14. cvičení z PSI

9. - 13. ledna 2017

14.1 (Vzájemná informace)

Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení na množině $\{0,1,2\}$. Náhodná veličina Z má alternativní rozdělení s parametrem $1/10$. Předpokládejme, že obě veličiny X a Z jsou nezávislé.

Položme $Y := X \oplus Z$, kde $\oplus$ je součet modulo 3. Určete vzájemnou informaci veličin X a Y.

Řešení:

Pro vzájemnou informaci použijeme vzorec

$$I(X,Y) = H(Y) - H(Y|X)\,.$$

(bude to jednodušší na výpočet).

Veličina Y nabývá hodnot 0, 1 a 2. Spočítejme $H(Y|X)$. K tomu budeme potřebovat podmíněnou pravděpodobnost $p_{Y|X}(j|i)$. Zřejmě je

$$\Big(Y = j \;\&\; X = i\Big) \;\Leftrightarrow\; \Big(Z = j - i \pmod 3 \;\&\; X = i\Big)$$

takže dostaneme (díky nezávislosti X a Z), že

$$p_{Y|X}(j|i) = \frac{P\big(Y = j,\ X = i\big)}{P\big(X = i\big)} = \frac{P\big(Z = j - i \pmod 3),\ X = i\big)}{P\big(X = i\big)} = P\big(Z = j - i \pmod 3\big)$$

a tudíž

$p_{Y\|X}(j\|i)$ — j / i	0	1	2
0	0.9	0.1	0
1	0	0.9	0.1
2	0.1	0	0.9

Odtud dostaneme

$$H\big(Y|X = i\big) = \sum_j p_{Y|X}(j|i) \cdot \log_2\left(\frac{1}{p_{Y|X}(j|i)}\right) = 0.9 \cdot \log_2\left(\frac{10}{9}\right) + 0.1 \cdot \log_2 10 =$$

$$= \log_2(5) - 1.8 \cdot \log_2(3) + 1 \doteq 0.469$$

pro všechna $i = 0,1,2$ takže

$$H(Y|X) = \sum_i p_X(i) \cdot H\big(Y|X = i\big) = \log_2(5) - 1.8 \cdot \log_2(3) + 1 \doteq 0.469\ .$$

Nyní spočítáme rozdělení náhodné veličiny Y. Zřejmě je $Y = \mathrm{Mix}_{\frac{1}{2}}(X_0, X_1)$, kde $X_0 := X|_{Z=0}$ a $X_1 := \Big(X \oplus 1 \pmod 3\Big)|_{Z=1}$. Obě veličiny X_0 a X_1 mají zřejmě rovnoměrné rozdělení na množině $\{0,1,2\}$ a proto i veličina Y, která je jejich směsí, má také rovnoměrné rozdělení na $\{0,1,2\}$. Proto máme

$$p_Y(0) = p_Y(1) = p_Y(2) = \frac{1}{3}$$

a tudíž entropie veličiny Y je

$$H(Y) = \sum_j p_Y(j) \cdot \log_2 \left(\frac{1}{p_Y(j)} \right) = 3 \cdot \frac{1}{3} \log_2(3) = \log_2(3) \doteq 1.585 \ .$$

Pro vzájemnou informaci tak dostaneme

$$I(X, Y) = H(Y) - H(Y|X) = \log_2(3) - \Big(\log_2(5) - 1.8 \cdot \log_2(3) + 1 \Big) =$$

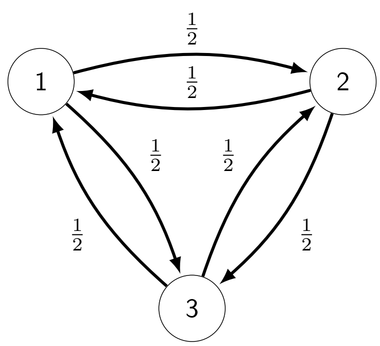
$$= 2.8 \cdot \log_2(3) - \log_2(5) - 1 \doteq 1.116 \ .$$

14.2 (Rychlost entropie)

Žába skáče mezi třemi kameny. V každém kroku skočí na jeden ze dvou sousedních kamenů s pravděpodobností 1/2. Určete rychlost entropie stacionárního procesu, který zaznamenává její pohyb.

