13. cvičení z PSI

3. - 7. ledna 2017

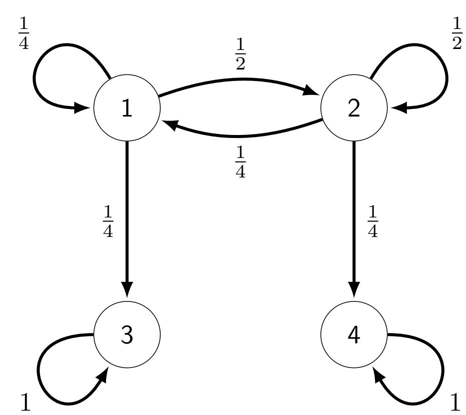
13.1 (Asymptotické pravděpodobnosti stavů)

Najděte asymptotické pravděpodobnosti stavů Markovova řetězce s maticí přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

jestliže počáteční stav je 2.

Řešení:
Příslušný diagram je



Stavy 1 a 2 jsou přechodné, stavy 3 a 4 jsou absorpční. Stavy si přečíslujeme tak, abychom jako první měli ty, co jsou absorpční a teprve za nimi šly ty přechodné, tj. např.

$$1' := 3, \quad 2' := 4, \quad 3' := 1, \quad 4' := 2\ .$$

Tím dostaneme matici

$$\mathbf{P}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{pmatrix},$$

kde

$$\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix},\ \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Počáteční stav je stav číslo 2, čemuž odpovídá počáteční rozdělení pravděpodobnosti

$$\boldsymbol{p}(0) = (0, 1, 0, 0)\ .$$

Pro přečíslované stavy je to stav číslo $4'$ a tedy počáteční rozdělení pravděpodobnosti je

$$\boldsymbol{p}'(0) = (0, 0, 0, 1) \ .$$

Asymptotické rozdělení pravděpodobnosti s počátečním rozdělením $\mathbf{p}'(0)$ je dáno jako

$$\boldsymbol{p}'(\infty) := \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{p}'(n) = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{p}'(0) \cdot (\mathbf{P}')^n \ .$$

Stačí tedy určit

$$(\mathbf{P}')^\infty := \lim_{n\to\infty} (\mathbf{P}')^n = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ (\mathbf{I}_2 - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{R} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \ .$$

Spočítáme příslušnou inverzní matici

$$(\mathbf{I}_2 - \mathbf{Q})^{-1} = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/2 \\ -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}^{-1} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \ ,$$

kde jsme využili jednoduchý způsob uhádnutí inverzní matice typu 2×2 pomocí

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)^{-1} = \tfrac{1}{ad-bc} \left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right) \ .$$

A určíme příslušný součin matic

$$(\mathbf{I}_2 - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

Dostáváme tak

$$(\mathbf{P}')^\infty = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

tudíž

$$\boldsymbol{p}'(\infty) = \boldsymbol{p}'(0) \cdot (\mathbf{P}')^\infty = (0, 0, 0, 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (1/4, 3/4, 0, 0) \ .$$

Po zpětném přečíslování stavů do původních (nečárkovaných) dostaneme asymptotické rozdělení stavů

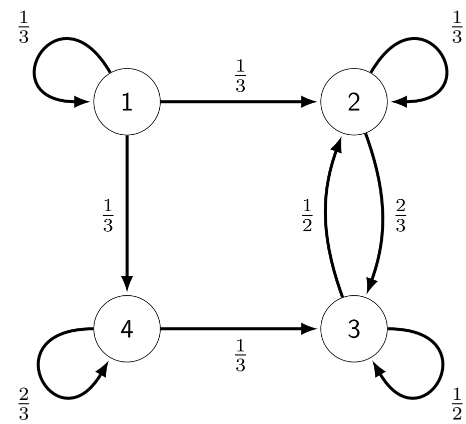
$$\boldsymbol{p}(\infty) = \left(0, 0, \tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}\right) \ .$$

13.2 (Maximálně věrohodné odhady)
Odhadněte stav i Markovova řetězce s maticí přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

z pozorované posloupnosti stavů $(1, i, i, 3)$.

