = 1\%$.

(b) Zde máme $n = 100$ a opět $\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{40}{100} = 0.4$ a $1 - \frac{\alpha}{2} = 0.995$ takže

$$|t| = \left| \frac{\overline{\boldsymbol{x}} - 0.5}{0.5} \sqrt{n} \right| = \left| \frac{0.4 - 0.5}{0.5} \sqrt{100} \right| = 2 \ \not> \ 2,576 \doteq \Phi^{-1}(0.995) \ .$$

Hypotézu $\mathbf{H}_0 : p = \frac{1}{2}$ tedy **NEZAMÍTÁME** na dané hladině $\alpha = 1\%$.

Jak je vidět, za předpokladu, že mince je symetrická se jen 40% úspěšných pokusů dá ještě tolerovat při $n = 100$ hodech, ale už ne při $n = 200$ hodech.

10.7 (test střední hodnoty normálního rozdělení při neznámém rozptylu)
Výrobce tvrdí, že spotřeba automobilu je $\mu_0 = 8$ litrů na 100 km. Průměrná spotřeba $n = 49$ uživatelů však byla $\overline{\boldsymbol{x}} = 8.4$ litru na 100 km s výběrovým rozptylem $s^2_{\boldsymbol{x}} = 2.56$. Testujte na hladině významnosti $\alpha = 5\%$, zda má výrobce pravdu, a uveďte použité předpoklady.

Řešení:
K provedení testu střední hodnoty (s neznámým rozptylem) potřebujeme předpokládat, že testovaná veličina spotřeby X má normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ a že měření odpovídají náhodnému výběru (tj. jsou nezávislá). Protože předpokládáme (přesné) normální rozdělení, nemusíme (jako u CLV) mít zase tak velký rozsah souboru.

Podle zadání máme otestovat hypotézu o střední hodnotě

$$\mathbf{H}_0 : \mu = \mu_0 (= 8)$$

proti alternativní hypotéze:

$$\mathbf{H}_1 : \mu \neq \mu_0 (= 8) \ .$$

Hodnotu rozptylu neznáme, takže je nutné použít testovací statistiku, která obsahuje odhad směrodatné odchylky σ pomocí $S_{\boldsymbol{X}}$:

$$T = \frac{\overline{\mathbf{X}} - \mu_0}{S_{\boldsymbol{X}}} \sqrt{n} \ .$$

Kritérium pro **ZAMÍTNUTÍ** je tvaru

$$|t| > q_{t(n-1)} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \quad \Rightarrow \quad \text{zamítáme } \mathbf{H}_0 \text{ (na dané hladině } \alpha) \ .$$

Zdůvodnění tvaru zamítacího kritéria: Za předpokladu platnosti nulové hypotézy, tj. pokud $E(X) = \mu_0$, bude mít statistika T tzv. Studentovo t-rozdělení s $n - 1$ stupni volnosti (speciálně tedy bude platit $E(T) = 0$) a očekávané hodnoty takovéto statistiky by se měly pohybovat blízko nuly. Pokud se příliš odchýlí (více než bude dovolovat hladina α omezující chybu 1. druhu), bude to důvod k zamítnutí nulové hypotézy.

Odchýlení opět znamená, že realizované hodnoty t statistiky T spadnou do kritického oboru W (pro statistiku T), který je symetrický vzhledem k 0 z hlediska pravděpodobnosti. Bude tedy tvaru $W: \ (-\infty, u_0) \cup (u_1, \infty)$, kde

$P(T < u_0) = \frac{\alpha}{2} = P(u_1 < T)$ (což je omezení chyby 1. druhu, tj. že bychom se spletli a zamítli něco, co platí). Dostáváme tak $u_0 = q_{t(n-1)}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -q_{t(n-1)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = -u_1$, tudíž

$$W: \quad \left(-\infty, -q_{t(n-1)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right) \cup \left(q_{t(n-1)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right), \infty\right)$$

a kritérium pro **ZAMÍTNUTÍ** je tak skutečně tvaru

$$|t| > q_{t(n-1)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \text{zamítáme } \mathbf{H}_0 \text{ (na dané hladině } \alpha).$$

Teď už tedy dosadíme konkrétní hodnoty. Realizace testovací statistiky je

$$t = \frac{\overline{\boldsymbol{x}} - \mu_0}{\sqrt{s_{\boldsymbol{x}}^2}}\sqrt{n} = \frac{8.4 - 8}{\sqrt{2.56}}\sqrt{49} = \frac{0.4}{1.6} \cdot 7 = 1.75\ .$$

Protože

$$|t| = 1.75 \not> 2.011 \doteq q_{t(48)}(0.975) = q_{t(n-1)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\ ,$$

nulovou hypotézu **NEZAMÍTÁME**.

