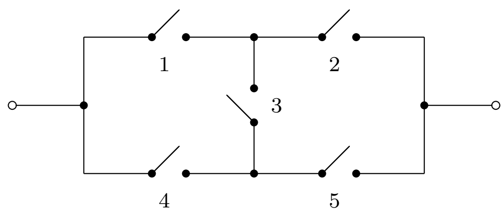
14.12.2016, 2. skupina (18:00 - 19:30) Jméno:

Zápočtový test z PSI

Nezapomeňte podepsat VŠECHNY papíry, které odevzdáváte. Škrtejte zřetelně a stejně zřetelně pište i věci, které platí. Co je škrtnuto, nebude bráno v úvahu a naopak. Jestliže něčemu nerozumíte, zeptejte se. Postup je třeba odůvodnit (okomentovat) nebo uvést výpočet. Výsledek bez uvedení jakéhokoliv postup či výpočtu není akceptován. Abyste uspěli v testu, potřebujete získat alespoň 15 bodů.

(1) (10 bodů) Spínače v zařízení pracují nezávisle, každý se sepne s pravděpodobností $p = 0.3$. Jsou zapojeny podle schématu (viz obrázek):



S jakou pravděpodobností bude zařízení propouštět proud? (Nápověda: Zjednodušte si zadání využitím věty o úplné pravděpodobnosti pro vhodný spínač.)

Řešení:
Jestliže máme *paralelně* zapojené nezávislé prvky, které mají pravděpodobnosti fungování p_1 a p_2, pak pravděpodobnost fungování tohoto zapojení je $p_1 + p_2 - p_1 \cdot p_2$.

Jestliže máme *sériově* zapojené nezávislé prvky, které mají pravděpodobnosti fungování p_1 a p_2, pak pravděpodobnost fungování tohoto zapojení je $p_1 \cdot p_2$.

Pro $i = 1, 2, 3, 4, 5$ si označme jevy

A_i= "*i-tý spínač je zapnutý*"

B= "*zařízením prochází proud*"

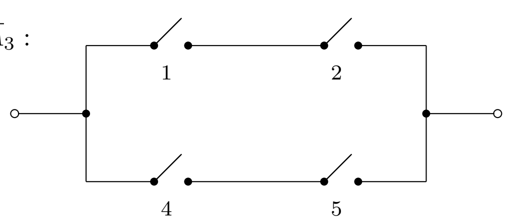
Víme, že jevy $A_1, \ldots, A_5$ jsou nezávislé a $P(A_i) = p$.

Spínače č. $1, 2, 4$ a 5 mají v zapojení stejné postavení, jediný spínač č. 3 je odlišný. Pokud využijeme větu o úplné pravděpodobnosti právě pro spínač č. 3:

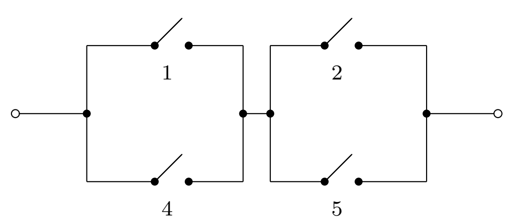
$$P(B) = P(B|\overline{A}_3) \cdot P(\overline{A}_3) + P(B|A_3) \cdot P(A_3)$$

situace se nám výrazně zjednoduší (pro jev A_3 je schéma ekvivalentně překresleno):

$\overline{A}_3$:



A_3:



Podle výpočtu pravděpodobnosti pro paralelní a sériová schémata tak dostaneme:

$$P(B|\overline{A}_3) = (p \cdot p) + (p \cdot p) - (p \cdot p) \cdot (p \cdot p) = 2p^2 - p^4$$

a

$$P(B|A_3) = \Big(p + p - p\cdot p\Big)\cdot\Big(p + p - p\cdot p\Big) = \Big(2p - p^2\Big)^2$$

Celkově tak je

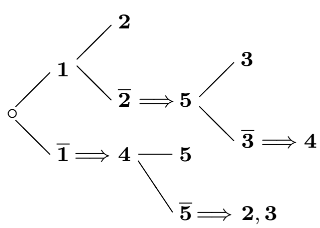
$$P(B) = P(B|\overline{A}_3)\cdot P(\overline{A}_3) + P(B|A_3)\cdot P(A_3) = \Big(2p^2 - p^4\Big)\cdot(1-p) + \Big(2p - p^2\Big)^2\cdot p =$$
$$= p^2\cdot\Big((2-p^2)\cdot(1-p) + p(2-p)^2\Big) =$$
$$= p^2\cdot\big(2 + 2p - 5p^2 + 2p^3\big)$$

a po dosazení dostaneme

$$P(B) = 0.3^2\cdot\Big((2-0.3^2)\cdot 0.7 + 0.3\cdot 1.7^2\Big) = 0.19836\ .$$

Pokud si na začátku vybereme jiný spínač, výpočet bude o něco delší.