Řešení:
Pro větší názornost si opět nakreslíme diagram:



Stav odhadneme pomocí maximální věrohodnosti

$$L(i) = P\Big(X_0 = 1,\ X_1 = i,\ X_2 = i,\ X_3 = 3\Big).$$

Protože

$$P\Big(X_0 = i_0\ ,\dots,\ X_n = i_n\Big) =$$
$$= P\Big(X_n = i_n \Big| X_0 = i_0\ ,\dots,\ X_{n-1} = i_{n-1}\Big) \cdot P\Big(X_0 = i_0\ ,\dots,\ X_{n-1} = i_{n-1}\Big) =$$
$$= P\Big(X_n = i_n \Big| X_{n-1} = i_{n-1}\Big) \cdot P\Big(X_0 = i_0\ ,\dots,\ X_{n-1} = i_{n-1}\Big) =$$
$$= p_{i_{n-1},i_n} \cdot P\Big(X_0 = i_0\ ,\dots,\ X_{n-1} = i_{n-1}\Big)\ ,$$

dostaneme postupně, že

$$P\Big(X_0 = i_0\ ,\dots,\ X_n = i_n\Big) = P\Big(X_0 = i_0\Big) \cdot p_{i_0,i_1} \cdot p_{i_1,i_2} \cdots p_{i_{n-1},i_n}\ ,$$

kde $p_{j,\ell}$ je prvek matice $\mathbf{P}$ v j-tém řádku a ℓ-tém sloupci.

V našem případě tak máme

$$L(i) = P(X_0 = 1) \cdot p_{1,i} \cdot p_{i,i} \cdot p_{i,3}\ .$$

Hodnotu počáteční pravděpodobnosti $c := P(X_0 = 1)$ sice neznáme, ale ani jí nepotřebujeme k výpočtu (za předpokladu, že byla nenulová). Konkrétní hodnoty L pro jednotlivé stavy tak jsou (obrázek je lepší vodítko než matice):

$$\begin{aligned} L(1) &= c \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{3} \cdot 0 &&= 0 \\ L(2) &= c \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{2}{3} &&= \tfrac{2}{27} \cdot c \\ L(3) &= c \cdot 0 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} &&= 0 \\ L(4) &= c \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{3} &&= \tfrac{2}{27} \cdot c\ . \end{aligned}$$

Stavy, pro které je hodnota věrohodnosti nejvyšší, jsou tedy 2 a 4 (za předpokladu, že $P(X_0 = 1) > 0$, jinak jsou všechny čtyři stavy stejně věrohodné).

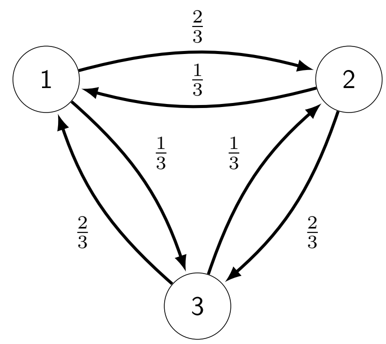
Metoda maximální věrohodnosti nám tak zde poskytuje *více* (stejně dobrých) odpovědí.

13.3 (Stacionární rozdělení)

Najděte všechna stacionární rozdělení pravděpodobnosti stavů Markovova řetězce s maticí přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení:
Pro větší názornost si opět nakreslíme diagram:



Stacionární rozdělení pravděpodobnosti pro matici $\mathbf{P}$ je takový vektor $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$, s nezápornými složkami, pro který platí $\sum_j p_j = 1$ a

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p} \cdot \mathbf{P} \quad \text{neboli} \quad \boldsymbol{p} \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{I}_3) = 0 \ .$$

Ekvivalentní zápis je

$$\mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{p}^T = \boldsymbol{p}^T \quad \text{neboli} \quad (\mathbf{P}^T - \mathbf{I}_3^T) \cdot \boldsymbol{p}^T = 0^T \ .$$

Je tedy třeba najít vlastní vektor matice $\mathbf{P}^T$ pro její vlastní číslo 1.

Pozor! Přechod k transponované matici je nezbytný, pokud budeme při Gaussově eliminaci používat ekvivalentní ŘÁDKOVÉ úpravy soustavy $(\mathbb{A}|0)$. Ta totiž odpovídá rovnici $\mathbb{A}x = 0$, kdy x je SLOUPCOVÝ vektor.

Pomocí Gaussovy eliminace najdeme tudíž řešení soustavy $(\mathbf{P}^T - \mathbf{I}_3^T) \cdot \boldsymbol{p}^T = 0$ reprezentované maticí

$$\mathbf{P}^T - \mathbf{I}_3^T = \begin{pmatrix} -1 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -1 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tato soustava má hodnost 2, tedy má pouze $3 - 2 = 1$ lineárně nezávislých řešení, např. $(1, 1, 1)$. Po jeho znormování pak dostaneme

$$\boldsymbol{p} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) \ .$$

Pozor! NEJEDNÁ se o eukleidovskou normu $\|\boldsymbol{p}\|_2 := \left(\sum_i |p_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, ALE o normu tvaru $\|\boldsymbol{p}\|_1 := \sum_i |p_i|$.

