2. cvičení z PSI

10. - 14. října 2016

2.1 (Laplaceova definice pravděpodobnosti)

Do výtahu 8-patrové budovy nastoupilo 5 osob. Každá z nich vystoupí se stejnou pravděpodobností v libovolném poschodí nezávisle na ostatních osobách. Jaká je pravděpodobnost, že

(a) všichni lidé vystoupí v 6. poschodí,

(b) všichni lidé vystoupí ve stejném poschodí,

(c) každý vystoupí v jiném poschodí?

Řešení:

Pravděpodobnost daného jevu je definována podle Laplace jako

$$p = \frac{\textit{počet příznivých možností}}{\textit{počet všech možností}} \ .$$

Všechny možnosti můžeme popsat jako uspořádané 5-tice nad 8 prvky, tj. jako prvky množiny množiny

$$\Omega = \{(a_1, \ldots, a_5) \mid a_i \in \{1, \ldots, 8\}\} \ .$$

Všech možností je tak $|\Omega| = 8^5$. Pro jev $A \subseteq \Omega$ tak máme $p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ (tj. podíly počtů prvků daných množin).

(a) Jev je popsán jako $A = \{(6, 6, 6, 6, 6)\}$ a tedy

$$P(A) = \frac{1}{8^5} \ .$$

(b) Jev je popsán jako $A = \{(1, 1, 1, 1, 1), \ldots, (8, 8, 8, 8, 8)\}$ a tedy

$$P(A) = \frac{8}{8^5} = \frac{1}{8^4} \ .$$

(c) Jev popíšeme jako $A = \{(a_1, \ldots, a_5) \in \Omega \mid a_i \textit{ jsou navzájem různé}\}$. Počet příznivých možností je tedy počet všech variací 5-té třídy nad 8 prvky bez opakování. Takže

$$P(A) = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{8^5} = \frac{7 \cdot 3 \cdot 5}{8^3} = \frac{105}{512} \ .$$

2.2 (Laplaceova definice pravděpodobnosti)

Mějme $n \geq 1$ krabic a mějme $n + k \geq 1$ koulí, kde $k \in \mathbb{Z}$. Všechny tyto koule rozmístíme náhodně do krabic. Jaká je pravděpodobnost toho, že první krabice zůstala prázdná? K čemu se tato hodnota blíží při $n \to \infty$ (a pevném k)?

Řešení:
Každou kouli z $n+k$ umístíme do jedné z n krabic. Počet všech umístění jsou tedy variace $(n+k)$-té třídy z n prvků s opakováním, tj. n^{n+k}. Podobně počet umístění vynechávající 1. krabici je $(n-1)^{n+k}$. Pravděpodobnost tak je

$$p = \frac{(n-1)^{n+k}}{n^{n+k}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n+k}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e} \ .$$

Pokud tedy máme velmi mnoho předmětů, které umisťujeme do srovnatelně velkého počtu pozic (tj. $|k| << n$, kde k může být i záporné), pak pravděpodobnost, že danou pozici vynecháme, je přibližně $e^{-1} \doteq 0.368$.

2.3 (výběr bez vracení)

V urně je n bílých a m černých koulí, kde $m \geq n$. Provedeme n-krát výběr dvou koulí bez vracení. Určete pravděpodobnost toho, že pokaždé se vytáhnou dvě koule různých barev.

Řešení:
Ve výsledném tahu koule sice rozlišujeme jen podle barev, ale na fyzickém počtu koulí jednotlivých barev samozřejmě záleží. Proto budeme během výpočtu jednotlivé koule rozlišovat. Nechť K je množina všech koulí. Jako množinu všech možných výsledků (tj. jevové pole) si (kvůli jednoduššímu výpočtu) zvolíme

$$\Omega = \{(D_1, \ldots, D_n) \mid D_i \textit{ jsou navzájem disjunktní podmnožiny množiny } K\} \ .$$

Množiny představují jednotlivé výběry dvou koulí. Kvůli jednoduššímu výpočtu uvažujeme také uspořádaný výběr, kdy záleží na tom, kterou dvojicí koulí kdy vytáhneme.

(Rozmyslete si, že pokud bychom nerozlišovali pořadí, výsledná pravděpodobnost bude stejná! Jen výpočet by byl náročnější...)