Řešení:

Nakreslíme si diagram:



Jedná se o markovský řetězec s maticí

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} .$$

Rozdělení stacionárního procesu $\boldsymbol{p}$ snadno uhádneme i bez počítání - řetězec je ergodický, takže stacionární rozdělení je jen jedno a vzhledem k symetričnosti všech vrcholů budou všechny pravděpodobnosti stejné, tedy $\boldsymbol{p} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ (což lze teď už snadno ověřit).

Rychlost entropie je pak určena jako:

$$H\Big((X_n)_{n \in \mathbb{N}} \Big) = H(X_2|X_1) \ .$$

Máme tedy

$$H(X_2|X_1) = \sum_{i=1}^{3} p_{X_1}(i) \cdot H(X_2|X_1 = i) = \sum_{i=1}^{3} p_i \cdot H(X_2|X_1 = i) \ ,$$

kde p_i je i-tá složka vektoru $\boldsymbol{p}$. Dále je

$$H(X_2|X_1 = i) = -\sum_{j=1}^{3} p_{X_2, X_1}(j|i) \cdot \log_2 \Big(p_{X_2, X_1}(j|i) \Big) =$$

$$= -\sum_{j=1}^{3} p_{i,j} \cdot \log_2\left(p_{i,j}\right) = 0 \log 0 + \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{2}\log 2 = 1$$

kde $p_{i,j}$ je příslušný prvek matice $\mathbf{P}$.

Celkem tedy dostáváme, že rychlost entropie stacionárního procesu je

$$H\Big((X_n)_{n\in\mathbb{N}}\Big) = \sum_{i=1}^{3} p_i \cdot 1 = 1 \ .$$

14.3 (Hledání kódů - Shannonův a Huffmanův)

Pro informační zdroj X zadaný pravděpodobnostmi dle tabulky

znak i	a	b	c	d
$p_X(i)$	0.15	0.25	0.15	0.45

nalezněte binární Shannonův kód, binární Huffmanův kód a srovnejte jejich střední kódové délky.

Řešení:

Máme tedy náhodnou veličinu $X : \Omega \to \{a, b, c, d\}$. Pro konstrukci Shannonova binárního kódu

$$C_S : \{a, b, c, d\} \to \{0, 1\}^*$$

potřebujeme znát délky jeho slov. Ty jsou dány vztahem

$$\ell_z = \left\lceil \log_2\left(\frac{1}{p_X(z)}\right)\right\rceil$$

pro $z \in \{a, b, c, d\}$.

Tedy

znak z	a	b	c	d
$p_X(z)$	0.15	0.25	0.15	0.45
ℓ_z	$\lceil \log_2 \frac{100}{15} \rceil = 3$	$\lceil \log_2 \frac{100}{25} \rceil = 2$	$\lceil \log_2 \frac{100}{15} \rceil = 3$	$\lceil \log_2 \frac{100}{45} \rceil = 2$

Shannonův algoritmus spočívá v použití konstrukce instantního kódu pro zadané délky ℓ_z. Slova hledáme v binárním stromě hloubky

$$\max\{\ell_z \mid z \in \{a, b, c, d\}\} = 3 \ .$$

Shannonův algoritmus:

- Znaky z abecedy $\Lambda = \{x_1, \ldots, x_n\}$ si očíslujeme podle jejich vzrůstající délky ℓ_{x_i} tj.

$$\ell_{x_1} \leq \cdots \leq \ell_{x_n} \ .$$

- Pro $k = 1, \ldots, n$:

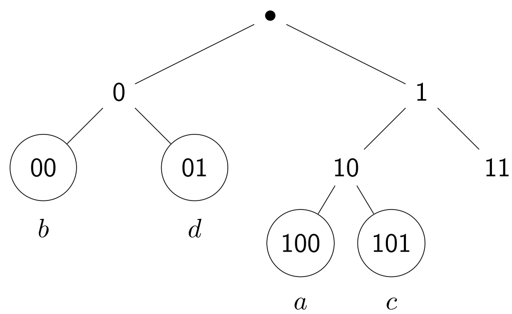
  V (aktuálním tvaru) stromu najdeme (libovolné) kódové slovo u_k, pro které je $\ell(u_k) = \ell_{x_k}$, a zahodíme všechna kódová slova, která po něm ve stromě následují (tj. všechna, ve kterých je toto slovo jejich prefixem). Položíme $C_S(x_k) := u_k$.

