3. cvičení z PSI

17. - 21. října 2016

3.1 (geometrická pravděpodobnost)

Tyč délky ℓ se náhodně rozpadne na 3 části. Jaká je pravděpodobnost, že z částí lze sestavit trojúhelník?

Řešení:
Tyč se rozpadne na části o délkách a, b a c, kde $0 < a, b, c$ a $a+b+c = \ell$. Za jevové pole si tak vezmeme

$$\Omega = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < a,b,c \;\;\&\;\; a+b+c = \ell\} \ .$$

To je rovnostranný trojúhelník o straně délky ℓ. Jeho plocha tak je $\mathrm{vol}(\Omega) = \frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2$. Abychom mohli sestavit trojúhelník, musí platit trojúhelníková nerovnost. Zajímá nás tedy jev

$$A = \{(a,b,c) \in \Omega \mid a+b > c \;\;\&\;\; b+c > a \;\;\&\;\; a+c > b\} \ ,$$

který v množině Ω vytváří trojúhelník, jehož vrcholy jsou středy stran trojúhelníku Ω. Velikost plochy A tak zřejmě je $\mathrm{vol}(A) = \frac{1}{4}\mathrm{vol}(\Omega)$. Proto máme

$$P(A) = \frac{\mathrm{vol}(A)}{\mathrm{vol}(\Omega)} = \frac{1}{4} = 0.25 \ .$$

K výpočtu lze použít také jevové pole $\Omega' = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < a,b \;\;\&\;\; a+b < \ell\}$, kde původní elementární jev (a,b,c) popíšeme pouze prvními dvěma složkami (a,b) a třetí je jednoznačně určena jako $c = \ell - (a+b)$. Množina Ω' je tentokrát rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník s přeponou délky ℓ. Odpovídající jev sestrojení trojúhelníku pak je

$$A' = \{(a,b) \in \Omega' \mid a+b > \ell - (a+b) \;\;\&\;\; b + \ell - (a+b) > a \;\;\&\;\; a + \ell - (a+b) > b\} =$$

$$= \{(a,b) \in \Omega' \mid a+b > \frac{\ell}{2} \;\;\&\;\; a,b < \frac{\ell}{2}\} \ .$$

Množina A' je opět trojúhelník s vrcholy ve středech stran trojúhelníku Ω'.

Co není u těchto příkladů ihned zřejmé, je to, zda oba přístupy budou dávat stejný výsledek. Zde zřejmě ano. Důvod je obecněji ten, že máme zobrazení $\varphi : \Omega' \to \Omega$, $\varphi(a,b) = (a,b,\ell-a-b)$ které parametrizuje původní množinu Ω pomocí množiny Ω' a přitom platí $\varphi(A') = A$. Toto zobrazení je vlastně "natažení"trojúhelníku Ω' do podoby trojúhelníku Ω. Množina A' se přitom natáhne stejným způsobem (do množiny A) a proto poměry velikostí zůstanou zachovány. Tedy pravděpodobnost vyjde stejně.

3.2 (geometrická pravděpodobnost)

Určete pravděpodobnost toho, že kořeny rovnice $x^2 + 2ax + b = 0$ jsou reálné, pokud parametry $a, b \in \mathbb{R}$ jsou stejně možné v obdélníku $|a| \leq n$ a $|b| \leq m$? Hodnoty n a m jsou pevně zvolené.

Řešení:
Jevové pole bude

$$\Omega = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid |a| \leq n \;\&\; |b| \leq m\} \ .$$

Jev $A =$ "*kořeny rovnice jsou reálné*" popíšeme pomocí nezápornosti diskriminantu jako

$$A = \{(a,b) \in \Omega \mid (2a)^2 - 4b \geq 0\} = \{(a,b) \in \Omega \mid a^2 \geq b\} \ .$$

Velikost plochy jevového pole je $\mathrm{vol}(\Omega) = 4mn$. Plocha A je určena tím, co je pod grafem funkce $f(a) = a^2$ a současně v obdélníku $\langle -n, n\rangle \times \langle -m, m\rangle$. Záleží tedy na tom, kde graf funkce f protne hrany obdélníku.