Postupným vybíráním 2 kouli tak zřejmě pro počet prvků Ω máme vztah

$$|\Omega| = \binom{m+n}{2} \cdot \binom{m+n-2}{2} \cdot \binom{m+n-4}{2} \cdots \binom{m+n-2(n-2)}{2} \cdot \binom{m+n-2(n-1)}{2} =$$

$$= \frac{(m+n)!}{(m+n-2)! \cdot 2!} \cdot \frac{(m+n-2)!}{(m+n-4)! \cdot 2!} \cdots \frac{(m+n-2(n-2))!}{(m+n-2(n-1))! \cdot 2!} \cdot \frac{(m+n-2(n-1))!}{(m+n-2n)! \cdot 2!} =$$

$$= \frac{(m+n)!}{(m-n)! \cdot 2^n} = \binom{m+n}{2n} \frac{(2n)!}{2^n} \ .$$

Výsledek jsem mohli dostat také tak, že z $m+n$ koulí jich vybereme $2n$ a ty pak uspořádáme. Přitom ztotožníme ty $2n$-tice, které dostaneme prohozením sousedních koulí na místech $2i+1$ a $2i$ (kde $i = 1, \ldots, n$).

Nechť $A \subseteq \Omega$ je jev, kdy vždy vybereme dvě koule různých barev. Prvky A si můžeme tedy jednoznačně vyjádřit jako n-tici bílých koulí (těch je $n!$) a n-tici černých koulí (těch je $\frac{m!}{(m-n)!}$). Tudíž máme

$$|A| = n! \cdot \frac{m!}{(m-n)!} \ .$$

A pravděpodobnost tak je

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{n! \cdot m! \cdot 2^n}{(m+n)!} = \frac{2^n}{\binom{m+n}{n}} \ .$$

2.4 (výběr bez vracení)

Série, kterou tvoří 100 výrobků, obsahuje 5% vadných součástek. Jestliže je při kontrole mezi 5 náhodně vytaženými součástkami nějaká vadná, celá série se nepřijme. Jaká je pravděpodobnost, že k tomu dojde?

Řešení:
Spočítáme pravděpodobnost doplňkového jevu:

$\overline{A}$ =”všech 5 vytažených součástek je v pořádku”

Podle zadání máme 100 součástek a z nich 5 vadných. Takže s použitím variací 5-té třídy bez opakování dostaneme

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{95 \cdot 94 \cdot 93 \cdot 92 \cdot 91}{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96} \doteq 1 - 0,7696 = 0,2304 \ .$$

Všimněte si, že pravděpodobnost jevu $\overline{A}$ můžeme také zapsat pomocí součinu (podmíněných) pravděpodobností v každém kroku výběru jako $P(\overline{A}) = \frac{95}{95+5} \cdot \frac{94}{94+5} \cdot \frac{93}{93+5} \cdot \frac{92}{92+5}$ - viz postup v následujícím příkladu.

2.5 (výběr s proměnnými podmínkami, Stirlingův vzorec)

V urně jsou dvě koule, bílá a černá. Provádí se vyber po jedné kouli do doby, než se vytáhne černá koule. Kdykoliv se vytáhne bílá koule, vrátí se do urny a přidají se ještě dvě bílé koule. Určete pravděpodobnost toho, že se při prvních 50 tazích černá koule nevytáhne.

Řešení:
Použijeme následující vztah, který si obecně hodí, pokud provádíme sérii pokusů:

Mějme posloupnost jevů $A_1 \supseteq A_2 \cdots \supseteq A_n$ kde $P(A_n) \neq 0$. Protože máme rovnost $A_i = A_i \cap A_{i-1}$, tak dostáváme

$$P(A_i) = \frac{P(A_i \cap A_{i-1})}{P(A_{i-1})} \cdot P(A_{i-1}) = P(A_i|A_{i-1}) \cdot P(A_{i-1}) \ .$$

Postupně tak iterací dostaneme

$$P(A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdots P(A_n|A_{n-1}) \ .$$

Při praktickém použití pak jev A_i znamená výsledky série prvních i pokusů. Podmíněné pravděpodobnosti $P(A_i|A_{i-1})$ pak znamenají, jaká je pravděpodobnost výsledků i-tého pokusu za předpokladu, že už nastaly dané výsledky prvních $i-1$ pokusů.