Díky splnění Kraftovy nerovnosti (pro binární kódování)

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{\ell_{x_i}} \leq 1$$

(protože $\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{\ell_{x_i}} \leq \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{-\log_2 p_X(x_i)} = \sum_{i=1}^{n} p_X(x_i) = 1$) tento algoritmus vždy proběhne celý.

V našem případě dostaneme např. kód:



znak z	a	b	c	d
$C_S(z)$	100	00	101	01

Jeho střední délka pak je

$$L_X(C_S) = E\Big(\ell \circ C_S \circ X\Big) = \sum_{z \in \{a,b,c,d\}} p_X(z) \cdot \ell\Big(C_S(z)\Big) =$$

$$= 0.15 \cdot 3 + 0.25 \cdot 2 + 0.15 \cdot 3 + 0.45 \cdot 2 = 2.3\ .$$

Huffmanův binární kód

$$C_H : \{a, b, c, d\} \to \{0, 1\}^*$$

vznikne Huffmanovým algoritmem, kde kódová slova konstruujeme postupně:

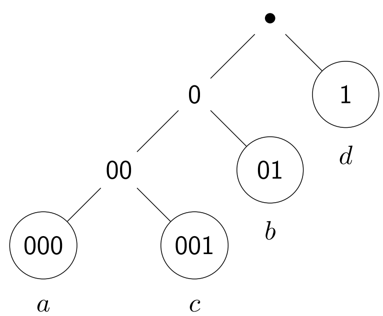
- Z prvků abecedy $\Lambda = \{x_1, \ldots, x_n\}$ vytvoříme množiny $S_1 = \{x_1\}, \ldots, S_n = \{x_n\}$ a položíme $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_n\}$ a $P(S_k) := p_X(x_k)$ pro $k = 1, \ldots, n$. Všem prvkům z Λ přiřadíme prázdná kódová slova.
- Dokud $\mathcal{S}$ není jednoprvková:
  - najdeme množiny $S, S' \in \mathcal{S}$, $S \neq S'$ s nejnižšími pravděpodobnostmi $P(S)$, $P(S')$,
  - všem prvkům z S připíšeme ke kódovým slovům na *začátek* slova bit 0 a podobně všem prvkům z S' připíšeme na *začátek* kódového slova bit 1,
  - položíme $P(S \cup S') := P(S) + P(S')$,
  - ze systému $\mathcal{S}$ vypustíme množiny S a S' a místo nich tam přidáme jedinou množinu $S \cup S'$.
- Každému $x_i \in \Lambda$ přiřadíme kódové slovo $C_H(x_i)$, které vzniklo postupným připisováním bitu.

Konkrétní průběh může v našem případě vypadat např. takto:

kód	S	$P(S)$	S	$P(S)$	S	$P(S)$
1	$\{d\}$	0.45	$\{d\}$	0.45	$\{a,b,c\}$	0.55
01	$\{b\}$	0.25	$\{a,c\}$	0.3	$\{d\}$	0.45
000	$\{a\}$	0.15	$\{b\}$	0.25		
001	$\{c\}$	0.15				

tedy:

znak z	a	b	c	d
$C_H(z)$	000	01	001	1



Tento výsledek je jedním z možných. Střední délka tohoto kódu (určená jednoznačně) pak je

$$L_X(C_H) = E\Big(\ell \circ C_H \circ X\Big) = \sum_{i \in \{a,b,c,d\}} p_X(i) \cdot \ell\Big(C_H(i)\Big) =$$

$$= 0.15 \cdot 3 + 0.25 \cdot 2 + 0.15 \cdot 3 + 0.45 \cdot 1 = 1.85\ .$$

Srovnáním středních délek zjistíme, že Huffmanův kód (který je optimální) je v tomto případě kratší než Shannonův

$$L_X(C_S) = 2.3 > 1.85 = L_X(C_H)\ .$$

Můžeme se ještě podívat, jestli střední délka Huffmanova kódu dosáhla spodního odhadu, kterým je entropie $H(X)$ veličiny X:

