5. cvičení z PSI

31. října - 4. listopadu 2016

5.1 (náhodná veličina bez střední hodnoty nebo bez rozptylu)
Uveďte příklad náhodné veličiny, která

(a) nemá střední hodnotu,

(b) má střední hodnotu, ale nemá rozptyl.

Řešení:
Vezměme spojitou náhodnou veličinu. Teď nám stačí najít si vhodné divergující integrály.

Uvažujme třeba spojitou veličinu Y s hustotou $f_Y(t) = \frac{1}{1+t^4}$. Pak například:

(a) Veličina $X = |Y|^3$ nemá střední hodnotu.

$$E(X) = E(|Y|^3) = \int_{-\infty}^{\infty} |t|^3 \cdot f_Y(t) \mathrm{d}t = 2 \int_0^{\infty} \frac{t^3}{1+t^4} \, \mathrm{d}t = \infty$$

(funkce v integrálu se chová jako t^{-1})

(b) Veličina $X = Y^2$ má střední hodnotu, ale nemá rozptyl.

$$E(X) = E(Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot f_Y(t) \mathrm{d}t = 2 \int_0^{\infty} \frac{t^2}{1+t^4} \, \mathrm{d}t < \infty$$

(funkce v integrálu se chová jako t^{-2})

$$E(X^2) = E(Y^4) = \int_{-\infty}^{\infty} t^4 \cdot f_Y(t) \mathrm{d}t = 2 \int_0^{\infty} \frac{t^4}{1+t^4} \, \mathrm{d}t = \infty$$

(funkce v integrálu má v nekonečnu limitu 1)

Tudíž

$$D(X) = E(X^2) - \Big(E(X)\Big)^2 = \infty \ .$$

Doplněk k definici střední hodnoty a vyšších momentů (neboli jak více pochopit vzorce a jejich význam):

Mějme náhodnou veličinu $X : \Omega \to \mathbb{R}$, která je omezená (tj. $|X| \leq c$). Vezměme si $a > c$ a omezený interval $\langle -a, a \rangle \subseteq \mathbb{R}$, který obsahuje všechny hodnoty veličiny X a rozdělme ho pomocí bodů $-a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = a$. Střední hodnotu veličiny X si můžeme přibližně představit jako

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P\Big(X \in (x_{i-1}, x_i \rangle\Big) \ .$$

S dalším zjemňováním rozdělení intervalu $\langle -a, a \rangle$ se pak hodnota bude ustalovat na čísle, které přirozeně můžeme označit jako (tzv. Lebesgueův) integrál z funkce X na prostoru Ω značený jako

$$\int_\Omega X \, \mathrm{d}P \ .$$

Toto je dost netriviální záležitost, ale skutečně to bude fungovat, právě proto, že X je omezená *náhodná* veličina, tj. vlastně omezená *integrabilní* funkce na Ω (podle Lebesgua). Rozdíl oproti definici Riemannova integrálu je jednak v mnohem obecnějším prostoru Ω oproti intervalům v $\mathbb{R}$ a také to, že primárně nerozdělujeme definiční obor, ale naopak obor hodnot. Položíme tedy

$$E(X) = \int_\Omega X \, \mathrm{d}P \ .$$

Pro výpočet se ale hodí toto vyjádření:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P\Big(X \in (x_{i-1}, x_i\rangle\Big) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \Big(F(x_i) - F(x_{i-1})\Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot F(x_i) - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot F(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot F(x_i) - \sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1} \cdot F(x_i) =$$

$$= a \cdot F(a) - x_1 \cdot F(-a) - \sum_{i=1}^{n-1} F(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i)\ .$$

Díky volbě intervalu $\langle -a, a\rangle \subseteq \mathbb{R}$ a omezenosti X máme $F(a) = 1$ a $F(-a) = 0$. Takže dostáváme

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P\Big(X \in (x_{i-1}, x_i\rangle\Big) = a - \sum_{i=1}^{n-1} F(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i) \quad \longrightarrow \quad a - \int_{-a}^{a} F(t)\ \mathrm{d}t\ .$$

To napravo je klasický Riemannův integrál, takže pro naši omezenou veličinu X máme

$$E(X) = a - \int_{-a}^{a} F(t)\ \mathrm{d}t = -\int_{-a}^{0} F(t)\ \mathrm{d}t + \int_{0}^{a} \big(1 - F(t)\big)\ \mathrm{d}t =$$

$$= -\int_{-\infty}^{0} F(t)\ \mathrm{d}t + \int_{0}^{\infty} \big(1 - F(t)\big)\ \mathrm{d}t = \int_{0}^{1} q_X(\alpha)\ \mathrm{d}\alpha\ .$$

Předposlední rovnost plyne z omezenosti veličiny a poslední z grafické interpretace kvantilů.