V našem případě budeme mít

$A_i =$ ”*v prvních i tazích se vytáhne bílá koule*”,

podmíněné pravděpodobnosti pak budou

$$P(A_i|A_{i-1}) = \frac{2i-1}{2i}$$

protože po prvních $i-1$ pokusech v urně je $2i-1$ bílých koulí a 1 černá koule. A samozřejmě $P(A_1) = \frac{1}{2}$. Pro $n = 50$ tedy máme

$$P(A_n) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{2n-1}{2n} = \frac{1 \cdot 2 \cdots (2n-1) \cdot 2n}{\big(2 \cdot 4 \cdots (2n-2) \cdot 2n\big)^2} = \frac{(2n)!}{(n!)^2 \cdot 2^{2n}} = \binom{2n}{n} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \ .$$

Použitím Stirlingova vzorce $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ dostaneme přibližnou hodnotu

$$P(A_n) = \frac{(2n)!}{(n!)^2 \cdot 2^{2n}} \doteq \frac{\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2\pi n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} \cdot 2^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \ ,$$

tedy pro $n = 50$ to je

$$P(A_{50}) = \frac{100!}{(50!)^2 \cdot 2^{100}} \doteq \frac{1}{\sqrt{50\pi}} \doteq 0.0798 \ .$$

Současně je vidět, že pro $n \to \infty$ se $P(A_n)$ blíží k nule (přestože se podmíněná pravděpodobnost $P(A_i|A_{i-1}) = \frac{2i-1}{2i}$ vytažení bílé koule v dalším tahu postupně blíží k jedné pro $i \to \infty$.)

2.6 (podmíněná pravděpodobnost)

Pravděpodobnost toto, že napětí v elektrické síti překročí standardní hodnotu, je rovna $p_1 > 0$. Při přepětí je pravděpodobnost poruchy elektrického spotřebiče rovná p_2. K poruše přístroje může dojít jen při přepětí. Určete pravděpodobnost poruchy přístroje.

Řešení:
Označme si

$A =$ "*napětí překročí standardní hodnotu*",

$B =$ "*dojde k poruše přístroje*".

Ze zadání víme, že $P(A) = p_1$, $P(B|A) = p_2$ a $B \subseteq A$. Zajímá nás hodnota $P(B)$. Ze vztahu $B \subseteq A$ plyne, že $B \cap A = B$. Pomocí definice relativní pravděpodobnosti teď můžeme psát

$$P(B) = P(B \cap A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \cdot P(A) = P(B|A) \cdot P(A) = p_2 \cdot p_1 \ .$$

2.7 (nezávislé jevy)

Dva střelci střílí na terč po jedné ráně. Pravděpodobnost, že se první trefí je $p_1 = 0.7$. Pravděpodobnost, že se trefí druhý střelec je $p_2 = 0.8$. Jaká je pravděpodobnost, že

(a) alespoň jeden střelec zasáhne cíl?

(b) první střelec se trefí a druhý ne?

Řešení:
Uvažujme jevy

$S_1 =$ "*první střelec se trefí*",

$S_2 =$ "*druhý střelec se trefí*".

Tyto jevy jsou nezávislé, $P(S_1) = 0.7$ a $P(S_2) = 0.8$.

(a) Pro jev

$A =$ "*alespoň jeden střelec zasáhne cíl*" máme $A = S_1 \cup S_2$ a tedy

$$P(A) = P(S_1 \cup S_2) = P(S_1) + P(S_2) - P(S_1 \cap S_2) \overset{\text{(nezav.)}}{=}$$

$$\overset{\text{(nezav.)}}{=} P(S_1) + P(S_2) - P(S_1) \cdot P(S_2) = 0.7 + 0.8 - 0.7 \cdot 0.8 = 0.94\ .$$

(a) Pro jev

$B =$ "*první střelec se trefí a druhý ne*"

máme $B = S_1 \cap \overline{S_2}$ a tedy

$$P(B) = P(S_1 \cap \overline{S_2}) \overset{\text{(nezav.)}}{=} P(S_1) \cdot P(\overline{S_2}) = 0.7 \cdot (1 - 0.8) = 0.14\ .$$

2.8 (nezávislé jevy)

Revizor že zkušenosti ví, že zhruba v 26% tramvají při kontrole najde alespoň jednoho černého pasažéra. Kolik tramvají musí zkontrolovat, aby s pravděpodobností alespoň 95% našel alespoň jednoho černého pasažéra?