$$H(X) = \sum_{z \in \{a,b,c,d\}} p_X(z) \cdot \log_2\left(\frac{1}{p_X(z)}\right) =$$

$$= 0.15 \cdot \log_2\left(\frac{100}{15}\right) + 0.25 \cdot \log_2\left(\frac{100}{25}\right) + 0.15 \cdot \log_2\left(\frac{100}{15}\right) + 0.45 \cdot \log_2\left(\frac{100}{45}\right) =$$

$$= 2 + 0.75 \cdot \log_2(5) - 1.2 \cdot \log_2(3) \doteq 1.83949\ .$$

Jak je tedy vidět, střední délka optimálního kódu nedosahuje meze dané entropií

$$L_X(C_H) = 1.85 > 1.83949 \doteq H(X)\ .$$

14.4 (Vlastnosti kódování, Huffmanův kód)

Jsou zadány binární kódy (posloupnostmi kódových slov):

(a) $(0, 01, 11)$,

(b) $(0, 01, 11, 11011)$,

(c) $(0, 10, 110, 1110)$,

(d) $(0, 10, 1110, 1111)$,

(e) $(0, 10, 110, 1110, 1111)$.

U každého kódu určete,

- zda je jednoznačně dekódovatelný,
- zda je instantní,
- zda může být Huffmanův; v takovém případě najděte nějaké pravděpodobnosti znaků, pro které by to byl Huffmanův kód.

Všechny odpovědi zdůvodněte.

Řešení:
Připomeňme si, že pro konečnou abecedu Λ se (binární) kódování $C : \Lambda \to \{0,1\}^*$ nazývá:

- *nesingulární* $\Leftrightarrow$ zobrazení C je prosté.
- *jednoznačně dekódovatelné* $\Leftrightarrow$ zobrazení $C^* : \Lambda^* \to \{0,1\}^*$, které je (jednoznačným) rozšířením zobrazení C, je prosté (tj. každé zakódované slovo můžeme jednoznačně dekódovat).
- *instantní* $\Leftrightarrow$ žádné kódové slovo $C(x)$ není počátečním úsekem kódového slova $C(x')$ pro $x, x' \in \Lambda$, $x \neq x'$.

Mějme navíc náhodnou veličinu $X : \Omega \to \Lambda$ (která představuje zdroj znaků abecedy Λ). Střední délka kódu $L_X(C)$ (vzhledem k X) je definována jako

$$L_X(C) := E(\ell \circ C \circ X) ,$$

kde $\ell : \{0,1\}^* \to \mathbb{N}_0$ udává vždy délku daného slova.
Pro jednoznačně dekódovatelné kódy pak vždy platí, že

$$L_X(C) \geq H(X) .$$

Kódování C se dále nazývá:

- *optimální* $\Leftrightarrow$ je jednoznačně dekódovatelné a má (vzhledem k X) nejmenší možnou střední délku L_X mezi všemi jednoznačně dekódovatelnými kódy.
- *Huffmanovo* $\Leftrightarrow$ jestliže vznikne z Huffmanova algoritmu pro nějakou náhodnou veličinu X.

Připomeňme si vztahy mezi jednotlivými vlastnostmi kódování:

Huffmanovo $\Rightarrow$ optimální instantní $\Rightarrow$ instantní $\Rightarrow$ jednoznačně dekódov. $\Rightarrow$ nesingulární

Dále platí:

Věta: Pro *optimální instantní* kód C sestrojený pro veličinu X platí:

(i) Pokud $p_X(x) > p_X(y)$, pak $\ell\big(C(x)\big) \leq \ell\big(C(y)\big)$.

(ii) Dvě nejméně pravděpodobná kódová slova mají stejnou délku.

Jeli kód navíc binární, pak:

(iii) V kódovém stromě pro C má každý list přiřazeno kódové slovo.

Důkaz těchto vlastností je jednoduchý a spočívá v tom, že v opačných případech můžeme snadno vyrobit kód s kratší střední délkou.

(a) Kód není instantní (a tedy ani Huffmanův), protože první kódové slovo je prefixem druhého. Mohl by ale být jednoznačně dekódovatelný.

