4. cvičení z PSI

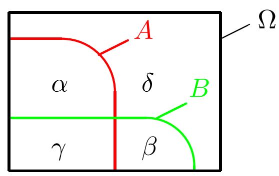
24. - 28. října 2016

4.1 (podmíněná nezávislost)

(a) Nechť A, B jsou takové jevy, že

$$P(A \setminus B) = \alpha, \quad P(B \setminus A) = \beta, \quad P(A \cap B) = \gamma \quad \text{a} \quad P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \delta$$

(viz obrázek). Tedy platí $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ a $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$.
Ukažte, že pak A a B jsou nezávislé jevy právě když $\det \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \delta \\ \gamma & \beta \end{smallmatrix}\right) = 0$.



(Podobné tvrzení platí pro Laplaceův model:
A a B jsou nezávislé jevy právě když $\det \left(\begin{smallmatrix} |A \setminus B| & |\overline{A} \cap \overline{B}| \\ |A \cap B| & |B \setminus A| \end{smallmatrix}\right) = 0$.
případně pro geometrickou pravděpodobnost:
A a B jsou nezávislé jevy právě když $\det \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{vol}(A \setminus B) & \mathrm{vol}(\overline{A} \cap \overline{B}) \\ \mathrm{vol}(A \cap B) & \mathrm{vol}(B \setminus A) \end{smallmatrix}\right) = 0$.

(b) Nechť $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$ je pravděpodobnostní prostor s Laplaceovou pravděpodobností.

(i) Položme $A = \{1, 2, 6\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ a $C = \{1, 2, 3, 4\}$. Ukažte, že jevy A a B jsou *závislé* a přitom *podmíněně nezávislé* za podmínky C.

(ii) Položme $A' = \{1, 4\}$, $B' = \{1, 2, 3\}$ a $C' = A \cup B$. Ukažte, že jevy A' a B' jsou *nezávislé* a přitom *podmíněně závislé* za podmínky C'.

Řešení:
(a) Máme $P(A) = \alpha + \gamma$ a $P(B) = \beta + \gamma$. Pak zřejmě platí, že $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ právě když

$$\gamma = (\alpha + \gamma) \cdot (\beta + \gamma)$$

neboli

$$0 = \alpha\beta + (\alpha + \beta + \gamma - 1)\gamma = \alpha\beta - \delta\gamma = \det \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \delta \\ \gamma & \beta \end{smallmatrix}\right) \ .$$

(b, i) Máme $A \cap B = \{1\}$ a $|\Omega| = 6$ takže

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \neq \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = P(A) \cdot P(B)$$

a jevy A a B tudíž jsou *závislé*.
Pro podmíněnou pravděpodobnost v Laplaceově modelu platí, že

$$P(X|C) = \frac{P(X \cap C)}{P(C)} = \frac{|X \cap C|}{|C|} \ .$$

Protože máme

$$A \cap B \cap C = \{1\}, \quad A \cap C = \{1, 2\} \quad \text{a} \quad B \cap C = \{1, 3\}$$

dostaneme

$$P(A \cap B | C) = \frac{1}{4} = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} = P(A|C) \cdot P(B|C) \ .$$

Jevy A a B jsou tedy *podmíněně nezávislé* za podmínky C.

(b, ii) Opět máme $A' \cap B' = \{1\}$ takže

$$P(A' \cap B') = \frac{1}{6} = \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} = P(A') \cdot P(B')$$

a jevy A' a B' tudíž jsou *nezávislé*.

A dále máme $|C| = 4$

$$A \cap B \cap C = A \cap B = \{1\}, \quad A \cap C = A \quad \text{a} \quad B \cap C = B$$

dostaneme

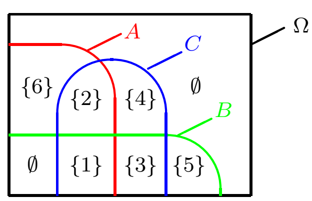
$$P(A \cap B | C) = \frac{1}{4} = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} = P(A|C) \cdot P(B|C) \ .$$

Jevy A a B jsou tedy *podmíněně závislé* za podmínky C.

Pro řešení (b) můžeme také využít vztah z (a) takto:

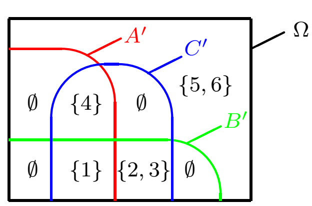
(i): A a B jsou *závislé*: $\det \begin{pmatrix} |A \setminus B| & |\overline{A} \cap \overline{B}| \\ |A \cap B| & |B \setminus A| \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq 0$.

A a B jsou *nezávislé při podmínce* C: $\det \begin{pmatrix} |(A \setminus B) \cap C| & |\overline{A} \cap \overline{B} \cap C| \\ |A \cap B \cap C| & |(B \setminus A) \cap C| \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$.



(ii): A' a B' jsou *nezávislé*: $\det \begin{pmatrix} |A' \setminus B'| & |\overline{A'} \cap \overline{B'}| \\ |A' \cap B'| & |B' \setminus A'| \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 0$.