Řešení:

Nejdříve je potřeba správně interpretovat zadání: pravděpodobnost, že revizor v dané tramvaji najde alespoň jednoho černého pasažéra je 0.26. Mějme teď jevy

$$A_n = \text{"revizor v } n\text{-té tramvaji najde alespoň jednoho černého pasažéra"}$$

$$B_n = \text{"revizor v prvních } n \text{ tramvajích najde alespoň jednoho černého pasažéra"}$$

Dále budeme předpokládat, že všechny jevy A_n jsou navzájem nezávislé pro $n \in \mathbb{N}$ (bez tohoto vcelku přirozeného předpokladu bychom neměli dost informace pro další výpočet). Pak platí

$$P\Big(\bigcap_{k=1}^{m} (A_{j_k})^{i_k}\Big) = \prod_{k=1}^{m} P\Big((A_{j_k})^{i_k}\Big)$$

pro libovolná $j_1 < j_2 < \cdots < j_m$ a $i_1, \ldots, i_m \in \{-1, 1\}$, kde používáme zápis $A^1 := A$ a $A^{-1} := \overline{A}$.

Chceme tedy znát nejmenší $n \in \mathbb{N}$ takové, že $P(B_n) \geq 0.95$. Víme, že $P(A_n) = 0.26$ a $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$. Jednodušší bude pracovat s doplňkovým jevem:

$$P(\overline{B_n}) = P\Big(\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k}\Big) = P\Big(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}\Big) = \prod_{k=1}^{n} P(\overline{A_k}) = (1 - 0.26)^n$$

$$0.05 = 1 - 0.95 \geq 1 - P(B_n) = P(\overline{B_n}) = (0.74)^n$$

$$\log 0.05 \geq n \log 0.74$$

$$9.95 \doteq \frac{\log 0.05}{\log 0.74} \leq n$$

Pozor, logaritmus je záporný pro hodnoty menší než 1. Revizor tedy musí projít alespoň 10 tramvají.

V tomto příkladě jsme pracovali pouze s jevy, aniž bychom znali konkrétní Kolmogorův model. Taková situace je poměrně běžná - Kolmogorův model se většinou nesestavuje, protože není k samotnému výpočtu potřeba. Slouží pak jen k tomu, abychom se ujistili, že v zadání nejsou rozpory - tj. existuje (alespoň jeden) model, ve kterém je zadání splněno.

2.9 (geometrická pravděpodobnost)

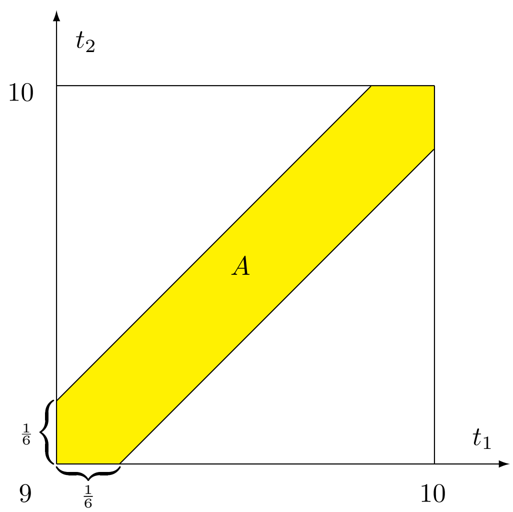
Dva přátelé A a B si domluví schůzku mezi 9.00 a 10.00. Jejich příchody na dané místo jsou náhodné v rámci smluveného časového intervalu. Každý bude čekat 10 minut a pak odchází. Jaká je pravděpodobnost, že dojde k setkání?

Řešení:
V rámci geometrické pravděpodobnosti pracujeme vždy v $\mathbb{R}^n$, kde máme obvyklý n-rozměrný objem vol$(\cdot)$ (a tudíž pracujeme s množinami, kterým nějaký objem přiřadit lze - tzv. borelovské). Kolmogorovým modelem pak bude $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, kde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je borelovská množina taková, že vol$(\Omega) < \infty$, $\mathcal{B}$ je σ-algebra tvořena všemi borelovskými množinami obsaženými v Ω a $P(A) = \frac{\mathrm{vol}(A)}{\mathrm{vol}(\Omega)}$.