Ukázat, že kód $C : \Lambda \to \{0,1\}^*$ je jednoznačně dekódovatelný znamená ověřit, že pro každé zakódované slovo $u \in C^*(\Lambda^*)$ existuje *právě jeden* znak $x \in \Lambda$ a nějaké slovo $w \in \Lambda^*$, že

$$u = C(x)C^*(w) \ .$$

Pokud by nám toto ověřování někde selhalo, dostaneme současně i příklad slova, které je výsledkem dvou různých způsobů zakódování.

Označme si znaky z abecedy $\Lambda = \{a, b, c\}$. Máme tedy $C(a) = 0$, $C(b) = 01$ a $C(c) = 11$. Vezměme si nyní binární posloupnost $u \in C^*(\Lambda^*)$.

- Pokud slovo u začíná bitem 1, pak nutně musí jako prefix mít kódové slovo $C(c) = 11$ (žádné jiné kódové slovo na začátku nemá bit 1).
- Pokud slovo u začíná bitem 0 a následující bit je buď 0 nebo prázdný, pak nutně musí jako prefix mít kódové slovo $C(a) = 0$.
- Konečně, pokud slovo u začíná bitem 0 a následujících $k \in \mathbb{N}$ bitů jsou samé bity 1 a za nimi je buď bit 0 nebo prázdný bit, pak jsou pouze dvě možnosti:

$$k = 2m + 1 \text{ pro } m \geq 0 \quad \text{a} \quad u = 01\underbrace{|11|\dots|11|}_{2m \text{ bitů } 1}v \quad \text{nebo}$$

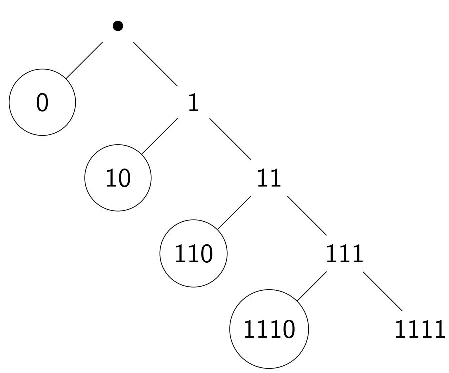
$$k = 2m \text{ pro } m \geq 1 \quad \text{a} \quad u = 0\underbrace{|11|\dots|11|}_{2m \text{ bitů } 1}v$$

  kde slovo v je v obou případech buď prázdné nebo začínající bitem 0. Oba případy ale zřejmě představují *různá* zakódována slova, kde v prvním případě je jediný možný prefix $C(b) = 01$ a ve druhém je to prefix $C(a) = 0$.

Ukázali jsem tak, že kód je jednoznačně dekódovatelný.

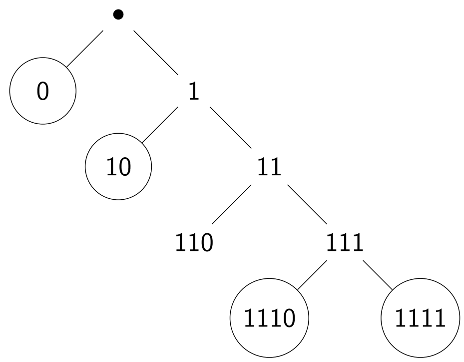
(b) Kód není jednoznačně dekódovatelný (a tedy ani instantní ani Huffmanův), protože např. kódové slovo 11011 lze rozdělit jako 11|0|11.

(c) Kód je instantní (a tedy i jednoznačně dekódovatelný), ale není Huffmanův, protože není optimální. Nejdelší délku 4 má totiž jen jediné kódové slovo (takže nějaký list v kódovém stromě není využit):



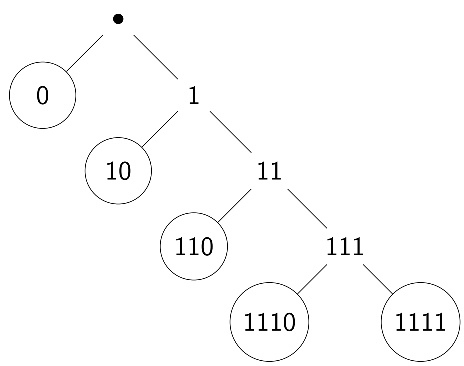
Kód by šel zkrátit nahrazením slova 1110 slovem 111 (pak už to bude i Huffmanův kód - viz postup v bodě (e)).