A' a B' jsou *závislé při podmínce* C': $\det \begin{pmatrix} |(A' \setminus B') \cap C'| & |\overline{A'} \cap \overline{B'} \cap C'| \\ |A' \cap B' \cap C'| & |(B' \setminus A') \cap C'| \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq 0$.



4.2 (Bayesovská pravděpodobnost)

Po skončení aktivní služby odchází do důchodu 60 námořních kapitánů. Z této skupiny jich 5 zažilo ztroskotání. Podle statistiky při ztroskotání zahyne třetina kapitánů. Odhadněte pravděpodobnost, že kapitán během své aktivní služby zažije ztroskotání. (Možnost opakovaného ztroskotání a úmrtí z jiné příčiny během aktivní služby zanedbáváme.)

Řešení:
Uvažujme jevy:

$A =$ "kapitán se dožije důchodu",
$B =$ "kapitán zažije ztroskotání" .

Ze zadání máme vztahy

$$P(B|A) = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}\ , \qquad P(\overline{A}|B) = \frac{1}{3} \quad \text{a} \quad \overline{A} \subseteq B$$

kde poslední vztah odpovídá tomu, že během aktivní služby nemůže nastat úmrtí z jiné příčiny než kvůli ztroskotání. Z posledního vztahu plyne také $\overline{B} \subseteq A$ a tudíž dostáváme tyto podmíněné pravděpodobnosti

$$P(B|\overline{A}) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = 1 \quad \text{a} \quad P(A|\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = 1\ .$$

Nás zajímá $P(B)$. Z Bayesovy věty máme:

$$P(B) = \frac{P(B|A)}{P(A|B)} \cdot P(A) = \frac{\frac{1}{12}}{1 - \frac{1}{3}} \cdot P(A) = \frac{1}{8} \cdot P(A)\ .$$

Pomocí věty o úplné pravděpodobnosti můžeme teď zase $P(A)$ vyjádřit pomocí $P(B)$:

$$P(A) = P(A|B) \cdot P(B) + P(A|\overline{B}) \cdot P(\overline{B}) = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot P(B) + 1 \cdot \Big(1 - P(B)\Big) =$$
$$= 1 - \frac{1}{3}P(B)\ .$$

Celkem tedy

$$P(B) = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{3}P(B)\right) \quad \text{a} \quad P(B) = \frac{3}{25} = 0.12\ .$$

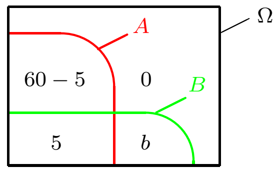
Použitý vzorec je obecně:

$$P(B) = \frac{P(B|A)}{P(A|B)} \cdot P(A) = \frac{P(B|A)}{P(A|B)} \cdot \Big[P(A|B) \cdot P(B) + P(A|\overline{B}) \cdot \big(1 - P(B)\big)\Big]$$

neboli

$$P(B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A|\overline{B})}{P(B|A) \cdot P(A|\overline{B}) + \big(1 - P(B|A)\big) \cdot P(A|B)} =$$
$$= \frac{P(B|A) \cdot P(A|\overline{B})}{P(B|A) \cdot P(A|\overline{B}) + P(\overline{B}|A) \cdot P(A|B)} =$$
$$= \frac{\frac{1}{12} \cdot 1}{\frac{1}{12} \cdot 1 + \frac{11}{12} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{3}{25}\ .$$

Můžeme také použít intuitivnější přístup:



kde čísla znamenají velikost dané množiny ve smyslu geometrické pravděpodobnosti (např. $\mathrm{vol}(A \cap B) = 5$ apod.). Přitom víme ještě, že

$$\frac{1}{3} = P(\overline{A}|B) = \frac{b}{5+b}$$

takže

$$\mathrm{vol}(B \setminus A) = b = 2.5 \ .$$

Proto máme

$$P(B) = \frac{5+b}{60+b} = \frac{5+2.5}{60+2.5} = \frac{3}{25} \ .$$

4.3 (Bayesovská pravděpodobnost)

Dveřní rám v obchodě se rozezvučí, pokud se někdo pokusí projít se zbožím, které nemá deaktivovaný čip. Systém spustí alarm v 95% případů, kdy prochází někdo s kradeným zbožím. V 5% se deaktivace čipu z nějakého důvodu nepovede a poplach bude spuštěn i při projití s legálně zakoupeným zbožím. Statisticky jsou 3% návštěvníků zloději a ostatní chtějí zboží normálně zakoupit. Jaká je pravděpodobnost, že alarm správně upozorní na kradené zboží?

Řešení:
Určíme si jevy:

$A =$ "rozezní se alarm",
$K =$ "zboží je kradené",

I když zadání může na první pohled svádět k jiné interpretaci, pravděpodobnosti budou tyto:

$$P(A|K) = 0.95$$

$$P(A|\overline{K}) = 0.05$$

$$P(K) = 0.03$$

Přestože součet prvních dvou podmíněných pravděpodobností dává 1, jde obecně o dvě nezávislé hodnoty a ne doplňkové pravděpodobnosti!