V našem konkrétním případě si jako elementární jev zvolíme dvojici (t_1, t_2), která znamená příchody jednotlivých osob v jednotkách *hodin*. Tedy $\Omega = \langle 9, 10\rangle \times \langle 9, 10\rangle$. Jev $A \subseteq \Omega$ setkání obou přátel bude pak

$$A = \{(t_1, t_2) \in \Omega \mid \ |t_1 - t_2| \leq 1/6\}$$

(za jednotku jsme si zvolili hodinu, takže 10 min $= \frac{1}{6}$ hod). Z grafického znázornění množin v $\mathbb{R}^2$



snadno zjistíme, že vol$(A) = 1 - (\frac{5}{6})^2 = \frac{11}{36}$ a vol$(\Omega) = 1$, takže

$$P(A) = \frac{11}{36}\ .$$

Na tomto příkladě je vidět, že pojmu σ-algebra (a dalším definicím spojeným s pravděpodobností) se prostě nelze vyhnout, pokud máme pracovat s plochou nebo objemem množin (a později s integrováním funkcí).

2.10 (geometrická pravděpodobnost)

Dva parníky přijíždějí jednou denně do přístavu a musí přirazit ke stejnému kotvišti. Příjezdy obou parníků jsou nezávislé a stejně možné během celého dne (tj. 24 hodin). První parník zůstává v přístavu 1 hodinu a druhý 2 hodiny. Určete pravděpodobnost, že jeden z parníku bude muset čekat na uvolnění kotviště.

Řešení:

Příklad je podobný jako předchozí, ale tentokrát musíme uvažovat to, že příjezdy probíhají každý den.

Opět si jako elementární jev zvolíme dvojici (t_1, t_2), která znamená příjezdy jednotlivých parníků v jednotkách *hodin*. Jevové pole bude tentokrát $\Omega = \langle 0, 24\rangle \times \langle 0, 24\rangle$.

Protože uvažujeme to, že příjezdy probíhají každý den a události na sebe mohou navazovat, jev $A \subseteq \Omega$ představující to, že jeden z parníku musí čekat, tak budou takové dvojice $(t_1, t_2) \in \Omega$, že

$$(\exists k, \ell \in \mathbb{Z}) \ \Big(t_1 + 24 \cdot k \leq t_2 + 24 \cdot \ell \leq (t_1 + 24 \cdot k) + 1\Big) \text{ nebo}$$

$$\Big(t_2 + 24 \cdot k \leq t_1 + 24 \cdot \ell \leq (t_2 + 24 \cdot k) + 2\Big)$$

V podstatě máme vždy (nekonečný) pás o pevné šířce, který je posunutý o násobky 24 ve směru os a díváme se, jak se nám tato posunutí protnou s množinou Ω. Výsledek jsou jen tyto 4 případy:

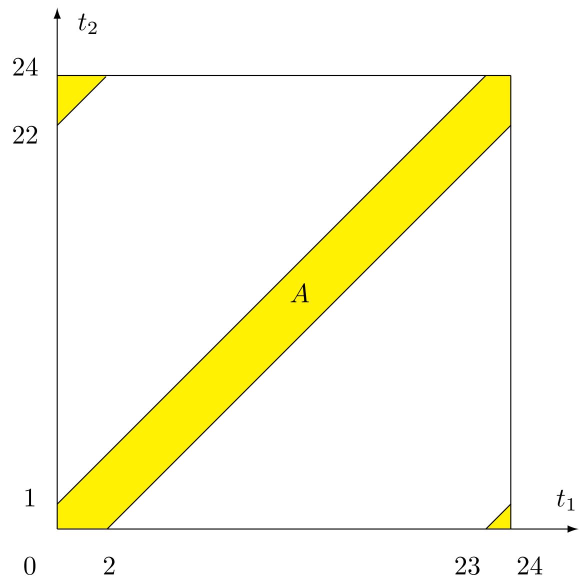
$$A : \Big(t_1 \leq t_2 \leq t_1 + 1\Big) \text{ nebo}$$

$$\Big(t_2 \leq t_1 - 23\Big) \text{ nebo}$$

$$\Big(t_2 \leq t_1 \leq t_2 + 2\Big) \text{ nebo}$$

$$\Big(t_1 + 22 \leq t_2\Big) \ .$$

Z grafického znázornění množiny A v $\mathbb{R}^2$



snadno zjistíme, že plocha A je vlastně plocha kosodélníku se základnou 3 a výškou 24. Tedy

$$P(A) = \frac{3 \cdot 24}{(24)^2} = \frac{1}{8} = 0.125 \ .$$

Pro názornější představu cykličnosti událostí si můžeme představit, že okraje intervalu $\langle 0, 24\rangle \times \langle 0, 24\rangle$ jsou slepené tak, že vznikne povrch toru neboli "pneumatika".