(d) Kód je instantní (a tedy i jednoznačně dekódovatelný), ale není Huffmanův. Nevyužívá totiž všechny listy v kódovém stromě, konkrétně neobsahuje slovo 110:



Kód by mohl být zkrácen např. na $(0, 10, 110, 111)$ (a stále by byl instantní a dokonce pak i Huffmanův - viz postup v bodě (e)).

(e) Kód je instantní (a tedy i jednoznačně dekódovatelný). Má následující kódový strom:



který je typický pro (ty nejjednodušší) Huffmanovy kódy. Zkusíme proto najít vhodné pravděpodobnosti. Huffmanův kód musí být optimální, takže jeho střední délka (vzhledem ke zvolené náhodné veličině $X : \Omega \to \Lambda$ a jejím pravděpodobnostem $p_X(z)$, $z \in \Lambda$) musí být nejmenší. Víme, že platí spodní odhad této střední délky:

$$\sum_{z \in \Lambda} p_X(z) \cdot \ell\big(C(z)\big) = L_X(C) \geq H(X) = \sum_{z \in \Lambda} p_X(z) \cdot \log_2 \left(\frac{1}{p_X(z)} \right)$$

Pokud tedy položíme

$$\ell\big(C(z)\big) = \log_2 \left(\frac{1}{p_X(z)} \right)$$

neboli

$$p_X(z) = \left(\frac{1}{2} \right)^{\ell\left(C(z)\right)}$$

a přitom bude splněno také, že

$$\sum_{z\in\Lambda}\left(\frac{1}{2}\right)^{\ell\left(C(z)\right)} = 1\ ,$$

budou tyto hodnoty $p_X(z)$ skutečně pravděpodobnostmi nějaké veličiny X a příslušný kód bude optimální (protože bude dosaženo spodní hranice).

V našem případě to skutečně bude splněno a uvedené pravděpodobnosti jsou po řadě

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16}\ \text{ a }\ \frac{1}{16}\ .$$

Teď ještě potřebujeme ověřit, že kód vznikne jako jeden z možných výstupů Huffmanova algoritmu. Jediné nejednoznačnosti v Huffmanově algoritmu vznikají ve chvíli, když

- je více dvojic S, S' podmnožin znaků, které mají nejnižší pravděpodobnosti a/nebo když
- si máme vybrat, u které z množin S a S' budeme na začátky kódových slov připisovat bit 0 a u které bit 1.

Huffmanův algoritmus proto budeme provádět takovým způsobem (ve chvíli, kdy se nabídne více variant), abychom obdrželi požadované kódování. Znaky původní abecedy si označme po řadě jako x_1, x_2, x_3, x_4 a x_5:

kód	S	$P(S)$	S	$P(S)$	S	$P(S)$	S	$P(S)$
0	$\{x_1\}$	0.5	$\{x_1\}$	0.5	$\{x_1\}$	0.5	$\{x_1\}$	0.5
10	$\{x_2\}$	0.25	$\{x_2\}$	0.25	$\{x_2\}$	0.25	$\{x_2,\dots,x_5\}$	0.5
110	$\{x_3\}$	0.125	$\{x_3\}$	0.125	$\{x_3,x_4,x_5\}$	0.25		
1110	$\{x_4\}$	0.0625	$\{x_4,x_5\}$	0.125				
1111	$\{x_5\}$	0.0625						

Kód je tedy opravdu Huffmanův.

14.5 (Jednoznačná dekódovatelnost)
Pro informační zdroj nad abecedou $\Lambda = \{a, b, c, d, e, f\}$ byl nalezen kód C:

znak	kód
a	001
b	1001
c	0010
d	1110
e	1010
f	01110

Je jednoznačně dekódovatelný?

Řešení:
Jednoznačná dekódovatelnost plyne snadno z instantnosti. Bohužel kód C instantní není, protože kódové slovo $C(a) = 001$ je prefixem kódového slova $C(c) = 0010$. Mohl by ale přesto být jednoznačně dekódovatelný.

