12. cvičení z PSI

20. - 24. prosince 2016

12.1 (Test střední hodnoty dvou normálních rozdělení se stejným neznámým rozptylem)

Z realizací náhodných veličin X a Y (s normálním rozdělením) jsme z výběrů daného rozsahu obdrželi tyto realizace odhadů:

X	Y
$m = 11$	$n = 21$
$\overline{\boldsymbol{x}} = 10$	$\overline{\boldsymbol{y}} = 12,$
$s_{\boldsymbol{x}} = 2$	$s_{\boldsymbol{y}} = 3$

Posuďte na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ hypotézu, že střední hodnoty náhodných veličin X a Y jsou stejné. Současně zkontrolujte, zda je možné použít potřebné předpoklady.

Řešení:
Abychom mohli použít test střední hodnoty dvou normálních rozdělení se *stejným* neznámým rozptylem, měli bychom nejdříve otestovat, zda obě veličiny stejný rozptyl skutečně mají.

Test stejného rozptylu: Předpokládáme, že veličiny X a Y jsou *nezávislé* s normálními rozděleními po řadě $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ s $N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Jednotlivá měření pro X a Y považujeme *všechna navzájem za nezávislá*.

Budeme testovat nulovou hypotézu o rovnosti rozptylů

$$\mathbf{H}_0' : \ \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

proti alternativní hypotéze

$$\mathbf{H}_1' : \ \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \ .$$

Testovací statistika je

$$T' = \frac{S_{\boldsymbol{X}}^2}{S_{\boldsymbol{Y}}^2} \ ,$$

a má za předpokladu $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ tzv. Fisherovo-Snedecorovo $F(m-1, n-1)$ - rozdělení s $m-1$ a $n-1$ stupni volnosti (v tomto pořadí!).

Za předpokladu nulové hypotézy $\mathbf{H}_0'$ je očekávaná hodnota statistiky T' rovna 1 a kritický obor tak (podobně jako v některých předchozích příkladech) bude

$$W : \ \left(-\infty, \ q_{F(m-1,n-1)}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \cup \left(q_{F(m-1,n-1)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right), \ \infty\right) \ .$$

Kritérium pro **ZAMÍTNUTÍ** je proto tvaru

$$\left[t' < q_{F(m-1,n-1)}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \ \text{nebo} \ \ q_{F(m-1,n-1)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) < t' \right] \ \Rightarrow \ \text{zamítáme } \mathbf{H}_0' \ (\text{na dané hladině } \alpha) \ .$$

Realizace testovací statistiky je

$$t' = \frac{s_{\boldsymbol{x}}^2}{s_{\boldsymbol{y}}^2} = \frac{4}{9} \doteq 0,444$$

a hodnoty kvantilů jsou

$$q_{F(m-1,n-1)}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = q_{F(10,20)}(0.025) = \frac{1}{q_{F(20,10)}(0.975)} \doteq \frac{1}{3.42} \doteq 0.2924$$

a

$$q_{F(m-1,n-1)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = q_{F(10,20)}(0.975) \doteq 2.77\ .$$

Protože

$$t' \doteq 0.444 \in \left\langle 0.2924,\ 2.77 \right\rangle\ ,$$

hypotézu $\mathbf{H}_0'$, že X *a* Y *mají stejný rozptyl*, **NEZAMÍTÁME**.

Test rovnosti středních hodnot se stejným neznámým rozptylem:

Předpokládáme, že veličiny X a Y jsou *nezávislé* s normálními rozděleními po řadě $N(\mu_1, \sigma^2)$ s $N(\mu_2, \sigma^2)$. Tento předpoklad je podložen předchozím testem rovnosti rozptylů, který jsme nezamítli. Jednotlivá měření pro X a Y považujeme opět *všechna navzájem za nezávislá.*

Budeme testovat nulovou hypotézu o rovnosti středních hodnot

$$\mathbf{H}_0:\ \mu_1 = \mu_2$$

proti alternativní hypotéze

$$\mathbf{H}_1:\ \mu_1 \neq \mu_2\ .$$

Testovací statistika je

$$T = \frac{\boldsymbol{X} - \boldsymbol{Y}}{S\sqrt{1/m + 1/n}}\ ,$$

kde

$$S^2 = \frac{m-1}{m+n-2} \cdot S^2_{\boldsymbol{X}} + \frac{n-1}{m+n-2} \cdot S^2_{\boldsymbol{Y}}$$

je (vážený) odhad rozptylu. Za předpokladu nulové hypotézy $\mathbf{H}_0$, tj. $\mu_1 = \mu_2$, má statistika T Studentovo $t(m+n-2)$-rozděleni s $m+n-2$ stupni volnosti.