Nás teď zajímá, jaká bude pravděpodobnost $P(K|A)$. Z Bayesovy věty máme

$$P(K|A) = \frac{P(A|K)P(K)}{P(A)} = \frac{P(A|K)P(K)}{P(A|K)P(K) + P(A|\overline{K})P(\overline{K})} =$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{P(A|\overline{K})(1-P(K))}{P(A|K)P(K)}} = \frac{1}{1 + \frac{0.05\cdot(1-0.03)}{0.95\cdot 0.03}} = \frac{57}{154} \doteq 0.37.$$

To se zdá být poměrně málo ve srovnání se zadanými hodnotami. Ve skutečnosti je to ale dáno velmi nízkým počtem zlodějů a rám tak vlastně spíše detekuje to, že se nepovede deaktivace čipu při obvyklém nákupu (viz doplňková pravděpodobnost $P(\overline{K}|A) \doteq 1 - 0.37 = 0.63$). Je také vidět, že čím nižší bude počet zlodějů, tím nespolehlivější bude v tomto směru rám - a naopak rám bude vysoce spolehlivý, pokud bude krást skoro každý...

Také bychom si mohli uvědomit, co vlastně říkají podmíněné pravděpodobnosti v zadání a jak se asi prakticky zjistí jejich hodnota:

$P(A|K)$: V obchodě si zaznamenávají počet úspěšně odhalených krádeží s pomocí rámu. Aby ale věděli, kolik zboží jim celkově chybí, musí udělat inventuru. Pak teprve mohou zjistit, jak účinný je v tomto směru rám.

$P(A|\overline{K})$: Zde zase zaznamenávají, kolikrát rám zazvonil "zbytečně", tj. kolik nastalo chyb při deaktivaci čipu u pokladny, a porovnají to s tím, kolik zboží prodali.

4.4 (Bayesovská pravděpodobnost)

Máme 4 krabice stejného vzhledu. V první jsou 3 bílé a 2 černé koule, ve druhé jsou 2 bílé a 2 černé koule, ve třetí je 1 bílá a 4 černé koule, ve čtvrté 5 bílých a 1 černá koule. Pokud nám někdo řekl, že náhodně vybral jednu z krabic a vytáhl 1 kouli, která byla bílá, s jakou pravděpodobností můžeme usuzovat, že v téže krabici se nachází alespoň 3 černé koule?

Řešení:

Označme jevy:

$A_i =$ "byla vybrána i-tá krabice",
$B =$ "koule vytažená z vybrané krabice je bílá".

pro $i = 1, 2, 3, 4$. Víme, že A_1, A_2, A_3 a A_4 je úplný disjunktní systém jevů, o kterých předpokládáme, že jsou stejně pravděpodobné. Tedy

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = \frac{1}{4}$$

$$P(B|A_1) = \frac{3}{5} \quad P(B|A_2) = \frac{2}{4} \quad P(B|A_3) = \frac{1}{5} \quad P(B|A_4) = \frac{5}{6}\ .$$

Protože jediná krabice obsahující alespoň 3 černé koule je třetí krabice, zajímá nás $P(A_3|B)$. Z Bayesovy věty máme:

$$P(A_3|B) = \frac{P(B|A_3) \cdot P(A_3)}{P(B)}$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{4} P(B|A_i) \cdot P(A_i) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{5} + \frac{2}{4} + \frac{1}{5} + \frac{5}{6}\right) = \frac{8}{15} \doteq 0.5333$$

a tedy

$$P(A_3|B) = \frac{1/5 \cdot 1/4}{8/15} = \frac{3}{32} = 0.09375\ .$$

Ještě je dobré uvědomit si, jak vypadá Kolmogorův model, speciálně jaké jsou pravděpodobnosti elementárních jevů:

- elementární jev ω bude dvojice "(výběr krabice, vytažení koule z této krabice)"a Ω bude tedy množina všech takových ω,
- $A_i = \{\omega \in \Omega \mid \omega = (\text{výběr } i\text{-té krabice, vytažení koule z této krabice})\}$,
- pro počet krabic $k = 4$ a počet koulí k_i v i-té krabici pak pro $\omega \in A_i$ máme $P(\{\omega\}) = \frac{1}{k \cdot k_i}$,
- pravděpodobnost jevu A_i, tedy výběr i-té krabice, pak je $P(A_i) = \sum_{\omega \in A_i} \frac{1}{k \cdot k_i} = \frac{k_i}{k \cdot k_i} = \frac{1}{k}$.

Můžeme si tedy všimnout, že pravděpodobnost vytažení koule z dané vybrané krabice nejsou všechny stejné, zatímco pravděpodobnosti výběru dané krabice ano.

Jak by situace vypadala, kdybychom v zadání předpokládali, že koule nevybíráme z krabic, ale sesypeme je do jedné nádoby, přičemž si na každou z nich napíšeme z jaké krabice pochází? Pravděpodobností se pak změní:

- elementární jev ω' bude dvojice "(číslo krabice, koule pocházející z krabice s tímto číslem)"a Ω' bude tedy množina všech takových ω',
- jev $A_i' = \{\omega' \in \Omega' \mid \omega' = (i, \text{koule pocházející z } i\text{-té krabice})\}$ představuje všechny koule, které pocházejí z i-té krabice,
- protože nyní taháme koule z nádoby, budeme považovat pravděpodobnost jejich vytažení za stejnou pro všechny koule, tj. $P(\{\omega\}) = \frac{1}{K}$, kde $K = \sum_j k_j$,
- pravděpodobnost jevu A_i', tedy podíl počtu koulí z i-té krabice, pak bude $P(A_i') = \sum_{\omega \in A_i'} \frac{1}{K} = \frac{k_i}{K}$.