Pokud je $\sqrt{m} \leq n$, pak

$$\mathrm{vol}(A) = 2 \cdot \Big(nm + \int_0^{\sqrt{m}} a^2 \ \mathrm{d}a + (n - \sqrt{m})m\Big) = 4nm - \frac{4}{3} m\sqrt{m} \ .$$

A pokud je $\sqrt{m} \geq n$ (neboli $m \geq n^2$), pak máme

$$\mathrm{vol}(A) = 2 \cdot \Big(nm + \int_0^{n} a^2 \ \mathrm{d}a\Big) = 2nm + \frac{2}{3} n^3 \ .$$

Celkem tak máme

$$P(A) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{3}\frac{\sqrt{m}}{n} & , \text{ pokud } \sqrt{m} \leq n \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\frac{n^2}{m} & , \text{ pokud } \sqrt{m} \geq n \ . \end{cases}$$

Speciálně vidíme, že

- pokud $\sqrt{m} \leq n$, pak
$$P(A) \geq 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$
- a pro $\sqrt{m} \geq n$ je
$$\frac{1}{2} < P(A) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \ .$$

Při tomto zadání tedy vždy máme více jak poloviční pravděpodobnost, že kořeny rovnice jsou reálné!

3.3 ((ne)závislost jevů)

Pro hod dvěma mincemi uvažujme jevy:

$A =$ "na první minci padl líc",
$B =$ "na druhé minci padl líc",
$C =$ "na mincích padly různé výsledky".

Jak je to s nezávislostí jevů A, B, C?

Řešení:
Jevové pole bude $\Omega = \{\text{líc, rub}\} \times \{\text{líc, rub}\}$ a každý elementární jev bude stejně pravděpodobný. Pak máme

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{4}$$

a

$$P(A \cap B \cap C) = 0$$

protože $A \cap B \cap C = \emptyset$.

Tedy

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B)$$

a podobně je to pro ostatní případy, zatímco

$$P(A \cap B \cap C) = 0 \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C).$$

Jevy jsou tak po dvou nezávislé, ale ne celkově nezávislé.

3.4 (operace s nezávislými jevy)

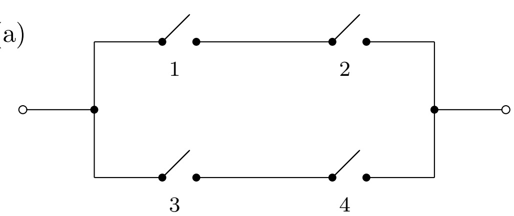
Čtyři spínače v zabezpečovacím zařízení pracují nezávisle, každý s pravděpodobností $p \in (0, 1)$. Jsou zapojeny (viz obrázek)

(a) po dvou sériově a pak paralelně

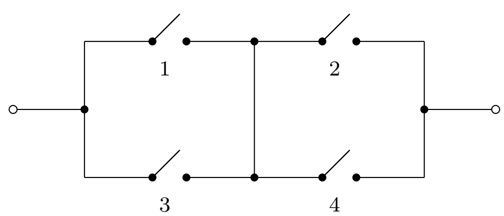
(b) po dvou paralelně a pak sériově.

S jakou pravděpodobností bude zařízení propouštět proud v jednotlivých případech? Pro které zapojení je tato pravděpodobnost větší?

(a)



(b)



Řešení:

Pro $i = 1, 2, 3, 4$ si označme jevy

A_i= "*i-tý spínač je zapnutý*"

B= "*zařízením prochází proud*"

Víme, že jevy $A_1, \ldots, A_4$ jsou nezávislé a $P(A_i) = p$.

(a) Aby proud procházel zařízením, musí jít buď horní větví nebo spodní větví:

$$B = (A_1 \cap A_2) \cup (A_3 \cap A_4) \ .$$

Pro pravděpodobnost pak (díky nezávislosti) máme

$$P(B) = P\Big((A_1 \cap A_2) \cup (A_3 \cap A_4)\Big) = P(A_1 \cap A_2) + P(A_3 \cap A_4) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) =$$

$$= p^2 + p^2 - p^4 = p^2(2 - p^2) \ .$$

(b) Aby proud procházel zařízením, musí projít levou částí a současně pravou částí:

$$B = (A_1 \cup A_3) \cap (A_2 \cup A_4) \ .$$

Z nezávislosti jevů A_i vyplývá, že jevy $A_1 \cup A_3$ a $A_2 \cup A_4$ jsou také nezávislé. Můžeme tak psát

$$P(B) = P\Big((A_1 \cup A_3) \cap (A_2 \cup A_4)\Big) = P(A_1 \cup A_3) \cdot P(A_2 \cup A_4) =$$

$$= \Big(P(A_1) + P(A_3) - P(A_1) \cdot P(A_3)\Big) \cdot \Big(\cdots\Big) = (2p - p^2)^2 = p^2(2-p)^2 \ .$$

