15.12.2016, 3. skupina (14:30 - 16:00) Jméno:

Zápočtový test z PSI

Nezapomeňte podepsat VŠECHNY papíry, které odevzdáváte. Škrtejte zřetelně a stejně zřetelně pište i věci, které platí. Co je škrtnuto, nebude bráno v úvahu a naopak. Jestliže něčemu nerozumíte, zeptejte se. Postup je třeba odůvodnit (okomentovat) nebo uvést výpočet. Výsledek bez uvedení jakéhokoliv postup či výpočtu není akceptován. Abyste uspěli v testu, potřebujete získat alespoň 15 bodů.

(1) (10 bodů) Při výrobě počítačových pamětí nedosahují všechny deklarované kapacity. Výrobky od prvního výrobce mají v 95% případů deklarovanou kapacitou a od druhého jen v 90%. V obchodě je na skladě 70% pamětí od prvního výrobce a 30% od druhého.

Paměť, kterou jsme zakoupili v obchodě měla deklarovanou kapacitu. Vypočtete pravděpodobnosti s jakou tato paměť pochází od jednotlivých výrobců.

Řešení:
Označme jevy:

S_i = "paměť na skladě pochází od i-tého výrobce",
D = "paměť má deklarovanou kapacitu".

Zajímají nás nyní pravděpodobnosti $P(S_1|D)$ a $P(S_2|D)$. Podle zadání máme

$$P(D|S_1) = 0.95 \qquad P(D|S_2) = 0.9$$

$$P(S_1) = 0.7 \qquad P(S_2) = 0.3\ .$$

Z Bayesovy věty máme:

$$P(S_i|D) = \frac{P(D|S_i) \cdot P(S_i)}{P(D)}$$

$$P(D) = \sum_{i=1}^{3} P(D|S_i) \cdot P(S_i) = 0.95 \cdot 0.7 + 0.9 \cdot 0.3 = 0.935$$

a tedy

$$P(S_1|D) = \frac{0.95 \cdot 0.7}{0.935} = \frac{133}{187} \doteq 0.7112$$

a

$$P(S_2|D) = 1 - (S_1|D) = \frac{54}{187} \doteq 0.2888\ .$$

(2) (10 bodů) Spojitá náhodná veličina X má hustotu pravděpodobnosti

$$f_X(t) = \begin{cases} c \cdot (1 - |t|) & , \ -1 \le t \le 1 \\ \\ 0 & , \text{ jinak.} \end{cases}$$

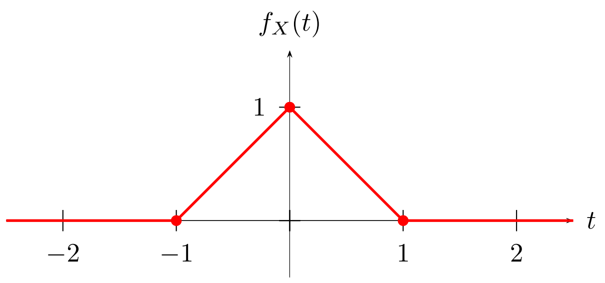
(a) Určete konstantu c a načrtněte graf funkce f_X. Vypočítejte distribuční funkci F_X a načrtněte její graf.

(b) Určete $P(X \in \langle \frac{1}{2}, 1\rangle)$.

Řešení:
(a) Podmínka na hustotu je, aby to byla nezáporná funkce s integrálem rovným jedné. Tedy

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\ dt = c\int_{-1}^{1}(1-|t|)\ dt = 2c\int_{0}^{1}(1-t)\ dt = 2c\cdot\frac{1}{2} = c$$

a funkce f_X je zřejmě nezáporná. Její graf je



Pro distribuční funkci F_X pro $u \in \langle -1, 0\rangle$ máme

$$F_X(u) = \int_{-\infty}^{u} f_X(t)\ dt = \int_{-1}^{u}(1+t)\ dt = \left[t + \frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{u} = u + \frac{u^2}{2} + \frac{1}{2}$$

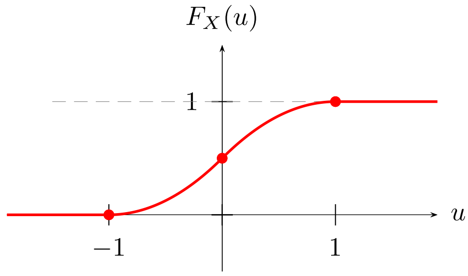
a pro $u \in \langle 0, 1\rangle$ máme

$$F_X(u) = \int_{-\infty}^{u} f_X(t)\ dt = \int_{-1}^{0}(1+t)\ dt + \int_{0}^{u}(1-t)\ dt = \frac{1}{2} + \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_{0}^{u} = u - \frac{u^2}{2} + \frac{1}{2}\ .$$

Celkem tedy pro distribuční funkci dostáváme

$$F_X(u) = \begin{cases} 0 & ,\ u \in (-\infty, -1\rangle, \\ u + \frac{u^2}{2} + \frac{1}{2} & ,\ u \in (-1, 0\rangle, \\ u - \frac{u^2}{2} + \frac{1}{2} & ,\ u \in (0, 1\rangle, \\ 1 & ,\ u \in (1, \infty). \end{cases}$$

a její graf je:



(b) Zde máme

$$P\left(X \in \left\langle \frac{1}{2}, 1\right\rangle\right) = F(1) - F\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}\ .$$

Případně tuto hodnotu můžeme snadno spočítat jako plochu trojúhelníka pod grafem hustoty na intervalu $\langle \frac{1}{2}, 1\rangle$.

(3) (10 bodů) Veličina určující výsledek měření X má normální rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem 0.09. Provedli jsme $n = 100$ měření. Pro výběrový průměr $\overline{X}_n$ z těchto n měření určete $\varepsilon > 0$, pro které je $P(|\overline{X}_n - E(\overline{X}_n)| < \varepsilon) = 0.8$.

Hodnotu ε vypočítejte.

(***NEodhadujte*** ji pomocí Čebyševovy nerovnosti!)

Řešení:
Veličiny X_i považujeme za nezávislé, takže veličina

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

má normální rozdělení se střední hodnotou $E(\overline{X}_n) = \mu$ a rozptylem $D(\overline{X}_n) = \frac{0.09}{100} = 9 \cdot 10^{-4}$.

Takže veličina

$$\mathrm{norm}(\overline{X}_n) = \frac{\overline{X}_n - E(\overline{X}_n)}{\sqrt{D(\overline{X}_n)}} = \frac{\overline{X}_n - \mu}{0.03}$$

má normované normální rozdělení $N(0,1)$. Úpravami nerovností tudíž dostaneme

$$0.8 = P\big(|\overline{X}_n - E(\overline{X}_n)| < \varepsilon\big) = P\left(\frac{|\overline{X}_n - \mu|}{0.03} < \frac{\varepsilon}{0.03}\right) = P\Big(-\frac{\varepsilon}{0.03} \leq \mathrm{norm}(\overline{X}_n) \leq \frac{\varepsilon}{0.03}\Big) =$$

$$= \Phi\Big(\frac{\varepsilon}{0.03}\Big) - \Phi\Big(-\frac{\varepsilon}{0.03}\Big) = 2 \cdot \Phi\Big(\frac{\varepsilon}{0.03}\Big) - 1$$

což dává

$$\Phi\Big(\frac{\varepsilon}{0.03}\Big) = \frac{1 + 0.8}{2} = 0.9$$

neboli

$$\varepsilon = 0.03 \cdot \Phi^{-1}(0.9) \doteq 0.03 \cdot 1.282 = 0.03846\ .$$