Sesypáním koulí jsme tak způsobili to, že šance na vytažení kterékoliv koule se teď vyrovnaly a naopak pravděpodobnosti "příslušející krabicím"jsou různé. Pokud bychom tedy řešili takto pozměněné zadání, tak pro jev

B' = "koule vytažená z nádoby je bílá"

a úplný disjunktní systém jevů A_1', A_2', A_3' a A_4' dostáváme (s celkovým počtem koulí $5 + 4 + 5 + 6 = 20$), že

$$P(A_1') = \frac{5}{20} \qquad P(A_2') = \frac{4}{20} \qquad P(A_3') = \frac{5}{20} \qquad P(A_4') = \frac{6}{20}$$

$$P(B'|A_1') = \frac{3}{5} \qquad P(B'|A_2') = \frac{2}{4} \qquad P(B'|A_3') = \frac{1}{5} \qquad P(B'|A_4') = \frac{5}{6}\ .$$

Opět jediná krabice obsahující alespoň 3 černé koule je třetí krabice, takže nás bude zajímat $P(A_3'|B')$. Z Bayesovy věty máme:

$$P(A_3'|B') = \frac{P(B'|A_3') \cdot P(A_3')}{P(B')}$$

$$P(B') = \sum_{i=1}^{4} P(B'|A_i') \cdot P(A_i') = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{20} + \frac{2}{4} \cdot \frac{4}{20} + \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{20} + \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{20} = \frac{11}{20} = 0.55$$

(což se snadněji dalo spočítat prostě podílem bílých koulí v nádobě jako $P(B') = \frac{3+2+1+5}{20} = \frac{11}{20}$) a tedy

$$P(A_3'|B') = \frac{1/5 \cdot 5/20}{11/20} = \frac{1}{11} \doteq 0.0909$$

(což se opět snadněji dalo spočítat prostě podílem bílých koulí pocházejících ze 3. krabice v rámci všech bílých koulí, tj. $P(A_3'|B') = \frac{1}{3+2+1+5} = \frac{1}{11}$).

4.5 (Bayesovská pravděpodobnost)

V dílně pracuje 10 dělníků rozdělených do tří skupin, přičemž každý z dělníků vyrobí stejný počet výrobků. První skupina se skládá z 5 dělníků, druhá skupina ze 3 a třetí skupina ze 2 dělníků. Z výrobků první skupiny je jich 96% standardních, ze druhé skupiny je to 90% a z výrobků třetí skupiny je jich jen 85% standardních. Všechny výrobky jdou do skladu, ze kterého jsme náhodně vybrali jeden výrobek, a zjistili, že je standardní. Jaká je pravděpodobnost, že ho vyrobil někdo z první skupiny?

Řešení:
Označme si jevy:

A_i = "vybraný výrobek je vyrobený i-tou skupinou",
S = "vybraný výrobek je standardní".

Víme, že A_1, A_2 a A_3 je úplný disjunktní systém jevů a vzhledem k tomu, že každý dělník přispěje do skladu stejným počtem výrobků, je pravděpodobnost $P(A_i)$ úměrná počtu dělníků v i-té skupině. Tedy

$$P(A_1) = 0.5 \qquad P(A_2) = 0.3 \qquad P(A_3) = 0.2$$

$$P(S|A_1) = 0.96 \qquad P(S|A_2) = 0.9 \qquad P(S|A_3) = 0.85$$

a zajímá nás $P(A_1|S)$. Z Bayesovy věty máme:

$$P(A_1|S) = \frac{P(S|A_1) \cdot P(A_1)}{P(S)}$$

$$P(S) = \sum_{i=1}^{3} P(S|A_i) \cdot P(A_i) = 0.96 \cdot 0.5 + 0.9 \cdot 0.3 + 0.85 \cdot 0.2 = 0.92$$

a tedy

$$P(A_1|S) = \frac{0.96 \cdot 0.5}{0.92} = \frac{12}{23} \doteq 0.5217 \ .$$

I tady se podíváme, jak vypadá Kolmogorův model:

- $\Omega =$ "sklad výrobků", počet výrobků ve skladu je $N := |\Omega|$
- elementární jev $\omega \in \Omega$ je tedy vytažení daného výrobku ze skladu
- pravděpodobnost vytažení daného výrobku ze skladu bude dána Laplaceovou pravděpodobnosti, tj. $P(\{\omega\}) = \frac{1}{N}$
- $A_i = \{\omega \in \Omega \mid \text{vytažení } \omega \text{ takového výrobku, který byl vyroben } i\text{-tou skupinou}\}$
- pokud každý dělník vyrobí právě K výrobků a počet dělníků v i-té skupině je m_i a celkový počet dělníků je $m = 10$, pak je $N = K \cdot m$ a $|A_i| = K \cdot m_i$ a tedy $P(A_i) = \sum_{\omega \in A_i} \frac{1}{K \cdot m} = \frac{K \cdot m_i}{K \cdot m} = \frac{m_i}{m}$

Každý výrobek ze skladu má stejnou šanci, že ho vybereme.