Pro obecné náhodné veličiny použijeme aproximaci pomocí omezených veličin. Takže dostaneme stejný vzorec.

A co když teď máme veličinu s hustotou f_X? Pak použijeme metodu per partes a vztah $f_X(t) = F'_X(t)$ (tam, kde derivace existuje). Pokud alespoň jeden z integrálů $-\int_{-\infty}^{0} F_X(t)\ \mathrm{d}t$ nebo $\int_{-\infty}^{0} t \cdot f_X(t)\ \mathrm{d}t$ je konečný pak

$$\lim_{t \to -\infty} t \cdot F_X(t) = 0$$

a z per partes tak máme rovnost obou integrálů

$$-\int_{-\infty}^{0} 1 \cdot F_X(t)\ \mathrm{d}t = -\Big[t \cdot F_X(t)\Big]_{-\infty}^{0} + \int_{-\infty}^{0} t \cdot F'_X(t)\ \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} t \cdot f_X(t)\ \mathrm{d}t\ .$$

Z analogických podmínek dostaneme

$$\int_{0}^{\infty} 1 \cdot \big(1 - F_X(t)\big)\ \mathrm{d}t = \Big[t \cdot \big(1 - F_X(t)\big)\Big]_{0}^{\infty} - \int_{0}^{\infty} t \cdot \big(1 - F_X\big)'(t)\ \mathrm{d}t = \int_{0}^{\infty} t \cdot f_X(t)\ \mathrm{d}t\ .$$

Máme tak známou rovnost:

$$E(X) = -\int_{-\infty}^{0} F_X(t)\ \mathrm{d}t + \int_{0}^{\infty} \big(1 - F_X(t)\big)\ \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_X(t)\ \mathrm{d}t\ .$$

A jak teď spočítáme vyšší momenty veličiny X?

Pro n liché je $F_{X^n}(t) = F_X(\sqrt[n]{t})$ a pro n sudé je

$$F_{X^n}(t) = \begin{cases} 0 & ,\ t < 0 \\ F_X(\sqrt[n]{t}) - F_X(-\sqrt[n]{t})_- & ,\ t \geq 0\ . \end{cases}$$

Z definice pak pro n liché dostaneme

$$E(X^n) = -\int_{-\infty}^{0} F_X(\sqrt[n]{t})\ \mathrm{d}t + \int_{0}^{\infty} \big(1 - F_X(\sqrt[n]{t})\big)\ \mathrm{d}t = \left[\begin{array}{c} u^n = t \\ nu^{n-1}\mathrm{d}u = \mathrm{d}t \end{array}\right] =$$

$$= -\int_{-\infty}^{0} nu^{n-1} \cdot F_X(u)\ \mathrm{d}u + \int_{0}^{\infty} nu^{n-1} \cdot \big(1 - F_X(u)\big)\ \mathrm{d}u$$

a pro n sudé to bude

$$E(X^n) = \int_{0}^{\infty} \big(1 - F_X(\sqrt[n]{t}) + F_X(-\sqrt[n]{t})_-\big)\ \mathrm{d}t = \left[\begin{array}{c} u^n = t \\ nu^{n-1}\mathrm{d}u = \mathrm{d}t \end{array}\right] =$$

$$= \int_{0}^{\infty} nu^{n-1} \cdot F_X(-u)\ \mathrm{d}u + \int_{0}^{\infty} nu^{n-1} \cdot \big(1 - F_X(u)\big)\ \mathrm{d}u$$

protože množina bodů $s \in \mathbb{R}$, kde $F_X(s) \neq F_X(s)_-$, je nejvýše spočetná a tedy neovlivňuje integrál.

