15.12.2016, 4. skupina (16:15 - 17:45) Jméno:

Zápočtový test z PSI

Nezapomeňte podepsat VŠECHNY papíry, které odevzdáváte. Škrtejte zřetelně a stejně zřetelně pište i věci, které platí. Co je škrtnuto, nebude bráno v úvahu a naopak. Jestliže něčemu nerozumíte, zeptejte se. Postup je třeba odůvodnit (okomentovat) nebo uvést výpočet. Výsledek bez uvedení jakéhokoliv postup či výpočtu není akceptován. Abyste uspěli v testu, potřebujete získat alespoň 15 bodů.

(1) (10 bodů) Spojovacím kanálem je přenášen signál **A** (resp. **B**) s pravděpodobností 0.84 (resp. 0.16). Vzhledem k poruchám se 1/6 signálu **A** detekuje jako **B** a obdobně se 1/8 signálu **B** detekuje jako **A**.

Určete pravděpodobnost, že na výstupu bude detekován signál **B**. Určete také, jaká je pravděpodobnost, že signál, který byl detekován jako **A**, byl také skutečně vyslán jako **A**.

Řešení:
Označme si jevy (pro zjednodušení stejnými znaky jako vysílané signály)

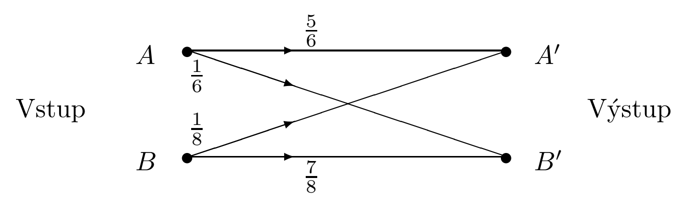
$A =$ "je přenášen signál **A**",
$B =$ "je přenášen signál **B**",
$A' =$ "byl detekován signál **A**",
$B' =$ "byl detekován signál **B**".

Jevy A a B jsou doplňkové, stejně tak jevy A' a B'. Podle zadání máme pravděpodobnosti

$$P(A) = 0.84 \qquad P(B) = 0.16$$

$$P(B'|A) = \frac{1}{6} \qquad P(A'|B) = \frac{1}{8}\ .$$

a můžeme si je znázornit i graficky:



Chceme nyní zjistit $P(B')$. Z věty o úplné pravděpodobnosti máme

$$P(B') = P(B'|A) \cdot P(A) + P(B'|B) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot 0.84 + \frac{7}{8} \cdot 0.16 = 0.28\ .$$

Dále chceme určit hodnotu $P(A|A')$. Z Bayesovy věty máme

$$P(A|A') = \frac{P(A'|A) \cdot P(A)}{P(A'|A) \cdot P(A) + P(A'|B) \cdot P(B)} = \frac{\frac{5}{6} \cdot 0.84}{\frac{5}{6} \cdot 0.84 + \frac{1}{8} \cdot 0.16} = \frac{35}{36} \doteq 0.9722\ .$$

(2) (10 bodů) Náhodný vektor (X, Y) má spojité rovnoměrné rozdělení v množině

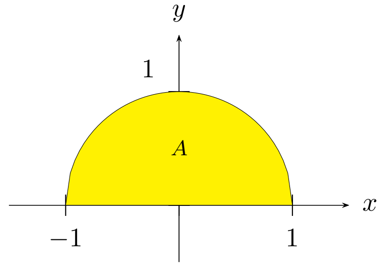
$$A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}\ .$$

Určete:

(a) sdruženou hustotu $f_{X,Y}(x,y)$ a marginální hustoty $f_X(x)$, $f_Y(y)$,

(b) rozhodněte, zda jsou náhodné veličiny X a Y závislé či nezávislé.

Řešení:
Množina A je půlkruh



(a) Sdružená hustota je tedy dána jako

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c & , \ (x,y) \in A \\ 0 & , \ \text{jinak,} \end{cases}$$

kde c je konstanta taková, aby integrál z hustoty byl roven 1, tedy

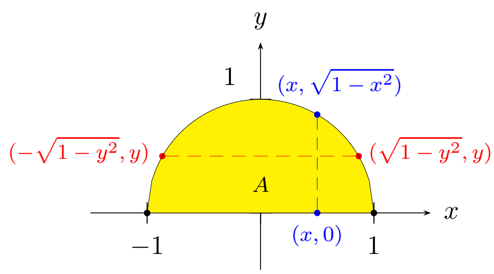
$$1 = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)\ dx\ dy = \iint\limits_{A} c\ dx\ dy = c \iint\limits_{A} 1\ dx\ dy = c \cdot \frac{\pi}{2}$$

neboli

$$c = \frac{2}{\pi}\ .$$

Integrál $\iint\limits_A 1\ dx\ dy$ jsme mohli buď skutečně spočítat (např. pomocí polárních souřadnic) nebo prostě využít jeho geometrickou interpretaci, tj. že je to obsah půlkruhu o poloměru 1.