Naše měření tak nejsou dostačující na to, abychom mohli zamítnout tvrzení výrobce na hladině významnosti 5%. Je dobré si ještě zjistit, jak moc bychom si museli dovolit být nejistí, abychom už tvrzení výrobce zamítli. Tato hladina α_0 je určena jako

$$q_{t(n-1)}\left(1-\frac{\alpha_0}{2}\right) = |t|\ ,$$

tedy

$$\alpha_0 = 2 - 2 \cdot F_{t(n-1)}(|t|) = 2 - 2 \cdot F_{t(n-1)}(1.75) \doteq 2 - 2 \cdot 0.9567 = 0.0866\ .$$

Pokud tedy budeme posuzovat hypotézu na hladině významnosti **VYŠŠÍ** než $8,66\%$, dojdeme k jejímu zamítnutí. (A naopak čím více si chceme být jistí, že jsme se nespletli (tj. zmenšujeme hodnoty α), tím víc "prohřešků" od výrobce budeme muset tolerovat.)

Poznámka: Podle zadání jsme uvažovali případ, kde se ptáme na rovnost (tj. $\mu = \mu_0$). V této situaci máme jedinou možnost, jak zvolit nulovou hypotézu - a sice výše uvedeným způsobem. Jako nulovou hypotézu není možné zvolit případ $\mu \neq \mu_0$, protože množina $\{\mu \in \mathbb{R} \mid \mu \neq \mu_0\}$ není uzavřená.

V úvahu vzhledem k zadání by ale mohl ještě přicházet jednostranný test, protože výrobce určitě raději tvrdí, že $\mu \leq \mu_0$. V tomto případě pak buď můžeme testovat $\mathbf{H}_0'$: $\mu \leq \mu_0$, ale mohli bychom také testovat $\mathbf{H}_0''$: $\mu \geq \mu_0$.

V případě testu hypotézy $\mathbf{H}_0'$: $\mu \leq \mu_0$ se snažíme vyhnout tomu, že bychom omylem poškodili *výrobce*, a výsledek testu bude

$$t = 1.75 > 1.6772 \doteq q_{t(48)}(0.95) = q_{t(n-1)}(1-\alpha)$$

takže hypotézu výrobce **ZAMÍTNEME**. (Pozor, jde o jednostranný test, takže kvantil je jiný! Veškerou chybu jsme spotřebovali jen na ty vysoké hodnoty. A toto malé zvětšení, oproti oboustrannému testu, už stačilo na zamítnutí.)

A v případě testu hypotézy $\mathbf{H}_0''$: $\mu \geq \mu_0$ se snažíme vyhnout tomu, že bychom omylem poškodili *uživatele*, a výsledek testu bude

$$t = 1.75 \not< -1.6772 \doteq -q_{t(48)}(0.95) = q_{t(n-1)}(\alpha)$$

takže hypotézu uživatelů **NEZAMÍTNEME**.

10.8 (test střední hodnoty normálního rozdělení při neznámém rozptylu)

Z $n = 10$ měření krevního tlaku u jednoho pacienta jsme obdrželi výběrový průměr $\overline{\boldsymbol{x}} = 150$ a výběrovou směrodatnou odchylku $s_{\boldsymbol{x}} = 20$. Rozhodněte na hladině významnosti $\alpha = 0.05$, zda je střední hodnota krevního tlaku nejvýše $\mu_0 = 140$. Předpokládejte, že výška krevního tlaku má normální rozdělení a jednotlivá měření jsou nezávislá.