Celkově tak pro (libovolné) $n \in \mathbb{N}$ máme vždycky

$$E(X^n) = -\int_{-\infty}^{0} nu^{n-1} \cdot F_X(u)\ \mathrm{d}u + \int_{0}^{\infty} nu^{n-1} \cdot \big(1 - F_X(u)\big)\ \mathrm{d}u =$$

$$= \int_0^1 \Big(q_X(\alpha)\Big)^n\ \mathrm{d}\alpha\ .$$

Poslední rovnost opět plyne z prvního vyjádření $E(X^n)$ během výpočtu a z grafické interpretace kvantilu.

5.2 (spojitá náhodná veličina)

Nezáporná náhodná veličina X má hustotu

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & , \ t < 1 \\ c \cdot t^{-3} & , \ t \geq 1 \end{cases}$$

kde c je vhodná konstanta. Určete

(a) hodnotu c,

(b) distribuční funkci F_X,

(c) distribuční funkci F_Y a hustotu pravděpodobnosti f_Y veličiny $Y = \frac{1}{X+1}$.

Řešení:

(a) Pro určení konstanty c potřebujeme, aby

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\ dt = c\int_1^{\infty} t^{-3}\ dt = c\Big[\frac{t^{-2}}{-2}\Big]_1^{\infty} = \frac{c}{2}$$

tedy $c = 2$.

(b) Distribuční funkce je rovna

$$F_X(u) = \int_{-\infty}^{u} f_X(t)\ dt$$

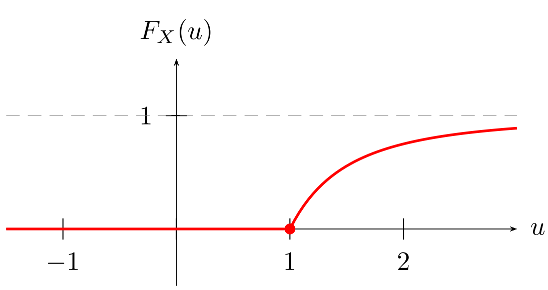
a pro $u \geq 1$ tedy máme

$$F_X(u) = \int_1^u 2t^{-3}\ dt = \Big[-t^{-2}\Big]_1^u = 1 - \frac{1}{u^2}$$

celkově pak

$$F_X(u) = \begin{cases} 0 & , \ u \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{u^2} & , \ u \geq 1 \end{cases}$$

s grafem



(c) Protože X je nezáporná spojitá veličina, pro distribuční funkci F_Y pro $u > 0$ máme

$$F_Y(u) = P(Y \leq u) = P\Big(\frac{1}{X+1} \leq u\Big) = P\Big(\frac{1}{u} \leq X + 1\Big) = P\Big(\frac{1}{u} - 1 \leq X\Big) =$$

$$= 1 - P\Big(X < \frac{1}{u} - 1\Big) = 1 - F_X\Big(\frac{1}{u} - 1\Big)\ .$$

Pro $\frac{1}{u} - 1 \geq 1$ a $u > 0$ tak dostáváme

$$F_Y(u) = 1 - F_X\Big(\frac{1-u}{u}\Big) = 1 - \Big(1 - \frac{1}{(\frac{1-u}{u})^2}\Big) = \frac{u^2}{(1-u)^2}\ .$$

Pro $\frac{1}{u} - 1 \leq 1$ a $u > 0$ pak máme

$$F_Y(u) = 1 - F_X\Big(\frac{1}{u} - 1\Big) = 1\ .$$

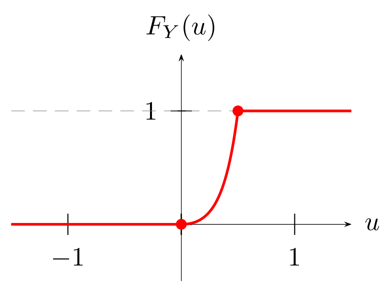
A nakonec, X je nezáporná veličina, takže $Y = \frac{1}{X+1} > 0$ a tudíž pro $u \leq 0$ je

$$F_Y(u) = P(Y \leq 0) = 0\ .$$

Celkově pak dostáváme

$$F_Y(u) = \begin{cases} 0 & ,\ u \leq 0 \\ \frac{u^2}{(1-u)^2} & ,\ u \in (0, \frac{1}{2}\rangle \\ 1 & ,\ u \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