Zase se můžeme zeptat, jak by situace vypadala, kdybychom v zadání předpokládali, že každá skupina má svůj sklad a ten kdo vybírá výrobky si nejdříve vybere náhodně sklad a v něm pak výrobek. Otázka pak bude, jaká je pravděpodobnost, že výrobek, který dostaneme a který je standardní, byl vybrán z prvního skladu. Pravděpodobnosti pak budou jiné:

- elementární jev ω' bude dvojice "(číslo skladu, výrobek pocházející z tohoto skladu)"a Ω' bude tedy množina všech takových ω',
- jev $A'_i = \{\omega' \in \Omega' \mid \omega' = (i, \text{výrobek pocházející z } i\text{-tého skladu})\}$ představuje všechny výrobky, které pocházejí z i-tého skladu,
- pro počet skladů $k = 3$ a počet výrobků k_i v i-tém skladu pak pro $\omega \in A'_i$ máme $P(\{\omega\}) = \frac{1}{k \cdot k_i}$,
- pravděpodobnost jevu A'_i, tedy výběr i-tého skladu, pak je $P(A'_i) = \sum_{\omega \in A'_i} \frac{1}{k \cdot k_i} = \frac{k_i}{k \cdot k_i} = \frac{1}{k}$.

Rozdělením výrobků do skladu jsme dostali to, že šance na výběr výrobků z různých skladů jsou různé (a výběry skladů považujeme za rovnocenné). Pokud bychom tedy řešili takto pozměněné zadání, tak pro jev

$S' =$ "vybraný výrobek je standardní"

a úplný disjunktní systém jevů A'_1, A'_2 a A'_3 dostáváme, že

$$P(A'_1) = P(A'_2) = P(A'_3) = \frac{1}{3}$$

$$P(S'|A'_1) = 0.96 \qquad P(S'|A'_2) = 0.9 \qquad P(S'|A'_3) = 0.85 \ .$$

Zajímá nás $P(A'_3|S')$. Z Bayesovy věty máme:

$$P(A'_3|S') = \frac{P(S'|A'_3) \cdot P(A'_3)}{P(S')}$$

$$P(S') = \sum_{i=1}^{3} P(S'|A'_i) \cdot P(A'_i) = \Big(0.96 + 0.9 + 0.85\Big) \cdot \frac{1}{3} = \frac{271}{300} \doteq 0.9033$$

a tedy

$$P(A'_3|S') = \frac{0.85 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{271}{300}} = \frac{85}{271} \doteq 0,3137$$

(což se snadněji dalo spočítat prostě podílem standardních výrobků pocházejících ze třetího skladu v rámci všech standardních výrobků, tj. $P(A'_3|B') = \frac{0.85 \cdot N}{0.96 \cdot N + 0.9 \cdot N + 0.85 \cdot N} = \frac{85}{271}$).

4.6 (Bayesovská pravděpodobnost v informačním kanálu se šumem)

Na vstupu informačního kanálu jsou posílány znaky "0" a "1", přitom znak "1" je posílán s pravděpodobností p. Na výstupu je daný znak přečten s pravděpodobností chyby $r = 0.1$, která nezávisí na frekvenci s jakou znak chodí (tj. na hodnotě p). Určete podmíněné pravděpodobnosti vstupu při známém výstupu, je-li

(a) $p = 0.4$,

(b) $p = 0.1$.

Řešení:
Máme jevy

V_i = "vyšleme znak i",
Z_i = "zachytíme znak i",

kde i je nula nebo jednička. Víme, že

$$\overline{V_0} = V_1 \quad \overline{Z_0} = Z_1 \quad \text{a} \quad P(V_1) = p \qquad \text{(Toto je vlastnost zprávy.)}$$

Pravděpodobnost r chyby znaku "1" na výstupu je dána procentem zachycených znaku "0" v množině odeslaných znaku "1", tj.

$$r = \frac{P(Z_0 \cap V_1)}{P(V_1)} = P(Z_0|V_1) \qquad \text{(Toto je vlastnost přijímacího zařízení.)}$$

Podobně $r = P(Z_1|V_0)$. Pro zjednodušení si uvědomíme, že funkce $\tilde{P}(A) := P(A|B)$ je pravděpodobnost v proměnné A, speciálně tedy

$$P(Z_0|V_0) = 1 - P(Z_1|V_0) = 1 - r$$

a

$$P(Z_1|V_1) = 1 - P(Z_0|V_1) = 1 - r.$$

Zajímají nás podmíněné pravděpodobnosti

$$P(V_i|Z_j) \quad \text{pro} \quad i, j \in \{0, 1\} \qquad \text{(Toto zajímá toho, kdo zprávy přijímá.)}$$

Opět stačí spočítat jen některé z nich (pro zbylé máme vztahy jako např. $P(V_0|Z_1) = 1 - P(V_1|Z_1)$.) Dále pro snadnější zápis ještě použijeme, že znak $1 - i$ je odlišný od znaku i.