Už ze schématu zapojení je jasné, že obecně větší pravděpodobnost průchodu proudu zařízením je v případě (b), kde je jeden spoj navíc. To lze potvrdit i z vypočtené pravděpodobnosti:

$$p^2(2-p^2) < p^2(2-p)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < 2p^2(p-1)^2 \ .$$

Použili jsme to, že pokud jevy $A_1, \ldots, A_n$ jsou nezávislé, pak také jevy $A_1 \cup A_2, A_3, \ldots, A_n$ jsou nezávislé. Nezávislé jevy tedy můžeme libovolně sdružovat (daný jev vždy sjednotíme vždy jen s jednou skupinou jevu) a výsledek jsou opět nezávislé jevy.

3.5 (Kolmogorův model)

Zjistěte, zda $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je Kolmogorův model pravděpodobnosti, je-li dáno:

- $\Omega = \{1, 2, 3\}$,
- $\mathcal{A} = \big\{\emptyset, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2,3\}\big\}$,
- $P(A) = \frac{1}{3}|A|$, $A \in \mathcal{A}$ (kde $|A|$ je počet prvků množiny A).

Řešení:

Pro Kolmogorův model je potřeba ověřit, že $\mathcal{A}$ je σ-algebra:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$,
- $A \in \mathcal{A} \ \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$,
- $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A} \ \Rightarrow \ \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$,

a že $P : \mathcal{A} \to \langle 0, 1 \rangle$ je pravděpodobnost:

- $P(\Omega) = 1$,
- $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}$ & A_n jsou navzájem disjunktní $\Rightarrow \ P\big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\big) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n)$,

První dvě podmínky pro σ-algebru jsou zřejmě splněny, poslední ne, protože

$$\{2\}, \{3\} \in \mathcal{A}, \quad \text{ale} \quad \{2\} \cup \{3\} \notin \mathcal{A} \ .$$

Množina $\mathcal{A}$ tedy *není* σ-algebra a $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ proto *není* Kolmogorův model.

Tuto nedokonalost, ale můžeme spravit tak, že k $\mathcal{A}$ přidáme prvky, které chybí: tedy prvek $\{2\} \cup \{3\} = \{2, 3\}$ a $\overline{\{2, 3\}} = \{1\}$. Dostaneme tak celou potenční množinu $\mathcal{A}' = \exp(\Omega)$, která σ-algebrou určitě je.

Teď ještě ukážeme, že $P : \mathcal{A}' \to \langle 0, 1 \rangle$ je v tomto případě pravděpodobnost. Zřejmě

$$P(\Omega) = \frac{3}{3} = 1$$

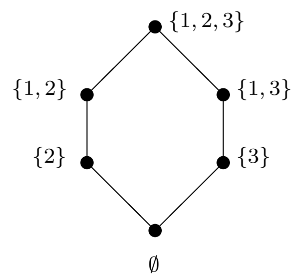
a dále pro $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \exp(\Omega)$ navzájem disjunktní máme

$$P\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \frac{1}{3}\left|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right| = \frac{1}{3}\sum_{n\in\mathbb{N}} |A_n| = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n) \ .$$

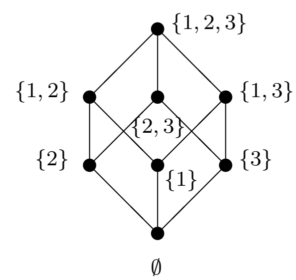
To, že jsme ukázali, že P je pravděpodobnost nakonec není žádné překvapení, protože to celé je prostě Laplaceův model pravděpodobnosti (tj. počet příznivých případů ku počtu všech.)

Uspořádané množiny (v našem případě inkluzí) můžeme ještě zakreslit tzv. Hasseovým diagramem (větší prvky se zakreslují nad menší a spojují se čárkou, pokud už mezi nimi žádné další prvky nejsou). Dostáváme tak:

$\mathcal{A}$:



$\exp(\Omega)$:



To, že jsme ve druhém případě dostali obrázek, který vypadá jako krychle, není náhoda. Konečné σ-algebry budou mít vždy Hasseův diagram ve tvaru vícerozměrné krychle.