JINÉ ŘEŠENÍ: Můžeme postupně uvažovat všechny *disjunktní* případy zapnutých a vypnutých spínačů, kdy schématem prochází proud a to např. následujícím způsobem:



Jednotlivé větve (směrem zleva doprava) od $\circ$ až ke koncovému uzlu představují všechna možná disjunktní zapojení, kdy schématem prochází proud. Implikace $\Longrightarrow$ znamenají, že daný stav spínače je vynucený předchozí částí cesty (pokud má zapojením procházet proud).

Daný strom sestavíme rekurzivně:

- Zvolíme si nějaký spínač jako výchozí (zde č. 1).
- Dejme tomu, že nejdříve budeme uvažovat, že spínač je zapnutý (stav $\circ - \mathbf{1}$).
- Teď přidáme další spínač (zde č. 2).
- Opět nejdřív budeme uvažovat např. zapnutý (stav $\circ - \mathbf{1} - \mathbf{2}$). Pak ovšem už soustavou prochází proud a ostatní spínače není potřeba uvažovat.
- Za předpokladu $\circ - \mathbf{1}$ zbývá udělat, že č. 2 je vypnutý, tj. stav $\circ - \mathbf{1} - \overline{\mathbf{2}}$. Aby procházel soustavou proud musí být zapnutý spínač č. 5 (tj. stav $\circ - \mathbf{1} - \overline{\mathbf{2}} \Longrightarrow \mathbf{5}$).
- Zase přidáme další spínač (zde č. 3).
- atd.

Máme tedy následující disjunktní rozklad jevu B (= soustavou prochází proud) na jevy:

$A_1 \cap A_2$	s pravděpodobností p^2
$A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_5 \cap A_3$	s pravděpodobností $p^3(1-p)$
$A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_5 \cap \overline{A}_3 \cap A_4$	s pravděpodobností $p^3(1-p)^2$
$\overline{A}_1 \cap A_4 \cap A_5$	s pravděpodobností $p^2(1-p)$
$\overline{A}_1 \cap A_4 \cap \overline{A}_5 \cap A_2 \cap A_3$	s pravděpodobností $p^3(1-p)^2$

Celkem tedy

$$P(B) = p^2 + p^3(1-p) + 2\cdot p^3(1-p)^2 + p^2(1-p)$$

a po dosazení

$$P(B) = 0.3^2 + 0.3^3\cdot 0.7 + 2\cdot 0.3^3\cdot 0.7^2 + 0.3^2\cdot 0.7 = 0.19836\ .$$

(2) (10 bodů) Náhodný vektor (X, Y) má diskrétní rozdělení určené pravděpodobnostní funkcí $p_{X,Y}$, která je daná tabulkou

$p_{X,Y}(x,y)$: y / x	-1	0	1
1	1/6	0	1/3
2	1/8	1/4	1/8

a) Vypočtěte pravděpodobnost $P\Big(|Y| \geq X\Big)$, střední hodnotu $\mathrm{E}(X^2\,Y)$ a rozptyl $D(X)$.

b) Rozhodněte, zda jsou náhodné veličiny X a Y závislé či nezávislé.

Řešení:
Nenulové pravděpodobnosti pro případ $|Y| \geq X$ nastávají právě když $(X, Y) \in \{(1, -1),\ (1, 1)\}$. Takže

$$P\big(|Y| \geq X\big) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\ .$$

Pro střední hodnotu veličiny XY^2 použijeme obvyklý vzorec s pravděpodobnostní funkcí

$$E(X^2Y) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{R}^2} i^2 \cdot j \cdot p_{X,Y}(i, j) =$$

$$= 1^2 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{6} + 1^2 \cdot 0 \cdot 0 + 1^2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} + 2^2 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{8} + 2^2 \cdot 0 \cdot \frac{1}{4} + 2^2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{8} =$$
$$= -\frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}\ .$$