Podle Bayesových vět teď máme

$$P(V_i|Z_j) = \frac{P(Z_j|V_i)P(V_i)}{P(Z_j)} = \frac{P(Z_j|V_i)P(V_i)}{P(Z_j|V_i)P(V_i) + P(Z_j|V_{1-i})P(V_{1-i})} =$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{P(Z_j|V_{1-i})P(V_{1-i})}{P(Z_j|V_i)P(V_i)}}$$

takže

$$P(V_0|Z_0) = \frac{1}{1 + \frac{P(Z_0|V_1)P(V_1)}{P(Z_0|V_0)P(V_0)}} = \frac{1}{1 + \frac{r \cdot p}{(1-r)\cdot(1-p)}}$$

a

$$P(V_1|Z_1) = \frac{1}{1 + \frac{P(Z_1|V_0)P(V_0)}{P(Z_1|V_1)P(V_1)}} = \frac{1}{1 + \frac{r\cdot(1-p)}{(1-r)\cdot p}} .$$

Vzorce uvádíme v tomto výsledném tvaru, aby se zvýraznila závislost na jednotlivých parametrech. Při praktickém počítání je ale vhodnější to nechat v původním zápisu a nepřevádět na tvar $\frac{1}{1+\text{něco}}$.

(a) Pro $p = 0.4$ tak máme

$$P(V_0|Z_0) = \frac{1}{1 + \frac{0.1 \cdot 0.4}{0.9 \cdot 0.6}} = \frac{27}{29} \doteq 0.93$$

$$P(V_1|Z_0) = 1 - \frac{27}{29} = \frac{2}{29} \doteq 0.07$$

$$P(V_1|Z_1) = \frac{1}{1 + \frac{0.1 \cdot 0.6}{0.9 \cdot 0.4}} = \frac{6}{7} \doteq 0.86$$

$$P(V_0|Z_1) = 1 - \frac{6}{7} = \frac{1}{7} \doteq 0.14$$

Tedy poměrně vysoká spolehlivost pro oba znaky.

(b) Pro $p = 0.1$ bude situace podstatně jiná:

$$P(V_0|Z_0) = \frac{1}{1 + \frac{0.1 \cdot 0.1}{0.9 \cdot 0.9}} = \frac{81}{82} \doteq 0.99$$

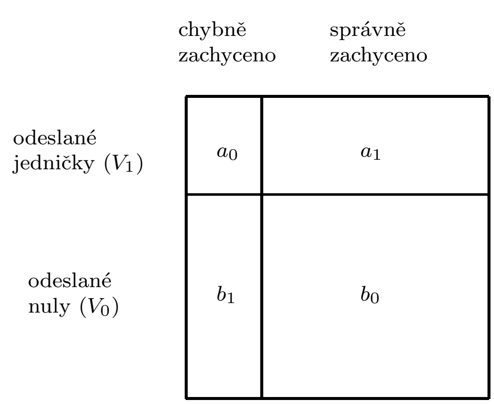
$$P(V_1|Z_0) = 1 - \frac{81}{82} = \frac{1}{82} \doteq 0.01$$

$$P(V_1|Z_1) = \frac{1}{1 + \frac{0.1 \cdot 0.9}{0.9 \cdot 0.1}} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$P(V_0|Z_1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Pokud procento vysílaných znaku "1" dosáhne hladiny šumu, tj. $p = r$, nedá se pak při zachyceni znaku "1" určit, jestli pochází z vyslaného signálu (tj. znaku "1") nebo naopak ze šumu (tj. chyby při vyslání znaku "0").

Situaci si ještě můžeme znázornit obrázkem:



Zde a_i a b_j znamenají počty daných znaků v rámci daného jevu (např. b_1 je počet odeslaných znaků 0, které byly zachyceny jako znaky 1, neboli $|V_0 \cap Z_1| = b_1$). Dale je např. $|V_0| = b_1 + b_0$ a $|Z_1| = a_1 + b_1$. Speciálně máme

$$P(V_0|Z_1) = \frac{|V_0 \cap Z_1|}{|Z_1|} = \frac{b_1}{a_1 + b_1}$$

a

$$P(V_1|Z_1) = \frac{|V_1 \cap Z_1|}{|Z_1|} = \frac{a_1}{a_1 + b_1} \ .$$

Problém s rozpoznáním znaku 1 nastane právě když

$$\frac{a_1}{a_1 + b_1} = P(V_0|Z_1) = P(V_1|Z_1) = \frac{b_1}{a_1 + b_1}$$

tedy když

$$a_1 = b_1 \ .$$

4.7 (diskrétní náhodná veličina)

Náhodná veličina X představuje hodnoty, které padají na pravidelné hrací kostce. Pro veličinu $Y = 2X - 1$ určete její střední hodnotu, rozptyl, distribuční funkci a kvantil.