Jedinečnost řešení plyne také z toho, že

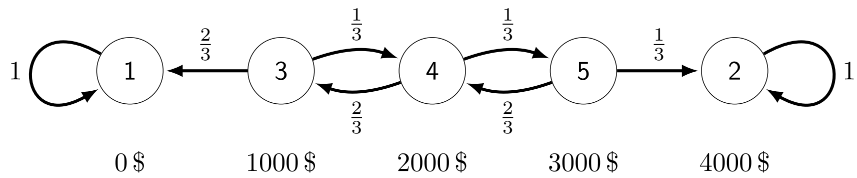
- daný řetězec má všechny stavy *trvalé* a *neperiodické* (tj. ergodické) a
- samotný řetězec je *nerozložitelný* (tj. jediná uzavřená neprázdná množina trvalých stavů je množina *všech* těchto stavů, neboli všechny stavy jsou propojené nějakou cestou, nebo to také prostě můžeme říct tak, že graf má jedinou komponentu souvislosti).

Tyto vlastnosti se dají ihned odvodit z orientovaného grafu výše.

13.4 (Aplikace Markovových řetězců - asymptotické pravděpodobnosti stavů)

Alice hraje v kasinu hru, kde s pravděpodobností 1/3 vyhraje. V každém kole vsadí 1000 dolarů. V případě výhry získá 1000 dolarů, v případě prohry o 1000 dolarů přijde. Alice odejde z kasina, jestliže prohraje všechny své peníze nebo bude mít 4000 dolarů. Jaká je pravděpodobnost, že Alice odejde s prázdnou, měla-li na začátku 3000 dolarů?

Řešení:
Nakreslíme si příslušný orientovaný graf:



Pro Alici uvažujme stavy

1 - odchází s prázdnou, 2 - má 4000 dolarů (a tedy odchází), 3 - má 1000 dolarů, 4 - má 2000 dolarů a 5 - má 3000 dolarů.

Stavy jsme si očíslovali tak, aby první byly ty absorpční a teprve po nich následovali ty přechodné. Na začátku má Alice 3000 dolarů, tedy je ve stavu číslo 5 a počáteční rozdělení pravděpodobnosti tak je

$$\boldsymbol{p}(0) = (0, 0, 0, 0, 1) \ .$$

pravděpodobnost, že Alice odejde s prázdnou odpovídá složce pro stav 1 v asymptotickém rozdělení pravděpodobnosti $\boldsymbol{p}(\infty)$.

Proč tomu tak je: Platí:

- (Podmíněná) pravděpodobnost $P(\underbrace{i \to \cdots \to j}_{n \text{ kroků}})$ toho, že se po *právě* n krocích ze stavu i přesuneme do stavu j je
$$P(\underbrace{i \to \cdots \to j}_{n \text{ kroků}}) = \left(\mathbf{P}^n\right)_{i,j} \ .$$
To se snadno ukáže indukcí.
- Jestliže i_* je *absorpční* stav, pak (podmíněná) pravděpodobnost $P(\underbrace{i \to \cdots \to i_*}_{\leq n \text{ kroků}})$ toho, že se po *nejvýše* n krocích ze stavu i přesuneme do stavu i_* je
$$P(\underbrace{i \to \cdots \to i_*}_{\leq n \text{ kroků}}) = P(\underbrace{i \to \cdots \to i_*}_{n \text{ kroků}}) = \left(\mathbf{P}^n\right)_{i,i_*} \ .$$
To je proto, že jakoukoliv posloupnost kratší než n můžeme nastavit opakovaným přidáním stavu i_* (protože je absorpční).
- Jestliže i_* je *absorpční* stav, pak (podmíněná) pravděpodobnost $P(\underbrace{i \to \cdots \to i_*}_{\text{konečně kroků}})$ toho, že se po *konečně* mnoha krocích ze stavu i přesuneme do stavu i_* je
$$P(\underbrace{i \to \cdots \to i_*}_{\text{konečně kroků}}) = P\Big(\bigcup_n \underbrace{i \to \cdots \to i_*}_{\leq n \text{ kroků}}\Big) = \lim_{n\to\infty} P\Big(\underbrace{i \to \cdots \to i_*}_{\leq n \text{ kroků}}\Big) = \lim_{n\to\infty} \left(\mathbf{P}^n\right)_{i,i_*} = \left(\mathbf{P}^\infty\right)_{i,i_*} \ .$$

A protože $\boldsymbol{p}(\infty) = \boldsymbol{p}(0) \cdot \mathbf{P}^\infty$, můžeme tento závěr ekvivalentně vyjádřit přes rozdělení pravděpodobnosti.

