14.12.2016, 1. skupina (16:15 - 17:45) Jméno:

Zápočtový test z PSI

Nezapomeňte podepsat VŠECHNY papíry, které odevzdáváte. Škrtejte zřetelně a stejně zřetelně pište i věci, které platí. Co je škrtnuto, nebude bráno v úvahu a naopak. Jestliže něčemu nerozumíte, zeptejte se. Postup je třeba odůvodnit (okomentovat) nebo uvést výpočet. Výsledek bez uvedení jakéhokoliv postup či výpočtu není akceptován. Abyste uspěli v testu, potřebujete získat alespoň 15 bodů.

(1) (10 bodů) V krabici je 9 nových a 6 použitých tenisových míčků. Pro *první* hru se náhodně vyberou 3 míčky, které se po skončení hry zase vrátí do krabice.

Pro *druhou* hru se znovu náhodně vyberou opět 3 míčky. Určete pravděpodobnost toho, že všechny tři míčky, použité při *druhé* hře, jsou nové.

Řešení:
Pro $i = 0, 1, 2, 3$ si označme jevy:

A_i = "pro první hru bylo vybráno i *nových* a $3 - i$ *použitých* míčku",
B = "pro druhou hru byly vybrány 3 *nové* míčky".

Víme, že A_0, A_1, A_2 a A_3 je úplný disjunktní systém jevů. Z věty o úplné pravděpodobnosti máme

$$P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(B|A_i) \cdot P(A_i)$$

Zbývá určit potřebné pravděpodobnosti:

$$P(B|A_i) = \frac{\binom{9-i}{3}}{\binom{15}{3}} \qquad \text{a} \qquad P(A_i) = \frac{\binom{9}{i} \cdot \binom{6}{3-i}}{\binom{15}{3}} \ .$$

Takže

$$P(B|A_0) \cdot P(A_0) = \binom{9}{3} \cdot \binom{9}{0} \cdot \binom{6}{3} \cdot \frac{1}{\binom{15}{3}^2} = \frac{9!}{3! \cdot 6!} \cdot 1 \cdot \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot \left(\frac{3!}{15 \cdot 14 \cdot 13}\right)^2 = \frac{9!}{3!} \cdot \frac{1}{(15 \cdot 14 \cdot 13)^2}$$

$$P(B|A_1) \cdot P(A_1) = \binom{8}{3} \cdot \binom{9}{1} \cdot \binom{6}{2} \cdot \frac{1}{\binom{15}{3}^2} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot 9 \cdot \frac{6!}{2! \cdot 4!} \cdot \left(\frac{3!}{15 \cdot 14 \cdot 13}\right)^2 = 9! \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{(15 \cdot 14 \cdot 13)^2}$$

$$P(B|A_2) \cdot P(A_2) = \binom{7}{3} \cdot \binom{9}{2} \cdot \binom{6}{1} \cdot \frac{1}{\binom{15}{3}^2} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} \cdot \frac{9!}{2! \cdot 7!} \cdot 6 \cdot \left(\frac{3!}{15 \cdot 14 \cdot 13}\right)^2 = 9! \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{(15 \cdot 14 \cdot 13)^2}$$

$$P(B|A_3) \cdot P(A_3) = \binom{6}{3} \cdot \binom{9}{3} \cdot \binom{6}{0} \cdot \frac{1}{\binom{15}{3}^2} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot \frac{9!}{3! \cdot 6!} \cdot 1 \cdot \left(\frac{3!}{15 \cdot 14 \cdot 13}\right)^2 = \frac{9!}{3!} \cdot \frac{1}{(15 \cdot 14 \cdot 13)^2} \ .$$

Nebo také lze postupovat takto:

i = 0: Z 15 míčků (9 nových, 6 starých) vybíráme postupně 3 staré, tedy

$$P(A_0) = \frac{6}{9+6} \cdot \frac{5}{9+5} \cdot \frac{4}{9+4} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{15 \cdot 14 \cdot 13} \doteq 0.04396$$

a podobně pravděpodobnost $P(B|A_0)$ určíme tak, že následně z 15 míčků (stále 9 nových, 6 starých) vybíráme 3 nové, tedy

$$P(B|A_0) = \frac{9}{9+6} \cdot \frac{8}{8+6} \cdot \frac{7}{7+6} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{15 \cdot 14 \cdot 13} \doteq 0.18462 \ .$$

i = 1: Podobně z 15 míčků (9 nových, 6 starých) vybíráme postupně 1 nový a 2 staré. Tedy možnosti jsou (starý, nový, nový) nebo (nový, starý, nový) nebo (nový, nový, starý). Všechny tyto možnosti mají stejnou pravděpodobnost, takže

$$P(A_1) = 3 \cdot \frac{9 \cdot 6 \cdot 5}{15 \cdot 14 \cdot 13} \doteq 0.2967$$

a podobně pravděpodobnost $P(B|A_1)$ určíme tak, že následně z 15 míčků (nyní 8 nových, 7 starých) vybíráme 3 nové, tedy

$$P(B|A_1) = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{15 \cdot 14 \cdot 13} \doteq 0.12308 \ .$$