Pro výpočet rozptylu veličiny X je nejjednodušší si určit její pravděpodobnostní funkci

$$p_X(1) = \frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

$$p_X(2) = 1 - p_X(1) = \frac{1}{2}\ .$$

Takže máme

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$
$$E(X^2) = 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

a tudíž

$$D(X) = E(X^2) - \Big(E(X)\Big)^2 = \frac{5}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\ .$$

(b) Protože nějaké dva řádky (zde tedy všechny) v tabulce hodnot

1/6	0	1/3
1/8	1/4	1/8

sdružené pravděpodobnostní funkce jsou *lineárně NEzávislé*, tak veličiny X a Y jsou ZÁVISLÉ. Jiné zdůvodnění je například, že máme

$$p_{X,Y}(1, 0) = 0 \neq \frac{1}{2} \cdot \left(0 + \frac{1}{4}\right) = p_X(1) \cdot p_Y(0)$$

a tudíž veličiny musí být ZÁVISLÉ.

(3) (10 bodů) Pravděpodobnost toho, že se za dobu T porouchá jeden kondenzátor je $p = 0.2$. Určete pravděpodobnost toho, že se za dobu T ze 100 nezávislých kondenzátorů porouchá

(a) méně než 28 kondenzátorů,

(b) 14 až 26 kondenzátorů.

Řešení:
Pro $i = 1, \ldots, n$ (kde $n = 100$) si zavedeme veličiny

$$X_i = \begin{cases} 1 & , \ i\text{-tý kondenzátor se porouchá,} \\ \\ 0 & , \ i\text{-tý kondenzátor bude v pořádku.} \end{cases}$$

Veličiny X_i považujeme za nezávislé, s alternativním rozdělením s parametrem $p = 0.2$ (protože $P(X_i = 1) = p$), střední hodnotou

$$E(X_i) = p = 0.2$$

a rozptylem

$$D(X_i) = p(1-p) = 0.2 \cdot 0.8 = 0.16\ .$$

Počet porouchaných kondenzátorů je

$$X = \sum_{i=1}^{100} X_i$$

se střední hodnotou

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = n \cdot p = 100 \cdot 0.2 = 20$$

a rozptylem

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) = n \cdot p(1-p) = 100 \cdot 0.16 = 16\ .$$

(a) Máme teď určit $P(X \leq 28)$, což uděláme za pomocí centrální limitní věty použité na normovanou veličinu

$$\mathrm{norm}(X) = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}} = \frac{X - 20}{\sqrt{16}}\ .$$

Pomocí úprav nerovností můžeme psát:

$$P(X < 28) = P\left(\frac{X-20}{4} < \frac{28-20}{4}\right) = P\Big(\mathrm{norm}(X) < 2\Big) \doteq$$
$$\doteq \Phi(2) \doteq 0.97725\ .$$

Případně

$$P(X < 28) = P(X \leq 27) = P\left(\frac{X-20}{4} \leq \frac{27-20}{4}\right) = P\Big(\mathrm{norm}(X) \leq 1.75\Big) \doteq$$
$$\doteq \Phi(1.75) \doteq 0.95994\ .$$

(b) Podobně určíme $P(14 \leq X \leq 26)$:

$$P(14 \leq X \leq 26) = P\left(\frac{14-20}{4} \leq \frac{X-20}{4} \leq \frac{26-20}{4}\right) = P\Big(-1.5 \leq \mathrm{norm}(X) \leq 1.5\Big) =$$

$$= P\Big(\mathrm{norm}(X) \leq 1.5\Big) - P\Big(\mathrm{norm}(X) < -1.5\Big) \doteq \Phi(1.5) - \Phi(-1.5) =$$

$$= 2 \cdot \Phi(1.5) - 1 \doteq 2 \cdot 0.93319 - 1 = 0.86638 \ .$$

Případně

$$P(14 \leq X \leq 26) = P(13 < X \leq 26) = P\left(\frac{13-20}{4} < \frac{X-20}{4} \leq \frac{26-20}{4}\right) = P\Big(-1.75 < \mathrm{norm}(X) \leq 1.5\Big) =$$

$$= P\Big(\mathrm{norm}(X) \leq 1.5\Big) - P\Big(\mathrm{norm}(X) \leq -1.75\Big) \doteq \Phi(1.5) - \Phi(-1.75) =$$

$$= \Phi(1.5) + \Phi(1.75) - 1 \doteq 0.93319 + 0.95994 - 1 = 0.89313 \ .$$