Pro výpočet asymptotického rozdělení pravděpodobnosti si opět zapíšeme matici přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{pmatrix},$$

kde

$$\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Opět si určíme matici

$$\mathbf{P}^\infty := \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ (\mathbf{I}_3 - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{R} & \mathbf{0} \end{pmatrix} .$$

Spočítáme fundamentální matici $\mathbf{F} = \left(\mathbf{I}_3 - \mathbf{Q}\right)^{-1}$:

$$\left(\mathbf{I}_3 - \mathbf{Q} \;\middle|\; \mathbf{I}_3\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & -1/3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \cdots \sim$$

$$\sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 6 & 9 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right) = \left(\mathbf{I}_3 \;\middle|\; \left(\mathbf{I}_3 - \mathbf{Q}\right)^{-1}\right) .$$

Tedy

$$\mathbf{F} = \left(\mathbf{I}_3 - \mathbf{Q}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 0 \\ -2/3 & 1 & -1/3 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 6 & 9 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

a

$$\left(\mathbf{I}_3 - \mathbf{Q}\right)^{-1}\mathbf{R} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 6 & 9 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 14 & 1 \\ 12 & 3 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} .$$

Celkem tedy dostaneme

$$\mathbf{P}^\infty = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 14/15 & 1/15 & 0 & 0 & 0 \\ 12/15 & 3/15 & 0 & 0 & 0 \\ 8/15 & 7/15 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pravděpodobnost, že Alice vše prohraje, pokud na začátku měla 3000 dolarů, nyní odpovídá hodnotě

$$\left(\mathbf{P}^\infty\right)_{5,1} = \frac{8}{15} .$$

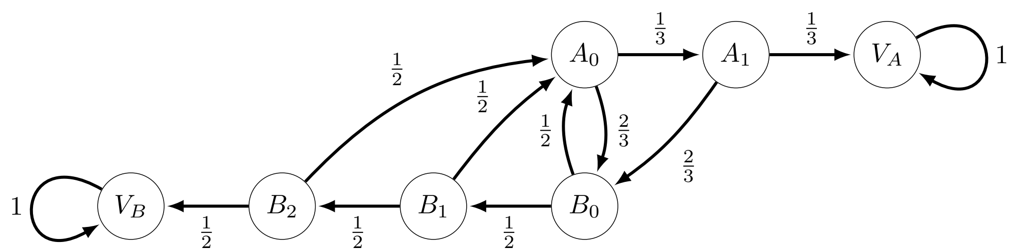
13.5 (Aplikace Markovových řetězců - asymptotické pravděpodobnosti stavů)

Alice trefí terč s pravděpodobností 1/3, Bob s pravděpodobností 1/2. Pokud hráč zasáhne terč, střílí dále, pokud mine, je na řadě druhý hráč. Začíná Alice. Alice vyhrává, pokud trefí terč 2× za sebou, Bob vyhrává, pokud trefí terč 3× za sebou. Pro oba hráče stanovte pravděpodobnosti výhry.

Řešení:
Pokud bychom rozlišovali nejen to, který hráč je na řadě, ale i kolik již má úspěšných pokusů, potřebovali bychom 7 stavů:

- V_A - vyhrála Alice,
- V_B - vyhrál Bob,
- A_i - Alice má právě za sebou i úspěšných pokusů $i \in \{0, 1\}$,
- B_i - Bob má právě za sebou i úspěšných pokusů $i \in \{0, 1, 2\}$.