3.6 (náhodná veličina)

Zjistěte, zda $X : \Omega \to \mathbb{R}$ je náhodná veličina, pokud $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je

- $\Omega = \{a, b, c\}$,
- $\mathcal{A} = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\big\}$,
- $P(A) = \frac{1}{3}|A|$, $A \in \mathcal{A}$.

a platí-li, že

$X(a) = 1,\ X(b) = 2,\ X(c) = 3$.

Řešení:
Nejdříve bychom měli zkontrolovat, jestli máme opravdu Kolmogorův model:

Systém $\mathcal{A}$ je zřejmě uzavřen na sjednocení i na doplňky. Tedy $\mathcal{A}$ je σ-algebra, která je navíc podalgebrou $\exp(\{a, b, c\})$.

Z tohoto důvodu budou splněny i požadavky na pravděpodobnost, protože ta má stejný předpis jako v předchozím příkladu, kde už to, jak víme, funguje. Tím spíše to musí platit i pro menší systém množin. Tedy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je opravdu Kolmogorův model.

Náhodná veličina je takové zobrazení, že vzor každého intervalu v $\mathbb{R}$ je množina z $\mathcal{A}$. Tuto vlastnost stačí ověřit jen pro určité typy intervalů v $\mathbb{R}$:

$$X \text{ je náhodná veličina} \quad \Leftrightarrow \quad (\forall t \in \mathbb{R}) \ \ X^{-1}\Big((-\infty, t\rangle\Big) \in \mathcal{A}$$

Podíváme se, jak vypadají vzory všech potřebných intervalů:

$$X^{-1}\Big((-\infty,t\rangle\Big) = \{\omega\in\Omega \mid X(\omega)\le t\} = \begin{cases} \emptyset & ,\ t\in(-\infty,1) \\ \{a\} & ,\ t\in\langle 1,2) \\ \{a,b\} & ,\ t\in\langle 2,3) \\ \{a,b,c\} & ,\ t\in\langle 3,+\infty) \end{cases}$$

X tedy není náhodná veličina, protože např.

$$X^{-1}\Big((-\infty,2.5\rangle\Big) = \{\omega\in\Omega \mid X(\omega)\le 2.5\} = \{a,b\} \notin \mathcal{A}\ .$$

Problematické jsou hodnoty $t\in\langle 2,3)$. K této situaci došlo proto, že zobrazení X oddělilo svými hodnotami prvky b a c, které jsou v rámci σ-algebry $\mathcal{A}$ nerozlišitelné (není už žádná menší množina z $\mathcal{A}$, která by obsahovala b a neobsahovala c nebo naopak).

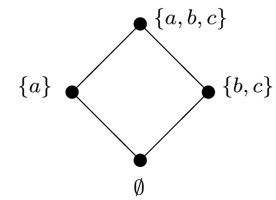
Jak tedy zvolit nějakou jinou (nekonstantní) náhodnou veličinu Y na Ω? Stačí např. položit

$$Y(a)=1,\ Y(b)=Y(c)=2\ .$$

(Problémového intervalu jsme se zbavili tak, že všem prvkům z množiny $\{\omega\in\Omega \mid X(\omega)\in\langle 2,3)\}$ jsme "nastavili" nějakou stejnou společnou hodnotu.)

Můžeme si ještě pro názornost zakreslit Hasseův diagram pro $\mathcal{A}$:

$\mathcal{A}:$



3.7 (geometrické rozdělení)

Bob a Alice házejí střídavě na koš, dokud se jeden z nich netrefí. Začíná Alice. Pravděpodobnost, že se při hodu trefí Alice je a, pravděpodobnost, že se při hodu trefí Bob je b.

Jaká je pravděpodobnost, že vyhraje Alice a jaká je pravděpodobnost, že vyhraje Bob?

Řešení:

Pořadí, jak jednotliví hráči hází míč, je toto (samozřejmě, pokud k hodu vůbec dojde):

1.hod: Alice, 2.hod: Bob, 3.hod: Alice, 4.hod: Bob, atd.

Označme si jevy

- A= "*vyhraje Alice*"
- B= "*vyhraje Bob*"
- T_i= "*proběhlo i hodů a při i-tém hodu se hráč, který zrovna hází,* ***trefí***"
- N_i= "*proběhlo i hodů a při i-tém hodu se hráč, který zrovna hází,* ***netrefí***"

Současně víme, že

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} T_{2k-1}, \qquad B = \bigcup_{k=1}^{\infty} T_{2k}$$

a $\{T_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ je disjunktní systém jevů.