Kritérium pro **ZAMÍTNUTÍ** bude proto (očekávatelně) tvaru

$$|t| > q_{t(m+n-2)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \text{zamítáme } \mathbf{H}_0 \text{ (na dané hladině } \alpha)\ .$$

Po dosazení máme

$$s^2 = \frac{(m-1)s^2_{\boldsymbol{x}} + (n-1)s^2_{\boldsymbol{y}}}{m+n-2} = \frac{10 \cdot 2^2 + 20 \cdot 3^2}{10+20} = \frac{22}{3}$$

a

$$t = \frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}}{s\sqrt{1/m + 1/n}} = \frac{10-12}{\sqrt{\frac{22}{3}}\sqrt{\frac{1}{11}+\frac{1}{21}}} = -\frac{3}{4}\sqrt{7} \doteq -1.984\ .$$

Hodnota kvantilu je

$$q_{t(m+n-2)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = q_{t(30)}(0.975) \doteq 2.042\ .$$

Protože

$$|t| \doteq 1.984 \not> 2.042 \doteq q_{t(m+n-2)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\ ,$$

hypotézu $\mathbf{H}_0$, ze X *a* Y *mají stejnou střední hodnotu*, také **NEZAMÍTÁME**.

12.2 (Párový pokus)

U $n = 8$ praváků jsme změřili délku prostředníčku na pravé a levé ruce, hodnoty v milimetrech uvádí tabulka.

Levá	81	74	90	84	77	67	59	70
Pravá	84	76	89	85	80	69	58	68

Na hladině významnosti $\alpha = 5\%$ posuďte hypotézu, že praváci mají delší prostředníček na levé ruce, a uveďte předpoklady.

Řešení:

Označme si jako veličinu X délku prostředníčku na levé ruce a jako veličinu Y délku prostředníčku na pravé ruce (u téhož člověka, zde navíc praváka). Pokud na jednom subjektu provádíme měření více veličin (zde X a Y), pak už jejich vzájemné hodnoty nemůžeme považovat za nezávislé. Za nezávislá ovšem samozřejmě považujeme měření dvojice veličin (X, Y) (tj. náhodného vektoru) u různých lidí.

U veličiny $\Delta := X - Y$, která představuje rozdíly mezi veličinami můžeme přirozeně předpokládat normální rozdělení (neboť jde o odchylky, které obvykle tuto vlastnost mají). Máme tedy nezávislá měření s hodnotami $\boldsymbol{\delta} = (x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n)$ a naše původní hypotéza $E(X) \geq E(Y)$ lze ekvivalentně vyjádřit jako nulová hypotéza

$$\mathbf{H}_0 : \; E(\Delta) \geq 0$$

kterou otestujeme proti alternativní hypotéze

$$\mathbf{H}_1 : \; E(\Delta) < 0 \; .$$

na hladině významnosti $\alpha = 5\%$.

Půjde tedy o obvyklý test střední hodnoty (veličiny s normálním rozdělením) při neznámém rozptylu. Použijeme tudíž statistiku

$$T = \frac{\overline{\boldsymbol{\Delta}}}{S_{\boldsymbol{\Delta}}} \sqrt{n}$$

a kritérium pro **ZAMÍTNUTÍ** bude tvaru

$$t < q_{t(n-1)}(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \text{zamítáme } \mathbf{H}_0 \text{ (na dané hladině } \alpha) \; .$$

Určíme si hodnoty realizace $\boldsymbol{\delta}$ veličiny $\boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{X} - \boldsymbol{Y}$

$\boldsymbol{x}$	81	74	90	84	77	67	59	70
$\boldsymbol{y}$	84	76	89	85	80	69	58	68
$\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$	-3	-2	1	-1	-3	-2	1	2

Spočteme její výběrový průměr a rozptyl (pro $n = 8$):

$$\overline{\boldsymbol{\delta}} = -\frac{7}{8} = -0.875 \, , \quad s^2_{\boldsymbol{\delta}} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(\delta_i - \overline{\boldsymbol{\delta}} \right)^2 = \frac{215}{56} \doteq 3.8393 \; ,$$

určíme realizaci statistiky

$$t = \frac{\overline{\boldsymbol{\delta}}}{s_{\boldsymbol{\delta}}} \sqrt{n} = -\frac{7\sqrt{7}}{\sqrt{215}} \doteq -1.263$$

a příslušný kvantil

$$q_{t(n-1)}(\alpha) = -q_{t(n-1)}(1 - \alpha) = -q_{t(7)}(0.95) \doteq -1.895 \; .$$

Protože

$$t \doteq -1.263 \not< -1.895 \doteq q_{t(7)}(0.05) \; ,$$

nulovou hypotézu, že praváci mají delší levý prostředníček než pravý, **NEZAMÍTÁME**.