Řešení:

Hypotéza, že $\mu \geq \mu_0 (= 140)$ by znamenala, že pacient je na tom asi dost špatně. To ale předpokládat nechceme (ledaže bychom k tomu měli zvláštní důvod) a naopak budeme předpokládat, že by měl být spíš v pořádku a budeme proto testovat hypotézu

$$\mathbf{H}_0 : \mu \leq \mu_0$$

proti hypotéze

$$\mathbf{H}_1 : \mu > \mu_0 .$$

Opět použijeme testovací statistiku

$$T = \frac{\overline{\boldsymbol{X}} - \mu_0}{S_{\boldsymbol{X}}} \sqrt{n}$$

a kritérium pro **ZAMÍTNUTÍ** bude tvaru

$$t > q_{t(n-1)}(1-\alpha) \quad \Rightarrow \quad \text{zamítáme } \mathbf{H}_0 \text{ (na dané hladině } \alpha) \; .$$

Dosadíme opět konkrétní hodnoty. Realizace testovací statistiky je

$$t = \frac{\overline{\boldsymbol{x}} - \mu_0}{s_{\boldsymbol{x}}} \sqrt{n} = \frac{150 - 140}{20} \sqrt{10} \doteq 1.58 \; .$$

Protože

$$t \doteq 1.58 \not> 1.83 \doteq q_{t(9)}(0.95) = q_{t(n-1)}(1-\alpha) \; ,$$

nulovou hypotézu **NEZAMÍTÁME**.

Zdůvodnění tvaru zamítacího kritéria: Abychom si více uvědomili závislost veličiny X na parametru μ, budeme ji vyznačovat jako X_μ a podobně pro statistiku $T_\mu = \frac{\overline{\boldsymbol{X}}_\mu - \mu_0}{S_{\boldsymbol{X}_\mu}} \sqrt{n}$. Protože předpokládáme $\mathbf{H}_0 : \; \mu \leq \mu_0$, a tedy $E(\overline{\boldsymbol{X}}_\mu) = \mu$, budou očekávané hodnoty statistiky T_μ především v intervalu $(-\infty, 0\rangle$. Jako kritický obor si proto zvolíme

$$W : (u_1, \infty) \; ,$$

kde požadujeme, aby $u_1 \in \mathbb{R}$ bylo nejmenší takové, aby chyba 1. druhu byla nejvýše α, tj.

$$(\forall \mu \leq \mu_0) \quad P(T_\mu \in W) = P(u_1 < T_\mu) \leq \alpha \; .$$

Je nutné zdůraznit, že za předpokladu nulové hypotézy (tj. že $\mu \leq \mu_0$) statistika T_μ obecně **NEMÁ** Studentovo t-rozdělení (t-rozdělení se objeví právě jen pokud $\mu = \mu_0$).

Přesto ho ale nakonec použijeme, protože případ $\mu = \mu_0$ je za předpokladu $\mathbf{H}_0$ ten "nejhorší" možný, jak je vidět z následujícího:

$$\mu \leq \mu_0 \quad \Rightarrow \quad T_\mu = \frac{\overline{\boldsymbol{X}}_\mu - \mu_0}{S_{\boldsymbol{X}_\mu}} \sqrt{n} \quad = \quad \frac{\overline{\boldsymbol{X}}_\mu - \mu}{S_{\boldsymbol{X}_\mu}} \sqrt{n} + \underbrace{\frac{\mu - \mu_0}{S_{\boldsymbol{X}_\mu}} \sqrt{n}}_{\leq 0} \quad \leq \quad \underbrace{\frac{\overline{\boldsymbol{X}}_\mu - \mu}{S_{\boldsymbol{X}_\mu}} \sqrt{n}}_{t-\text{rozdělení}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad P\Big(u_1 < T_\mu\Big) \leq P\left(u_1 < \frac{\overline{\boldsymbol{X}}_\mu - \mu}{S_{\boldsymbol{X}_\mu}} \sqrt{n}\right) = 1 - F_{t(n-1)}(u_1) = P\Big(u_1 < T_{\mu_0}\Big)$$