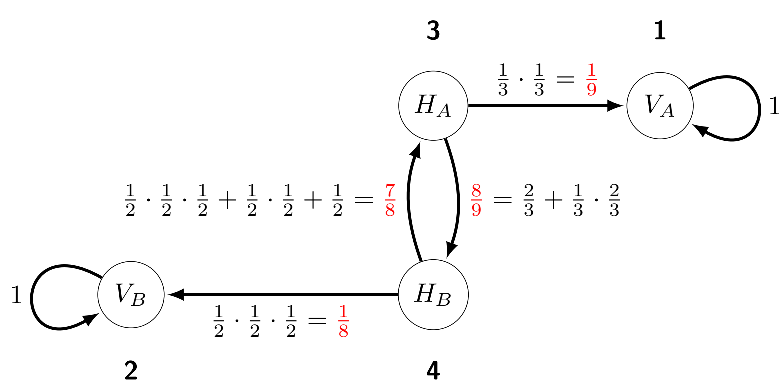
Odpovídající diagram by byl tento:



Protože nás zajímají pouze pravděpodobnosti výhry obou hráčů, můžeme si situaci popsat jednodušším způsobem a to tak, že rozlišíme pouze stavy:

- V_A - vyhrála Alice,
- V_B - vyhrál Bob,
- H_A - na řadě je Alice,
- H_B - na řadě je Bob,

kde celou sérii úspěšných pokusů daného hráče považujeme za jeden krok. Tento krok pak končí výhrou hráče s pravděpodobností $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ pro Alici, $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ pro Boba, nebo se na řadu dostává druhý hráč:



Stavy si opět očíslujeme tak, aby první byly ty absorpční a teprve po nich následovali ty přechodné:

$$1 := V_A \text{ (vyhrála Alice)}, 2 := V_B \text{ (vyhrál Bob)}, 3 := H_A \text{ (na řadě je Alice)}, 4 := H_B \text{ (na řadě je Bob)}.$$

pravděpodobnosti výher Alice a Boba opět zjistíme z asymptotického rozdělení pravděpodobnosti $\boldsymbol{p}(\infty)$ s počátečním rozdělením

$$\boldsymbol{p}(0) = (0, 0, 1, 0) \ .$$

Je tedy opět potřeba spočítat $\mathbf{P}^\infty$ pro matici přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/9 & 0 & 0 & 8/9 \\ 0 & 1/8 & 7/8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{pmatrix},$$

kde

$$\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1/9 & 0 \\ 0 & 1/8 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 8/9 \\ 7/8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Fundamentální matice tohoto řetězce je

$$\mathbf{F} = \big(\mathbf{I}_2 - \mathbf{Q}\big)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -8/9 \\ -7/8 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = (9/2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 8/9 \\ 7/8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/2 & 4 \\ 63/16 & 9/2 \end{pmatrix}$$

a tedy

$$\big(\mathbf{I}_2 - \mathbf{Q}\big)^{-1}\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 9/2 & 4 \\ 63/16 & 9/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/9 & 0 \\ 0 & 1/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 7/16 & 9/16 \end{pmatrix}.$$

Celkem tedy dostaneme

$$\mathbf{P}^\infty = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \big(\mathbf{I}_2 - \mathbf{Q}\big)^{-1}\mathbf{R} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 7/16 & 9/16 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a asymptotické rozdělení tak je

$$\boldsymbol{p}(\infty) = \boldsymbol{p}(0) \cdot \mathbf{P}^\infty = (0, 0, 1, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 7/16 & 9/16 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (1/2, 1/2, 0, 0) \ .$$

Zjistili jsme tak (vcelku překvapivě), že pravděpodobnosti výhry Alice i Boba jsou stejné (a sice $\frac{1}{2}$), pokud bude začínat Alice jako první.

Poznámka: Uvažujme následující obecnější případ. Pro $n, m, a, b \in \mathbb{N}$ předpokládejme, že

- Alice má pravděpodobnost zásahu $\frac{1}{n}$ a k výhře musí mít sérii a úspěšných pokusů a podobně
- Bob má pravděpodobnost zásahu $\frac{1}{m}$ a k výhře musí mít sérii b úspěšných pokusů a dále, že
- $\left(\frac{1}{n}\right)^a < \left(\frac{1}{m}\right)^b$ a proto opět necháme začít Alici.

Kdybychom opět chtěli, aby Alice a Bob měli stejné šance na výhru, zjistíme, že to nastane právě když bude platit

$$n^a - m^b = 1 \ .$$

V rámci teorie čísel se řešeními této rovnice zabýval Eugène Charles Catalan a v roce 1844 vyslovil hypotézu (tzv. Catalan's conjecture), že jediné řešení této rovnice v kladných přirozených číslech je právě jen $3^2 - 2^3 = 1$. Hypotézu potvrdil Preda Mihăilescu v roce 2002.