Pozor, T_i *nejsou* v důsledku toho nezávislé (protože $P(T_i \cap T_j) = P(\emptyset) = 0$ pro $i \neq j$)!

K výpočtu pravděpodobnosti $P(T_i)$ využijeme už známý trik, tj. klesající posloupnosti jevů:

$$N_1 \supseteq N_2 \supseteq \cdots \supseteq N_{i-1} \supseteq T_i$$

a toho, že známe podmíněné pravděpodobnosti mezi jednotlivými členy této posloupnosti (to jsou přesně ty pravděpodobnosti, že se při konkrétním hodu daný hráč netrefí, případně trefí):

$$P(T_i) = P(N_1) \cdot P(N_2|N_1) \cdots P(N_{i-1}|N_{i-2}) \cdot P(T_i|N_{i-1}) \ .$$

Dostaneme tak

$$P(T_{2k-1}) = \underbrace{(1-a)(1-b) \cdots (1-a)(1-b)}_{2(k-1) \text{ členů}} \cdot a$$

$$P(T_{2k}) = \underbrace{(1-a)(1-b) \cdots (1-a)(1-b)}_{2(k-1) \text{ členů}} \cdot (1-a)b$$

Výsledné pravděpodobnosti výher jsou tedy

$$P(A) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} T_{2k-1}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(T_{2k-1}) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big((1-a)(1-b)\Big)^{k-1} \cdot a =$$

$$= \frac{a}{1-(1-a)(1-b)} = \frac{a}{a+b-ab} \ .$$

a

$$P(B) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} T_{2k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(T_{2k}) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big((1-a)(1-b)\Big)^{k-1} \cdot (1-a)b =$$

$$= \frac{(1-a)b}{1-(1-a)(1-b)} = \frac{b-ab}{a+b-ab} \ .$$

Současně vidíme, že $P(A) + P(B) = 1$ a tedy pravděpodobnost toho, že hra neskončí a bude se házet nekonečněkrát, je nulová.

A kde se objevuje to *geometrické rozdělení*? Uvažujme Alici a Boba jako jednu skupinu a hru rozdělme na kola, kde kolo bude znamenat, že vždy seskupíme dohromady nejdříve hod Alice a pak hod Boba. Pravděpodobnost q, že (pokud se kolo uskuteční) tak se alespoň jeden ze skupiny v daném kole trefí, je zřejmé $q = a + (1-a)b = a + b - ab$ (buď se trefí Alice anebo ne a pak se musí trefit Bob).

Uvažujme teď náhodnou veličinu $X : \Omega \to \mathbb{R}$ definovanou jako

$X =$"*počet neúspěšných kol před prvním úspěšným kolem*".

Pak je

$$P(X = k) = (1-q)^k q$$

což znamená, že veličina X má geometrické rozdělení s kvocientem q.

(Ve skutečnosti jsme při definici veličiny X vynechali případ, kdy hra neskončí. Tento případ má ale nulovou pravděpodobnost, takže na definici veličiny zde nezáleží - na jakékoliv výpočty s X to nebude mít vliv.)

Úloha se dá ještě řešit následujícím způsobem:

Pokud se uskuteční první dva neúspěšné hody (tj. nastane jev N_2), můžeme si představit, že hra vlastně začíná znovu. To vyjádříme takto:

$$P(A|N_2) = P(A) \quad \text{a} \quad P(B|N_2) = P(B) \ .$$

Díky disjunktnosti jevů T_i máme

$$P(A) = P(T_1) + P\left(\bigcup_{k=2}^{\infty} T_{2k-1}\right)$$

a zřejmě platí

$$\bigcup_{k=2}^{\infty} T_{2k-1} = \text{“\textit{Alice vyhraje při jiném než 1. hodu}”} = A \cap N_2$$

Takže můžeme psát

$$P\left(\bigcup_{k=2}^{\infty} T_{2k-1}\right) = P(A \cap N_2) = P(A|N_2) \cdot P(N_2) =$$
$$= P(A) \cdot (1-a)(1-b) \ .$$

Dosazením tak dostáváme poměrně intuitivní vztah

$$P(A) = a + P(A) \cdot (1-a)(1-b) \ ,$$

ze kterého vypočítáme

$$P(A) = \frac{a}{a+b-ab} \ .$$

Podobně určíme druhou pravděpodobnost z rovnice

$$P(B) = (1-a)b + P(B) \cdot (1-a)(1-b)$$

jako

$$P(B) = \frac{b-ab}{a+b-ab} \ .$$