Vidíme tedy, že $P\Big(u_1 < T_\mu\Big) \leq P\Big(u_1 < T_{\mu_0}\Big)$ a hledané u_1 tak musí splňovat, že

$$P\Big(u_1 < T_{\mu_0}\Big) = \alpha$$

tedy

$$u_1 = q_{t(n-1)}(1-\alpha)$$

a kritérium pro **ZAMÍTNUTÍ** je tak skutečně tvaru

$$t > q_{t(n-1)}(1-\alpha) \quad \Rightarrow \quad \text{zamítáme } \mathbf{H}_0 \text{ (na dané hladině } \alpha) \; .$$

10.9 (test střední hodnoty normálního rozdělení při neznámém rozptylu)

Provádíme průzkum, jaký skutečný objem piva X točí v nejmenované restauraci. Zakoupeno bylo $n = 10$ piv a jejich objem byl (v litrech):

$$\boldsymbol{x} = (0.510,\ \ 0.462,\ \ 0.491,\ \ 0.466,\ \ 0.451,\ \ 0.503,\ \ 0.475,\ \ 0.487,\ \ 0.512,\ \ 0.505)\,.$$

Předpokládejte, že natočený objem piva X se řídí normálním rozdělením a jednotlivá měření jsou nezávislá.

(a) Pro zvolenou hladinu $\alpha = 0.05$ odhadněte (symetricky intervalově) střední hodnotu objemu natočeného piva.

(b) Na hladině $\alpha = 0.05$ otestujte hypotézu, že dostaneme natočeno alespoň $\mu_0 = 0.5$ litru.

Řešení:
Rozptyl je neznámý. Spočítáme si proto realizaci výběrového průměru $\overline{\boldsymbol{x}}$ a výběrové směrodatné odchylky $s_{\boldsymbol{x}}$:

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{10}(0.510 + 0.462 + \cdots + 0.505) = \frac{4.862}{10} = 0.4862\ ,$$

$$\begin{aligned} s_{\boldsymbol{x}}^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{\boldsymbol{x}})^2 = \frac{1}{n-1}\Big[\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big) - n\cdot\overline{\boldsymbol{x}}^2\Big] = \\ &= \frac{1}{9}\Big[(0.510^2 + 0.462^2 + \cdots + 0.505^2) - 10\cdot(0.4862)^2\Big] = \\ &= \frac{1}{9}\Big(2.368154 - 2.3639044\Big) = \frac{0.0042496}{9} = 4.72178\cdot 10^{-4}\ , \\ s_{\boldsymbol{x}} &= \sqrt{s_{\boldsymbol{x}}^2} = \sqrt{4.72178}\cdot 10^{-2} \doteq 2.173\cdot 10^{-2}\ . \end{aligned}$$

(a) Veličina X má normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$. Statistika $T = \frac{\overline{\boldsymbol{X}}-\mu}{S_{\boldsymbol{X}}}\sqrt{n}$ má pak Studentovo t-rozdělení s $n-1$ stupni volnosti. Pokud chceme, aby T padlo **MIMO** interval $\langle u_0, u_1\rangle$ s pravděpodobností α (a to se stejnou pravděpodobností "nad" i "pod"), pak budeme mít

$$\langle u_0, u_1\rangle = \Big\langle -q_{t(n-1)}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right),\quad q_{t(n-1)}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\Big\rangle$$

Pro $\alpha = 0.05$ tak úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} 0.95 &= P\left(-q_{t(9)}(0.975) \ \ \le\ \ \frac{\overline{\boldsymbol{X}}-\mu}{S_{\boldsymbol{X}}}\sqrt{n}\ \ \le\ \ q_{t(9)}(0.975)\right) = \\ &= P\left(\overline{\boldsymbol{X}} - \frac{S_{\boldsymbol{X}}}{\sqrt{n}}\cdot q_{t(9)}(0.975)\ \ \le\ \ \mu\ \ \le\ \ \overline{\boldsymbol{X}} + \frac{S_{\boldsymbol{X}}}{\sqrt{n}}\cdot q_{t(9)}(0.975)\right)\ . \end{aligned}$$