Řešení:

Veličina X má hodnoty $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ a pravděpodobnostní funkcí

$$p_X(i) = \begin{cases} \frac{1}{6} & , \ i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 0 & , \ \text{jinak.} \end{cases}$$

Protože $E(Y) = E(2X - 1) = 2E(X) - 1$ a $D(Y) = D(2X - 1) = D(2X) = 2^2 D(X)$, stačí zjistit střední hodnotu a rozptyl pro veličinu X:

$$E(X) = \sum_{i \in \mathbb{R}} i \cdot p_X(i) = \frac{1}{6}\big(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6\big) = \frac{1}{2}(1 + 6) = \frac{7}{2} = 3.5$$

$$E(X^2) = \sum_{i \in \mathbb{R}} i^2 \cdot p_X(i) = \frac{1}{6}\big(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2\big) = \frac{91}{6} \doteq 15.166$$

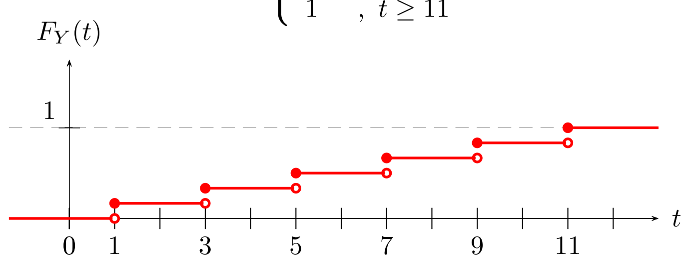
$$D(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12} \doteq 2.9167 \ .$$

Takže máme

$$E(Y) = 6 \quad \text{a} \quad D(Y) = \frac{35}{3} \doteq 11,67 \ .$$

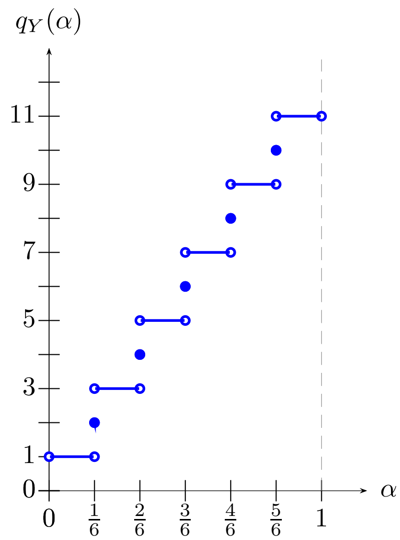
Veličina Y nabývá hodnot $1, 3, 5, 7, 9, 11$ se stejnou pravděpodobností, takže distribuční funkce bude

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & , \ t < 1 \\ \frac{1}{6} i & , \ t \in \langle 2i - 1, 2i + 1), \quad i = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 1 & , \ t \geq 11 \end{cases}$$



Kvantil pak je

$$q_Y(\alpha) = \begin{cases} 1 & , \ \alpha \in (0, \frac{1}{6}) \\ 2i & , \ \alpha = \frac{i}{6}, \quad i = 1,2,3,4,5 \\ 2i+1 & , \ \alpha \in (\frac{i}{6}, \frac{i+1}{6}), \quad i = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$



4.8 (diskrétní náhodná veličina)

Házíme třemi (nezávislými) kostkami. Náhodná veličina X je počet dvojic kostek, na nichž padl stejný výsledek. Určete její pravděpodobnostní funkci, distribuční funkci, kvantil, střední hodnotu a rozptyl.

Řešení:
Máme $\Omega = \{(a,b,c) \mid a,b,c \in \{1,\ldots,6\}\}$ s Laplaceovou pravděpodobností a veličina má tedy předpis

$$X\Big((a,b,c)\Big) = \begin{cases} 3 & , \ a=b=c \\ 1 & , \ |\{a,b,c\}| = 2 \\ 0 & , \ |\{a,b,c\}| = 3 \ . \end{cases}$$

Nenulové hodnoty pravděpodobnostní funkce zapíšeme pomocí tabulky:

i	0	1	3
$p_X(i)$	$\frac{6\cdot5\cdot4}{6^3} = \frac{5}{9}$	$\frac{\binom{6}{2}\cdot2\cdot3}{6^3} = \frac{5}{12}$	$\frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$

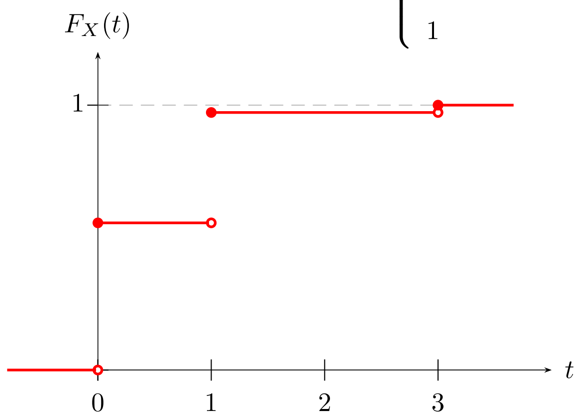
$$E(X) = \sum_{i\in\mathbb{R}} i \cdot p_X(i) = 0 \cdot \frac{5}{9} + 1 \cdot \frac{5}{12} + 3 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$E(X^2) = \sum_{i \in \mathbb{R}} i^2 \cdot p_X(i) = 0^2 \cdot \frac{5}{9} + 1^2 \cdot \frac{5}{12} + 3^2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{2}{3} \doteq 0.667$$