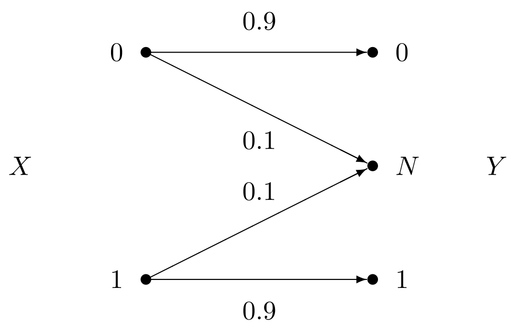
13.6 (Entropie, vzájemná informace)

Informační kanál má přechodový diagram dle obrázku. Je-li na vstupu pravděpodobnost $p_X(0) = 0.2$, určete

(a) entropii vstupu X,

(b) entropii výstupu Y,

(c) vzájemnou informaci mezi vstupem X a výstupem Y.



Řešení:

(a) Veličina X má hodnoty 0 a 1 a pravděpodobnostní funkci

$$p_X(0) = 0.2 \ ,$$
$$p_X(1) = 0.8 \ .$$

Její entropie tedy je

$$H(X) = \sum_i p_X(i) \cdot \log_2 \left(\frac{1}{p_X(i)} \right) =$$
$$= 0.2 \cdot \log_2 \left(\frac{10}{2} \right) + 0.8 \cdot \log_2 \left(\frac{10}{8} \right) = \log_2(5) - 1.6 \doteq 0.7219 \ .$$

(b) Veličina Y má hodnoty 0, N a 1. Určíme její pravděpodobnostní funkci p_Y. Protože budeme ještě počítat vzájemnou informaci $I(X,Y)$, bude výhodnější určit rovnou sdruženou pravděpodobnostní funkci $p_{X,Y}$ a to pomocí podmíněných pravděpodobností $p_{Y|X}(j,i) := P(Y = j|X = i)$ jako

$$p_{X,Y}(i,j) = P(X = i, Y = j) = P(Y = j|X = i) \cdot P(X = i) = p_{Y|X}(j|i) \cdot p_X(i) \ .$$

pravděpodobnostní funkci p_Y pak určíme jako marginální pravděpodob. funkci pro vektor (X,Y).

$p_{Y\|X}(j\|i)$ $\quad j$ / i	0	N	1	$p_X(i)$
0	0.9	0.1	0	0.2
1	0	0.1	0.9	0.8

$p_{X,Y}(i,j)$ $\quad j$ / i	0	N	1	$p_X(i)$
0	0.18	0.02	0	0.2
1	0	0.08	0.72	0.8
$p_Y(j)$	0.18	0.1	0.72	1

Její entropie tedy je

$$H(Y) = \sum_j p_Y(j) \cdot \log_2 \left(\frac{1}{p_Y(j)} \right) = 0.18 \cdot \log_2 \left(\frac{100}{18} \right) + 0.1 \cdot \log_2 \left(\frac{10}{1} \right) + 0.72 \cdot \log_2 \left(\frac{100}{72} \right) =$$

$$= 1.9 \cdot \log_2(5) - 1.8 \cdot \log_2(3) - 0.44 \doteq 1.1187 \ .$$

(c) Vzájemnou informaci $I(X, Y)$ spočítáme např. podle definice

$$I(X, Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y) \ .$$

Určíme proto entropii $H(X, Y)$ diskrétního náhodného *vektoru* (X, Y), která se počítá analogicky jako u kterékoliv jiné diskrétní náhodné *veličiny* s konečně mnoha hodnotami:

$$H(X, Y) = \sum_{i,j} p_{X,Y}(i, j) \cdot \log_2 \left(\frac{1}{p_{X,Y}(i, j)} \right) =$$

$$= 0.18 \cdot \log_2 \left(\frac{100}{18} \right) + 0.02 \cdot \log_2 \left(\frac{100}{2} \right) + 0.08 \cdot \log_2 \left(\frac{100}{8} \right) + 0.72 \cdot \log_2 \left(\frac{100}{72} \right) =$$

$$= 2 \cdot \log_2(5) - 1.8 \cdot \log_2(3) - 0.6 \doteq 1.1909 \ .$$

Pro vzájemnou informaci tak máme

$$I(X, Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y) =$$

$$= \Big(\log_2(5) - 1.6 \Big) + \Big(1.9 \cdot \log_2(5) - 1.8 \cdot \log_2(3) - 0.44 \Big) - \Big(2 \cdot \log_2(5) - 1.8 \cdot \log_2(3) - 0.6 \Big) =$$

$$= 0.9 \cdot \log_2(5) - 1.44 \doteq 0.6497 \ .$$