i = 2: Z 15 míčků (9 nových, 6 starých) vybíráme postupně 2 nové a 1 starý. Tedy možnosti jsou (nový, starý, starý) nebo (starý, nový, starý) nebo (starý, starý, nový). Všechny tyto možnosti mají stejnou pravděpodobnost, takže

$$P(A_2) = 3 \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 6}{15 \cdot 14 \cdot 13} \doteq 0.47473$$

a podobně pravděpodobnost $P(B|A_1)$ určíme tak, že následně z 15 míčků (nyní 7 nových, 8 starých) vybíráme 3 nové, tedy

$$P(B|A_1) = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{15 \cdot 14 \cdot 13} \doteq 0.07692 \ .$$

i = 3: Z 15 míčků (9 nových, 6 starých) vybíráme postupně 3 nové. Takže

$$P(A_3) = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{15 \cdot 14 \cdot 13} \doteq 0.18462$$

a podobně pravděpodobnost $P(B|A_3)$ určíme tak, že následně z 15 míčků (nyní 6 nových, 9 starých) vybíráme 3 nové, tedy

$$P(B|A_3) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{15 \cdot 14 \cdot 13} \doteq 0.04396 \ .$$

Speciálně vidíme, že

$$P(B|A_0) \cdot P(A_0) = P(B|A_3) \cdot P(A_3)$$

a

$$P(B|A_1) \cdot P(A_1) = P(B|A_2) \cdot P(A_2) \ .$$

Takže po dosazení:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(B|A_i) \cdot P(A_i) = 2 \cdot \frac{9!}{(15 \cdot 14 \cdot 13)^2} \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{3}{4}\right) =$$

$$= \frac{3 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 11}{5 \cdot 7 \cdot 13^2} = \frac{528}{5915} \doteq 0.08926 \ .$$

Pravděpodobnost je tak asi 8.926%.

(2) (10 bodů) Distribuční funkce spojite náhodné veličiny X má tvar:

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & , \ t < -1 \\ a + b \cdot \arcsin(t) & , \ t \in \langle -1, 1 \rangle \\ 1 & , \ t > 1 \ . \end{cases}$$

(i) Určete konstanty a, b tak, aby F_X byla skutečně distribuční funkcí a načrtněte její graf. Dále určete $E(X)$ a $P\left(\frac{1}{2} \leq |X| < 3\right)$.

(ii) Určete distribuční funkci F_Y veličiny $Y = X^2 - 1$.

Řešení:
(i) Ze spojitosti F_X musí být

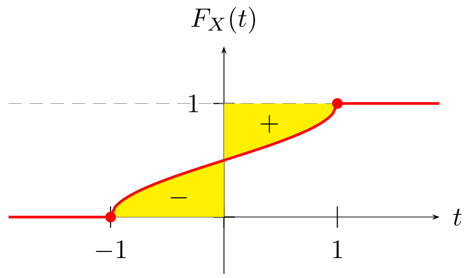
$$0 = a + b \cdot \arcsin(-1) = a - \frac{\pi}{2} b$$

$$1 = a + b \cdot \arcsin(1) = a + \frac{\pi}{2} b$$

takže $a = \frac{1}{2}$ a $b = \frac{1}{\pi}$. Distibuční funkce pak má tvar

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & , \ t < -1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \arcsin(t) & , \ t \in \langle -1, 1 \rangle \\ 1 & , \ t > 1 \ . \end{cases}$$

s grafem



Protože hustota veličiny, tj. derivace

$$f_X(t) = F_X'(t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} & , \ t \in (-1, 1) \\ 0 & , \ \text{jinak} \ . \end{cases}$$

je sudá funkce (nebo také proto, že F_X je středově souměrná podle středu $\left(0, \frac{1}{2}\right)$), je střední hodnota (pokud existuje) nutně nulová. Existence je ovšem vidět ihned z předpisů distribuční funkce - X je omezená (přesněji, hodnoty X, co padnou mimo interval $\langle -1, 1 \rangle$ nejsou podstatné). Tedy skutečně je $E(X) = 0$.

Názornější zdůvodnění je i to, že střední hodnota představuje příslušné (žluté) plochy, které jsou vymezené grafem funkce F_X. Tyto plochy jsou jsou shodné (omezené) a při výpočtu se berou s opačnými znaménky.

Střední hodnotu lze ovšem snadno spočítat i přímo pomocí hustoty pravděpodobnosti

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_X(t) \ \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \ \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \left[-\sqrt{1-t^2} \right]_{t=-1}^{t=1} = 0 \ .$$

A konečně, díky sudosti hustoty (případně díky zmíněné středové symetričnosti F_X) je

$$P\left(\frac{1}{2} \le |X| < 3\right) = 2 \cdot P\left(\frac{1}{2} \le X < 3\right) = 2 \cdot \Big(F_X(3) - F_X\big(1/2\big)\Big) =$$

$$= 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \cdot \arcsin\big(1/2\big)\right) = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{3} \ .$$