$$D(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{12} \doteq 0.417 \ .$$

Distribuční funkce je

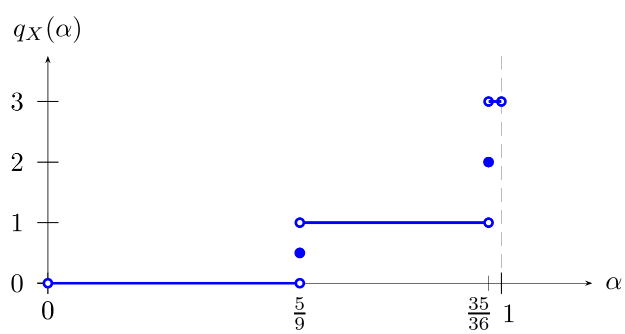
$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & , \ t < 0 \\ \frac{5}{9} & , \ t \in \langle 0, 1) \\ \frac{5}{9} + \frac{5}{12} = \frac{35}{36} & , \ t \in \langle 1, 3) \\ 1 & , \ t \geq 3 \end{cases}$$



Kvantil je

$$q_X(\alpha) = \begin{cases} 0 & , \ \alpha \in (0, \frac{5}{9}) \\ \frac{1}{2} & , \ \alpha = \frac{5}{9} \\ 1 & , \ \alpha \in (\frac{5}{9}, \frac{35}{36}) \\ 2 & , \ \alpha = \frac{35}{36} \\ 3 & , \ \alpha \in (\frac{35}{36}, 1) \ . \end{cases}$$

s grafem



4.9 (spojitá náhodná veličina)

Náhodná veličina X má rozdělení dané hustotou

$$f_X(t) = \begin{cases} a \cdot \ln t & , \ t \in (1, e) \\ 0 & , \ \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete konstantu a, distribuční funkci, střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X.

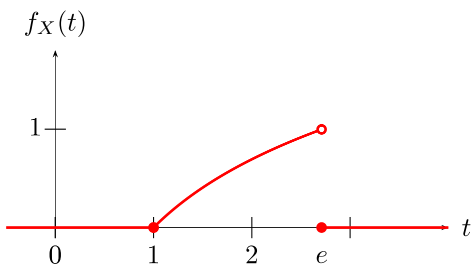
Řešení:

Pro určení konstanty a potřebujeme, aby

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\ dt = a \int_1^e \ln t\ dt = a\Big[t(\ln t - 1)\Big]_1^e = a$$

tedy $a = 1$.

Graf hustoty:



Distribuční funkce je rovna

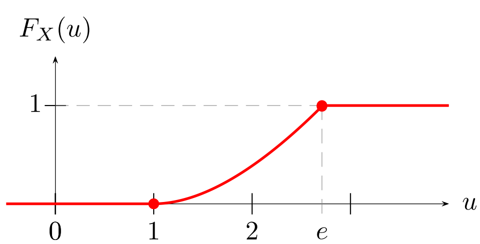
$$F_X(u) = \int_{-\infty}^{u} f_X(t)\ dt$$

a pro $u \in (1, e)$ tedy máme

$$F_X(u) = \int_1^u \ln t\ dt = \Big[t(\ln t - 1)\Big]_1^u = u \ln u - u + 1$$

celkově pak

$$F_X(u) = \begin{cases} 0 & , \ u \leq 1 \\ u \ln u - u + 1 & , \ u \in (1, e) \\ 1 & , \ u \geq e. \end{cases}$$



Pomocí hustoty spočítáme střední hodnotu

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_X(t)\ dt = \int_1^e t \cdot \ln t\ dt = \left[\frac{t^2}{4}(2\ln t - 1)\right]_1^e = \frac{e^2+1}{4} \doteq 2.097$$

a rozptyl

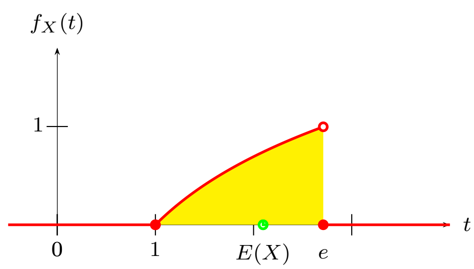
$$D(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2\ .$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot f_X(t)\ dt = \int_1^e t^2 \cdot \ln t\ dt = \left[\frac{t^3}{9}(3\ln t - 1)\right]_1^e = \frac{2e^3+1}{9}\ .$$

Tedy

$$D(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = \frac{2e^3+1}{9} - \left(\frac{e^2+1}{4}\right)^2 \doteq 0.176\ .$$

Názornou interpretací střední hodnoty spojité veličiny X, která má hustotu, je, že $E(X)$ je vodorovná souřadnice (zelený bod) těžiště plochy, která je určena grafem hustoty f_X (žlutá plocha):



V tomto případě speciálně musí platit, že $1 < E(X) < e$ (tedy $1 < \frac{e^2+1}{4} \doteq 2.097 < e \doteq 2.71$), což je evidentně splněno. V případě, že by vypočtené hodnota $E(X)$ tyto nerovnosti nesplňovala, znamenalo by to, že jsme někde ve výpočtu udělali chybu.

Podobně - hodnota $D(X)$ musí vždy vyjít nezáporně (pokud existuje)! Pokud ne, někde ve výpočtu nastala chyba.