Kvantil Studentova rozdělení je $q_{t(n-1)}(1-\frac{\alpha}{2}) = q_{t(9)}(0.975) \doteq 2.26$ a tedy

$$\frac{s_{\boldsymbol{x}}}{\sqrt{n}}\cdot q_{t(9)}(0.975) \doteq \frac{2.173\cdot 10^{-2}}{\sqrt{10}}\cdot 2.26 \doteq 0.0155$$

Hledaný oboustranný symetrický 95% interval spolehlivosti (v litrech) pro střední hodnotu μ je tak

$$\begin{aligned} \Big\langle \overline{\boldsymbol{x}} - \frac{s_{\boldsymbol{x}}}{\sqrt{n}}\cdot q_{t(9)}(0.975),\quad \overline{\boldsymbol{x}} + \frac{s_{\boldsymbol{x}}}{\sqrt{n}}\cdot q_{t(9)}(0.975)\Big\rangle &\doteq \Big\langle 0.4862 - 0.0155,\quad 0.4862 + 0.0155\Big\rangle \\ &\doteq \langle 0.4707, 0.5017\rangle\ . \end{aligned}$$

(b) Otestujeme nulovou hypotézu

$\mathbf{H}_0 : \mu \geq 0.5 \ (= \mu_0)$

proti alternativní hypotéze:

$\mathbf{H}_1 : \mu < 0.5$

na hladině významnosti $\alpha = 0.05$.

Opět použijeme statistiku

$$T = \frac{\overline{\boldsymbol{X}} - \mu_0}{S_{\boldsymbol{X}}} \cdot \sqrt{n}$$

a **ZAMÍTACÍ** kritérium

$$t < q_{t(n-1)}(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \text{zamítáme } \mathbf{H}_0 \text{ (na dané hladině } \alpha) \ .$$

Realizace testovací statistiky je

$$t = \frac{\overline{\boldsymbol{x}} - \mu_0}{s_{\boldsymbol{x}}} \sqrt{n} \doteq \frac{0.4862 - 0.5}{2.173 \cdot 10^{-2}} \sqrt{10} \doteq -2.008$$

a kvantil Studentova rozdělení je

$$q_{t(n-1)}(\alpha) = -q_{t(n-1)}(1 - \alpha) = -q_{t(9)}(0.95) \doteq -1.83 \ .$$

Protože

$$t \doteq -2.008 < -1.83 \doteq q_{t(9)}(0.05) \ ,$$

nulovou hypotézu tedy **ZAMÍTÁME**. V této hospodě bychom si tedy asi pivo dávat nechtěli.

Doplnění: Na druhé straně, pokud by přišla do této hospody kontrola a chtěla testovat správnou míru, tj. hypotézu

$\mathbf{H}_0' : \mu = 0.5 \ (= \mu_0)$

také na hladině $\alpha = 0.05$, dojde k jinému závěru:

$$|t| \doteq 2.008 \not> 2.2622 \doteq q_{t(9)}(0.975) = q_{t(n-1)}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

a tudíž hypotézu $\mathbf{H}_0'$ **NEZAMÍTNE**.

10.10 (test rozptylu normálního rozdělení)

Do laboratoře bylo odesláno $n = 5$ stejných vzorků krve ke stanovení obsahu alkoholu X (v promilích alkoholu). Výsledkem byla realizace

$$\boldsymbol{x} = (0.8, \ \ 1, \ \ 0.6, \ \ 1.4, \ \ 0.9) \ .$$

Posuďte na hladině významnosti $\alpha = 0.05$, zda směrodatná odchylka měření je nejvýše $\sigma_0 = 0.1$ promile alkoholu. Předpokládejte, že obsah alkoholu X má normální rozdělení a jednotlivá měření jsou nezávislá.

Řešení:
Naše veličina X, udávající obsah alkoholu v krvi v promilích, má normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$. Místo testu směrodatné odchylky σ budeme (ekvivalentně) testovat rozptyl σ^2 a sice nulovou hypotézu tvaru

$\mathbf{H}_0 : \sigma^2 \leq (0.1)^2 \ (= \sigma_0)^2$

proti alternativní hypotéze:

$$\mathbf{H}_1 : \sigma^2 > (0.1)^2$$

na hladině významnosti $\alpha = 0.05$.