(ii) Pro distribuční funkci F_Y máme

$$F_Y(s) = P(Y \le s) = P(X^2 - 1 \le s) = P(X^2 \le s + 1)$$

Pro $s + 1 < 0$ je tedy zřejmě $F_Y(s) = 0$. Pro $s + 1 \ge 0$ pak můžeme dále pokračovat

$$F_Y(s) = \cdots = P\Big(X^2 \le s+1\Big) = P\Big(|X| \le \sqrt{s+1}\Big) = P\Big(-\sqrt{s+1} \le X \le \sqrt{s+1}\Big) =$$

$$= F_X\Big(\sqrt{s+1}\Big) - F_X\Big(-\sqrt{s+1}\Big) = 2 \cdot F_X\Big(\sqrt{s+1}\Big) - 1 \ .$$

Poslední rovnost plyne z toho, že pokud je F_X středově symetrická podle $(0, 1/2)$ (neboli funkce $F_X - \frac{1}{2}$ je lichá), pak pro všechna $t \in \mathbb{R}$ platí $F_X(-t) + F_X(t) = 1$ (stejná vlastnost se používá často u normovaného normálního rozdělení).

Teď už stačí jen dosadit do předpisu F_X, čímž dostaneme

$$F_Y(s) = \begin{cases} 0 & , \ s < -1 \\ \frac{2}{\pi} \cdot \arcsin(\sqrt{s+1}) & , \ s \in \langle -1, 0 \rangle \\ 1 & , \ s > 0 \ . \end{cases}$$

(3) (10 bodů) Dvě diskrétní náhodné veličiny X, Y mají pravděpodobnostní funkce dané tabulkou. Odhadněte koeficient c směsi $Z = \mathrm{Mix}_c(X, Y)$ z četností jejích realizací uvedených v tabulce.

hodnota	1	2	3	4
p_X	0.1	0.2	0.2	0.5
p_Y	0.5	0.2	0.2	0.1
četnost	30	20	15	35

Řešení:
Z definice směsi máme pro parametr c nutnou podmínku $0 \leq c \leq 1$.

Metoda momentů: Z definice směsi $Z = \mathrm{Mix}_c(X, Y)$ dostaneme

$$\mathrm{E}(Z) = c \cdot \mathrm{E}(X) + (1 - c) \cdot \mathrm{E}(Y) \ .$$

Pro střední hodnoty X a Y máme

$$\mathrm{E}(X) = 0.1 + 2 \cdot 0.2 + 3 \cdot 0.2 + 4 \cdot 0.5 = 3.1$$

$$\mathrm{E}(Y) = 0.5 + 2 \cdot 0.2 + 3 \cdot 0.2 + 4 \cdot 0.1 = 1.9 \ .$$

Takže dostaneme

$$\mathrm{E}(Z) = c \cdot \mathrm{E}(X) + (1 - c) \cdot \mathrm{E}(Y) = 1.9 + 1.2 \cdot c \ .$$

Hodnota realizace výběrového průměru je

$$\overline{z} = \frac{30 + 2 \cdot 20 + 3 \cdot 15 + 4 \cdot 35}{100} = \frac{51}{20} = 2.55 \ .$$

Jejich srovnáním dostáváme

$$1.9 + 1.2 \cdot c = \mathrm{E}(Z) = \overline{z} = 2.55$$

takže výsledek je

$$c = \frac{13}{24} \doteq 0.5417 \ .$$

Metoda maximální věrohodnosti: Z definice $Z = \mathrm{Mix}_c(X, Y)$ pro pravděpodobnostní funkci dostaneme

$$p_Z = c \cdot p_X + (1 - c) \cdot p_Y$$

hodnota	1	2	3	4
p_Z	$0.5 - 0.4\,c$	0.2	0.2	$0.1 + 0.4\,c$

Pro funkci věrohodnosti pak máme

$$L(c) = (0.5 - 0.4 \cdot c)^{30} \cdot 0.2^{20+15} \cdot (0.1 + 0.4 \cdot c)^{35}$$

Funkce L je nezáporná a spojitá na uzavřené množině $\langle 0, 1\rangle$, takže zde nabývá maxima. To odpovídá hledání maxima funkce

$$\ell(c) = \ln L(c) = 30 \cdot \ln\big(0.5 - 0.4\,c\big) + 35 \cdot \ln 0.2 + 35 \cdot \ln\big(0.1 + 0.4\,c\big)\ .$$

Derivace je nulová

$$0 = \ell'(c) = -\frac{30 \cdot 0.4}{0.5 - 0.4\,c} + \frac{35 \cdot 0.4}{0.1 + 0.4\,c} = \frac{5.8 - 10.4\,c}{(0.5 - 0.4\,c)(0.1 + 0.4\,c)}$$

ve stacionárním bodě

$$c = \frac{29}{52} \doteq 0.5577\ .$$

V intervalu $\big(0, \frac{29}{52}\big)$ je ℓ' evidentně kladná (o znaménku rozhoduje jen výraz v čitateli, výraz ve jmenovateli je kladný) a v intervalu $\big(\frac{29}{52}, 1\big)$ je ℓ' zase záporná. Takže v bodě $c = \frac{29}{52} \doteq 0.5577$ je skutečně věrohodnost maximální.