12.3 (Test nekorelovanosti dvou výběrů z normálních rozdělení)

Pro realizace

X	22	15	30	27	29
Y	10	6	8	4	8

náhodných výběrů z veličin X, Y testujte na hladině významnosti $\alpha = 5\,\%$ jejich korelovanost.

Řešení:

Testujeme hypotézu o koeficientu korelace $\varrho(X,Y)$ mezi náhodnými veličinami X a Y,

$$\mathbf{H}_0 : \ \varrho(X,Y) = 0 \text{ (tj. náhodné veličiny } X \text{ a } Y \text{ jsou nekorelované)}$$

proti alternativní hypotéze

$$\mathbf{H}_1 : \ \varrho(X,Y) \neq 0 \text{ (tj. náhodné veličiny } X \text{ a } Y \text{ jsou korelované.)}$$

K testování použijeme výběrový koeficient korelace $R(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ a testovou statistiku

$$T = \frac{R(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\,\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-R^2(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})}} ,$$

která má Studentovo rozdělení $\mathrm{t}(n-2)$, kde n je rozsah výběrů. Realizaci $r(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ výběrového koeficientu korelace $R(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ vypočteme ze vzorce

$$r(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)\cdot\left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\right)}{\sqrt{\left(n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right)\cdot\left(n\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\right)^2\right)}} .$$

Za předpokladu nulové hypotézy $\mathbf{H}_0$, tj. $\varrho(X,Y) = 0$, je očekávaná hodnota statistiky T rovna 0. Kritérium pro **ZAMÍTNUTÍ** proto (podobně jako pro některé předchozí testy) bude tvaru

$$|t| > q_{t(n-2)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \text{zamítáme } \mathbf{H}_0 \text{ (na dané hladině } \alpha) .$$

Je $n = 5$,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 123, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i = 36, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 3\,179, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 280, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 890 .$$

Po dosazení hodnot dostaneme

$$r(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{4450-4428}{\sqrt{766\cdot 104}} = \frac{11}{2\sqrt{4979}} \doteq 0.07794$$

$$t = \frac{r(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}} = \sqrt{\frac{363}{19795}} \doteq 0.1354.$$

Z tabulek nalezneme kvantil

$$q_{t(n-2)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = q_{\mathrm{t}(3)}(0.975) \doteq 3.18 .$$

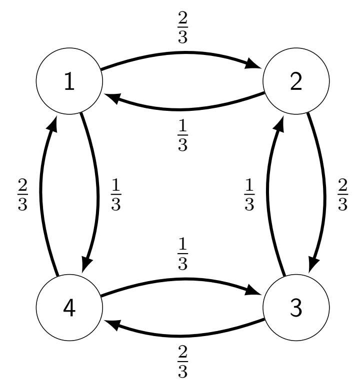
Protože

$$|t| \doteq 0.1354 \not> 3.18 \doteq q_{\mathrm{t}(3)}(0.975) ,$$

hypotézu $\mathbf{H}_0$ **NEZAMÍTÁME**.

12.4 (Markovovy řetězce - sestavení matice, klasifikace stavů)

V obousměrně orientovaném cyklu délky 4 přejde v každém kroku každý stav na dva sousední a to s pravděpodobností 2/3 ve směru hodinových ručiček a s pravděpodobností 1/3 ve směru opačném. Stanovte pravděpodobnosti stavů po 4 krocích, jestliže počáteční stav je v jednom pevně vybraném vrcholu. Klasifikujte stavy.



Řešení:
Pokud očíslujeme stavy grafu vzestupně ve směru hodinových ručiček bude odpovídající matice přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} .$$

Graf je symetrický z hlediska všech vrcholů, takže si bez újmy na obecnosti zvolíme jako počáteční stav zvolíme např. stav 1. Počáteční rozdělení pravděpodobnosti tak bude

$$\boldsymbol{p}(0) = (1, 0, 0, 0) .$$

Rozdělení pravděpodobnosti $\boldsymbol{p}(n+1)$ v $n+1-$tém kroku se spočítá pomocí rozdělení pravděpodobnosti $\boldsymbol{p}(n)$ v $n-$tém kroku jako

$$\boldsymbol{p}(n+1) = \boldsymbol{p}(n) \cdot \mathbf{P} .$$

Rozdělení pravděpodobnosti po 4 krocích je tedy

$$\boldsymbol{p}(4) = \boldsymbol{p}(0) \cdot \mathbf{P}^4 .$$

Jednodušší než počítat 4-tou mocninu matice je ale spočítat postupně vektory $\boldsymbol{p}(i)$, protože výpočtů tak uděláme méně:

$$\boldsymbol{p}(1) = \boldsymbol{p}(0) \cdot \mathbf{P} = \left(0, \tfrac{2}{3}, 0, \tfrac{1}{3}\right)$$
$$\boldsymbol{p}(2) = \boldsymbol{p}(1) \cdot \mathbf{P} = \left(\tfrac{4}{9}, 0, \tfrac{5}{9}, 0\right)$$
$$\boldsymbol{p}(3) = \boldsymbol{p}(2) \cdot \mathbf{P} = \left(0, \tfrac{13}{27}, 0, \tfrac{14}{27}\right)$$
$$\boldsymbol{p}(4) = \boldsymbol{p}(3) \cdot \mathbf{P} = \left(\tfrac{41}{81}, 0, \tfrac{40}{81}, 0\right)$$

Jak je vidět, dvojice protilehlých stavů se stále střídají a přitom se jejich pravděpodobnosti stále více vyrovnávají.

Všechny stavy jsou trvalé s periodou 2, což se ukáže tak, že každá uzavřená cesta má sudou délku (indukcí podle délky orientované cesty). Řetězec je nerozložitelný (protože všechny trvalé stavy jsou navzájem propojitelné orientovanými cestami v grafu).

Poznámka: Dá se snadno ověřit, že jediné rozdělení pravděpodobnosti $\boldsymbol{p}$ takové, že $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p} \cdot \mathbf{P}$ (tzv. stacionární rozdělení), je v tomto případě právě jen $\boldsymbol{p} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. Takovéto rozdělení pravděpodobnosti se tedy během kroků nemění. Současně platí, že

$$\left(\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}, 0\right) \cdot \mathbf{P} = \left(0, \tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}\right)$$

$$\left(0, \tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}\right) \cdot \mathbf{P} = \left(\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}, 0\right)$$

takže tato dvě rozdělení $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right)$ a $\left(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ oscilují navzájem mezi sebou, což je způsobeno právě periodou rovnou 2. Také vidíme, ze tato dvě rozdělení NEKONVERGUJÍ ke stacionárnímu rozdělení.

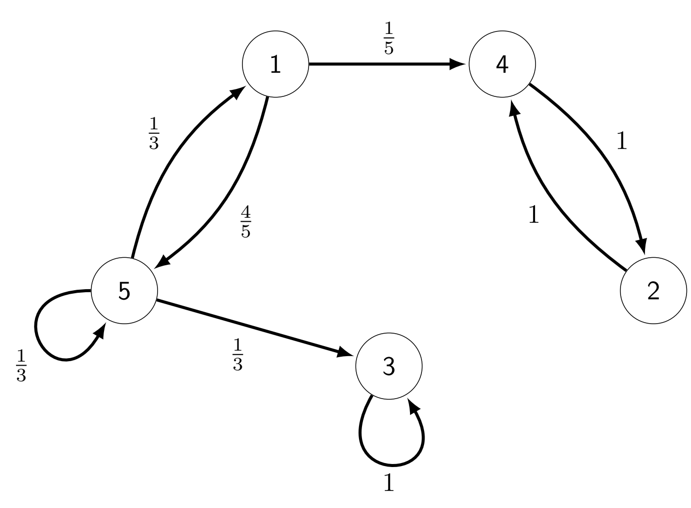
12.5 (Markovovy řetězce - sestavení diagramu, klasifikace stavů, uzavřené množiny)

V Markovově řetězci s následující maticí přechodu P oklasifikujte všechny stavy a najděte všechny uzavřené množiny trvalých stavů.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/5 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Řešení:

Nakreslíme si příslušný orientovaný graf přiřazený matici $\mathbf{P}$:



Z něj už je snadno vidět, že

- stav 3 je trvalý, dokonce absorpční (tudíž má periodu 1),
- stavy 2 a 4 jsou trvalé (s periodou 2) a

- stavy 1 a 5 jsou přechodné.

Všechny uzavřené množiny trvalých stavů (tj. množiny trvalých stavů, ze kterých nevedou ven žádné šipky) jsou

$$\emptyset,\ \{3\},\ \{2,4\},\ \{2,3,4\}\ .$$

Poznámka: Postupné změny rozdělení pravděpodobnosti během jednotlivých kroků si můžeme představovat také tak, že máme k dispozici dané množství kapaliny (o objemu 1), které se přelévá mezi jednotlivými stavy. Přechodné stavy se pak vyznačují tím, že to, co z nich "odteče" do trvalých stavů, se už do nich nevrátí, takže celkové množství kapaliny v těchto stavech se postupně v limitě sníží až k nule.