Tentokrát budeme používat statistiku

$$T = \frac{(n-1)\, S^2_{\mathbf{X}}}{\sigma_0^2}\ ,$$

která má pro případ $\sigma = \sigma_0$ tzv. χ^2-rozdělení s $n-1$ stupni volnosti. Obecněji, teprve veličina $\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \cdot T$ bude mít χ^2-rozdělení. Za předpokladu nulové hypotézy, tj. pro $0 \le \sigma \le \sigma_0$, budou očekávané hodnoty statistiky T především v intervalu $(-\infty, 1\rangle$ (ve skutečnosti to bude jen interval $\langle 0, 1\rangle$, protože T je nezáporná veličina). Kritický obor tak bude

$$W : \ \Big(q_{\chi^2(n-1)}(1-\alpha), \quad \infty\Big)$$

a kritérium pro **ZAMÍTNUTÍ** proto bude tvaru

$$t > q_{\chi^2(n-1)}\,(1-\alpha) \quad \Rightarrow \quad \text{zamítáme } \mathbf{H}_0 \text{ (na dané hladině } \alpha) \ .$$

Dosadíme opět konkrétní hodnoty:

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{0.8 + 1 + 0.6 + 1.4 + 0.9}{5} = \frac{4.7}{5} = 0.94\ ,$$

$$s^2_{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{\boldsymbol{x}})^2 = \frac{0.14^2 + 0.06^2 + 0.34^2 + 0.46^2 + 0.04^2}{4} = \frac{0.352}{4} = 0.088\ .$$

Realizace testovací statistiky je

$$t = \frac{(n-1)\, s^2_{\boldsymbol{x}}}{\sigma_0^2} = \frac{4 \cdot 0.088}{(0.1)^2} = 35.2$$

a hodnota kvantilu je

$$q_{\chi^2(n-1)}\,(1-\alpha) = q_{\chi^2(4)}(0.95) \doteq 9.49\ .$$

Protože

$$t \doteq 35.2 \not> 9.49 \doteq q_{\chi^2(4)}(0.95)\ ,$$

nulovou hypotézu **ZAMÍTÁME**.

Zdůvodnění tvaru kritického oboru: Opět si vyznačme závislost X a T na parametru σ jako

$$T_\sigma = \frac{(n-1) S^2_{\mathbf{X}_\sigma}}{(\sigma_0)^2}\ .$$

Kritický obor má být tvaru

$$W : \quad (u_1, \infty)\ ,$$

kde požadujeme, aby $u_1 \in \mathbb{R}$ bylo nejmenší takové, aby chyba 1. druhu byla nejvýše α, tj.

$$(\forall\ 0 \le \sigma \le \sigma_0) \quad P(T_\sigma \in W) = P(u_1 < T_\sigma) \le \alpha\ .$$

Opět případ $\sigma = \sigma_0$ je za předpokladu $\mathbf{H}_0$ ten "nejhorší" možný, jak je vidět z následujícího:

$$\sigma \le \sigma_0 \quad \Rightarrow \quad T_\sigma \ = \underbrace{\frac{\sigma^2}{(\sigma_0)^2}}_{\le 1} \cdot \frac{(n-1) S^2_{\mathbf{X}_\sigma}}{\sigma^2} \ \le \ \underbrace{\frac{(n-1) S^2_{\mathbf{X}_\sigma}}{\sigma^2}}_{\chi^2-\text{rozdělení}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad P\Big(u_1 < T_\sigma\Big) \le P\left(u_1 < \frac{(n-1) S^2_{\mathbf{X}_\sigma}}{\sigma^2}\right) = 1 - F_{\chi^2(n-1)}(u_1) = P\Big(u_1 < T_{\sigma_0}\Big)$$

Vidíme tedy, že $P\Big(u_1 < T_\sigma\Big) \leq P\Big(u_1 < T_{\sigma_0}\Big)$ a hledané u_1 tak musí splňovat

$$P\Big(u_1 < T_{\sigma_0}\Big) = \alpha$$

tedy

$$u_1 = q_{\chi^2(n-1)}(1-\alpha) \ ,$$

a kritický obor je tak skutečně tvaru

$$W: \quad \Big(q_{\chi^2(n-1)}(1-\alpha), \quad \infty\Big) \ .$$