Ukázat, že kód $C : \Lambda \to \{0,1\}^*$ je jednoznačně dekódovatelný znamená ověřit, že pro každé dva znaky $x, x' \in \Lambda$ a pro každá dvě slova $w, w' \in \Lambda^*$ platí

$$C(x)C^*(w) = C(x')C^*(w') \quad \Rightarrow \quad x = x' \ .$$

Pokud nám toto ověřování někde selže, dostaneme současně i příklad slova, které je výsledkem dvou různých způsobů zakódování. Následující tvrzení nám usnadní situaci.

Tvrzení: Nechť nějaký znak $x_0 \in \Lambda$ je takový, že pro každý jiný znak $x \in \Lambda$, $x \neq x_0$ platí, že ani $C(x)$ není prefixem pro $C(x_0)$ ani $C(x_0)$ není prefixem pro $C(x)$.
Pokud tedy nyní pro takovýto znak x_0 máme

$$C(x_0)C^*(w) = C(x)C^*(w') \ ,$$

pro nějaký znak $x \in \Lambda$ a nějaká slova $w, w' \in \Lambda^*$ pak zřejmě musí být $x_0 = x$.

Znaky $b, d, e, f \in \Lambda$ zřejmě splňují předpoklady výše uvedeného tvrzení. Pokud tudíž hledáme nějaké zakódované slovo $u \in C^*(\Lambda^*)$, které bude porušovat jednoznačnost zakódování, musí toto slovo začínat jen prefixy $C(a) = 001$ a $C(c) = 0010$. Takové zakódované slovo teď už snadno najdeme, např.

$$C(a)C(f) = 001\big|01110 = 0010\big|1110 = C(c)C(d) \ .$$

Kód tedy není jednoznačně dekódovatelný.

14.6 (Blokové kódování)

Bezpaměťový binární zdroj informace dává znak 0 s pravděpodobností 0.9, znak 1 s pravděpodobností 0.1. Navrhněte blokový Huffmanův kód, který kóduje trojice vstupních znaků, vypočtěte střední délku výstupního kódu na jeden bit vstupu a porovnejte ji s teoretickým minimem pro tento zdroj informace.

Řešení:
Abeceda Λ je tedy tvořena všemi trojicemi složenými ze znaků 0 a 1. Má tedy 8 prvků s následujícími pravděpodobnostmi:

blok znaků	pravděpodobnost
$x_1 = 000$	$0.9 \cdot 0.9 \cdot 0.9 \ = \ 0.729$
$x_2 = 001$	$0.9 \cdot 0.9 \cdot 0.1 \ = \ 0.081$
$x_3 = 010$	$0.9 \cdot 0.1 \cdot 0.9 \ = \ 0.081$
$x_4 = 100$	$0.1 \cdot 0.9 \cdot 0.9 \ = \ 0.081$
$x_5 = 011$	$0.9 \cdot 0.1 \cdot 0.1 \ = \ 0.009$
$x_6 = 101$	$0.1 \cdot 0.9 \cdot 0.1 \ = \ 0.009$
$x_7 = 110$	$0.1 \cdot 0.1 \cdot 0.9 \ = \ 0.009$
$x_8 = 111$	$0.1 \cdot 0.1 \cdot 0.1 \ = \ 0.001$

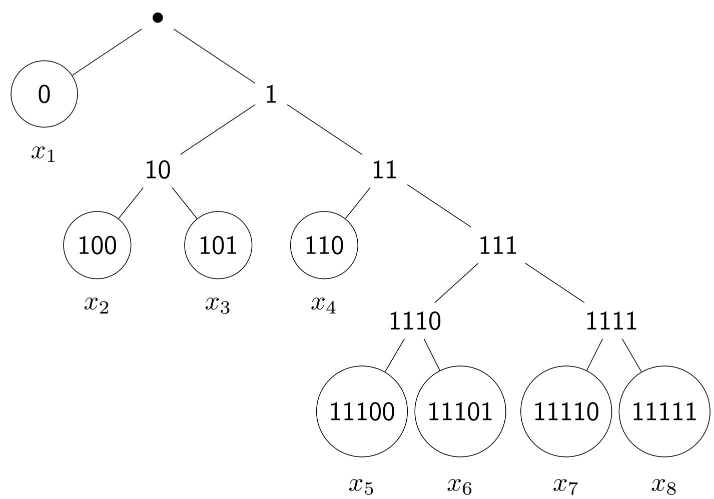
Provedeme Huffmanův algoritmus (pro úsporu místa píšeme **i** místo x_i):