Marginální hustota je nyní jen příslušně parciálně zintegrovaná sdružená hustota. Funkci $f_{X,Y}$ tedy vždy integrujeme podél vhodného řezu množiny A:



Pro $x \in \langle -1, 1\rangle$ tak máme

$$f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\ dy = \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{\pi}\ dy = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}$$

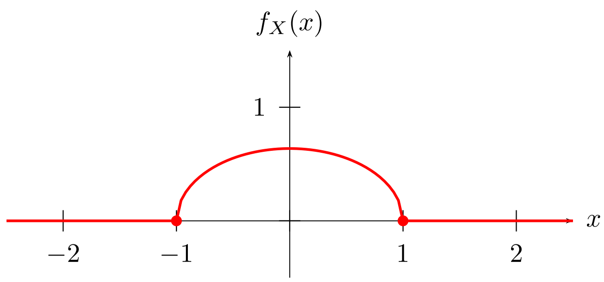
a pro $y \in \langle 0, 1\rangle$ máme

$$f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\ dx = \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{2}{\pi}\ dx = \frac{4}{\pi}\sqrt{1-y^2}\ .$$

Celkově tedy

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} & , \ x \in \langle -1, 1 \rangle \\ 0 & , \ \text{jinak,} \end{cases}$$

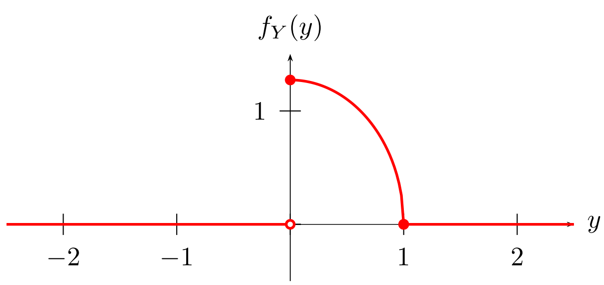
s grafem



a podobně

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{4}{\pi}\sqrt{1-y^2} & , \ y \in \langle 0, 1 \rangle \\ 0 & , \ \text{jinak,} \end{cases}$$

s grafem



(b) Veličiny X a Y jsou nezávislé právě když

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) \ \text{ pro všechna } \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ .$$

V případě existence sdružené hustoty je to ekvivalentní tomu, že

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \ \text{ pro SKORO všechna } \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ .$$

Tedy množina, kde to neplatí, má nulový obsah.

Speciálně, pro nezávislé veličiny musí platit následující (pouze nutná podmínka!):

Nechť

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f_{X,Y}(x,y) \neq 0\}$$

a $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jsou projekce na jednotlivé souřadné osy, tj. $\pi_1(x,y) = x$ a $\pi_2(x,y) = y$. Pokud jsou veličiny X a Y *nezávislé*, má množina

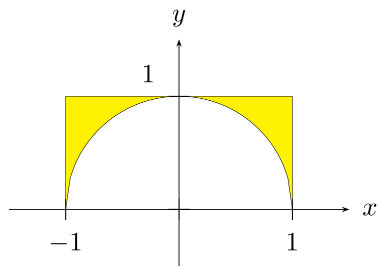
$$\Big(\pi_1(S) \times \pi_2(S)\Big) \setminus S$$

nulový obsah.

V našem konkretním případě $S = A$ a $\pi_1(A) = \langle -1, 1\rangle$ a $\pi_2(A) = \langle 0, 1\rangle$. Ovšem množina

$$\Big(\pi_1(A) \times \pi_2(A)\Big) \setminus A \;=\; \text{“obdélník”} \;\setminus\; \text{“půlkruh”}$$

tj.



zřejmě nulový obsah NEMÁ. Veličiny X a Y tudíž NEJSOU nezávislé.

(3) (10 bodů) Házíme 100-krát pravidelnou mincí. Pro náhodnou veličinu X představující počet rubů, určete pravděpodobnost $P(45 < X < 55)$

(a) výpočtem pomocí centrální limitní věty,

(b) odhadem pomocí Čebyševovy nerovnosti.

Řešení:
Pro $i = 1, \ldots, n$ (kde $n = 100$) si zavedeme veličiny

$$X_i = \begin{cases} 1 & , \text{ při } i\text{-tém hodu padl rub,} \\ \\ 0 & , \text{ při } i\text{-tém hodu padl líc.} \end{cases}$$

Veličiny X_i považujeme za nezávislé, s alternativním rozdělením s parametrem $p = 0.5$, střední hodnotou

$$E(X_i) = p = 0.5$$

a rozptylem

$$D(X_i) = p(1-p) = 0.5 \cdot 0.5 = 0.25\ .$$

Počet rubů pak je

$$X = \sum_{i=1}^{100} X_i$$

se střední hodnotou

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = n \cdot p = 100 \cdot 0.5 = 50$$

a rozptylem

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) = n \cdot p(1-p) = 100 \cdot 0.25 = 25\ .$$

(a) Odhad pomocí centrální limitní věty:
Použijeme normovanou veličinu

$$\mathrm{norm}(X) = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}} = \frac{X - 50}{5} \ ,$$

která má podle CLV přibližně rozdělení $N(0,1)$. Pomocí úprav nerovností můžeme psát:

$$P(45 < X < 55) = P\left(\frac{45-50}{5} < \frac{X-50}{5} < \frac{55-50}{5}\right) = P\Big(-1 < \mathrm{norm}(X) < 1\Big) \doteq$$

$$\doteq \Phi(1) - \Phi(-1) = 2 \cdot \Phi(1) - 1 \doteq 2 \cdot 0.8413 - 1 = 0.6826 \ .$$

(b) Odhad pomocí Čebyševovy nerovnosti:
Použijeme vztah, který už máme, a Čebyševova nerovnost nám pak dá

$$P(45 < X < 55) = P\Big(\big|\mathrm{norm}(X)\big| < 1\Big) \geq 1 - \frac{1}{1^2} = 0 \ ,$$

což je prostě maximum toho, co nám může Čebyševova nerovnost v tomto případě poskytnout.