kód	S	$P(S)$	S	$P(S)$	S	$P(S)$	S	$P(S)$	S	$P(S)$	S	$P(S)$	S	$P(S)$
0	**1**	0.729	**1**	0.729	**1**	0.729	**1**	0.729	**1**	0.729	**1**	0.729	**1**	0.729
100	**2**	0.081	**2**	0.081	**2**	0.081	**2**	0.081	**4-8**	0.109	**2,3**	0.162	**2-8**	0.271
101	**3**	0.081	**3**	0.081	**3**	0.081	**3**	0.081	**2**	0.081	**4-8**	0.109		
110	**4**	0.081	**4**	0.081	**4**	0.081	**4**	0.081	**3**	0.081				
11100	**5**	0.009	**7,8**	0.01	**5,6**	0.018	**5-8**	0.028						
11101	**6**	0.009	**5**	0.009	**7,8**	0.01								
11110	**7**	0.009	**6**	0.009										
11111	**8**	0.001												

Dostáváme jeden z možných Huffmanových kódů:

blok znaků	pravděpodobnost	kód
$x_1 = 000$	0.729	0
$x_2 = 001$	0.081	100
$x_3 = 010$	0.081	101
$x_4 = 100$	0.081	110
$x_5 = 011$	0.009	11100
$x_6 = 101$	0.009	11101
$x_7 = 110$	0.009	11110
$x_8 = 111$	0.001	11111

s kódovým stromem:



Původní náhodná veličina je $X : \Omega \to \{0, 1\}$ a odpovídající “blokovou” náhodnou veličinu označme jako $\widetilde{X} : \Omega \to \Lambda$. Trojice na vstupu jsou reprezentovány kódem se střední délkou

$$L_{\widetilde{X}}(C_H) = \sum_{i=1}^{8} p_{\widetilde{X}}(x_i) \cdot \ell\Big(C_H(x_i)\Big) =$$

$$= 0.729 \cdot 1 + 3 \cdot (0.081 \cdot 3) + 3 \cdot (0.009 \cdot 5) + 0.001 \cdot 5 = 1.598 \ .$$

Porovnáme tuto hodnotu ještě se spodním odhadem tvořeným entropií veličiny $\widetilde{X}$, kde $p = 0.1$ a $n = 3$:

$$H(\widetilde{X}) = \sum_{z \in \Lambda} p_{\widetilde{X}}(z) \cdot \log_2 \left(\frac{1}{p_{\widetilde{X}}(z)} \right) = -\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \cdot \log_2 \Big(p^i (1-p)^{n-i} \Big) =$$

$$= -\log_2(p) \left(\sum_{i=0}^{n} i \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \right) - \log_2(1-p) \left(\sum_{i=0}^{n} (n-i) \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \right) =$$

$$= -\log_2(p) \cdot E\big(\mathrm{Bi}(n,p)\big) - \log_2(1-p) \cdot E\big(\mathrm{Bi}(n, 1-p)\big) =$$

$$= n\Big(-p \log_2(p) - (1-p) \log_2(1-p) \Big) = n \cdot H(X) \ .$$

Dostáváme tak

$$L_{\widetilde{X}}(C_H) \geq H(\widetilde{X}) = n \cdot H(X)$$

neboli

$$\frac{L_{\widetilde{X}}(C_H)}{n} \geq H(X)\ ,$$

což znamená, že střední délka optimálního (a tedy i libovolného) blokového kódu pro $\widetilde{X}$ vztažená na 1 vstupní binární znak je opět zespodu omezena entropií původní veličiny X.

Číselně je to nyní takto

$$L_{\widetilde{X}}(C_H)/3 = 1.598/3 \doteq 0.533$$

a

$$H(X) = H(0.9, 0.1) = -0.9\ \log 0.9 - 0.1\ \log 0.1 \doteq 0.469\,.$$