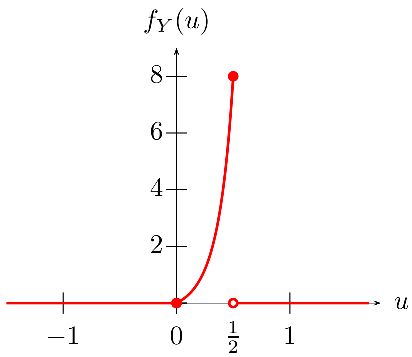
s grafem



Distribuční funkce F_Y je opět (absolutně) spojitá.
Hustotu pravděpodobnosti f_Y veličiny Y dostaneme jako

$$f_Y(u) = F_Y'(u) = \begin{cases} \frac{2u}{(1-u)^3} & ,\ u \in \langle 0, \frac{1}{2}\rangle \\ 0 & ,\ \text{jinak}\ . \end{cases}$$

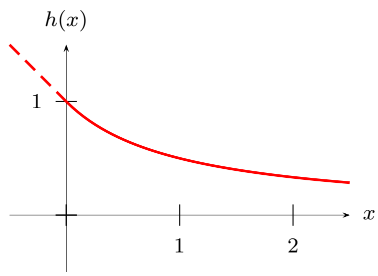
Její graf je:



Při výpočtu F_Y a f_Y jsme také mohli postupovat takto:

Veličinu Y vyjádříme jako $Y = h(X)$ pro vhodnou diferencovatelnou monotónní funkci $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Tvar funkce $h(x)$ je jasný pro nezáporná x a pro záporná x si ji můžeme definovat vpodstatě libovolně (ale tak, aby byla spojitá a diferencovatelná):

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & , \ x \geq 0 \\ \text{"vhodný tvar"} & , \ x < 0 \ . \end{cases}$$



Protože h je (ostře) klesající, máme pro $t > 0$ rovnost

$$F_Y(t) = P\Big(h(X) \leq t\Big) = P\Big(X \geq h^{-1}(t)\Big) = 1 - P\Big(X < h^{-1}(t)\Big) = 1 - F_X\Big(h^{-1}(t)\Big)$$

kde inverzní funkce h^{-1} má tvar

$$h^{-1}(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} - 1 & , \ t \in (0, 1\rangle \\ \text{"vhodný tvar"} & , \ t > 1 \ . \end{cases}$$

Teď už stačí jen dosadit atd.

Hustotu f_Y můžeme teď snadněji spočítat pomocí hustoty f_X (v bodech $t > 0$, pro ostatní t to je konstantní nula). Pro ostře klesající diferencovatelnou h tak máme:

$$f_Y(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_Y(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(1 - F_X\big(h^{-1}(t)\big)\Big) = -F_X'\big(h^{-1}(t)\big) \cdot \frac{1}{h'\big(h^{-1}(t)\big)} =$$

$$= -\frac{f_X\big(h^{-1}(t)\big)}{h'\big(h^{-1}(t)\big)} \ .$$

Po dosazení:

$$f_Y(t) = \begin{cases} -\frac{f_X\left(\frac{1}{t}-1\right)}{h'\left(\frac{1}{t}-1\right)} = \frac{1}{t^2} \cdot f_X\left(\frac{1}{t} - 1\right) & , \ t \in (0, 1\rangle \\ 0 & , \ \text{jinak} \ . \end{cases}$$

Ověřte si sami, že výsledek je stejný!

5.3 (směs náhodných veličin)

V urně je 15 hracích kostek, z toho 10 správných, na nichž padají všechna čísla se stejnou pravděpodobností, a 5 vadných, na nichž padá šestka s pravděpodobností $\frac{1}{2}$, ostatní čísla s pravděpodobností $\frac{1}{10}$. Náhodně vybereme jednu kostku a hodíme. Jaká je pravděpodobnost možných výsledků?

Řešení:
Použijeme jev

$A =$ "*vytažená kostka je správná*",

a veličinu

$X =$ "*hodnota, která padla na vytažené kostce*".

Pak pro $i \in \{1, \ldots, 6\}$ dostáváme z věty o úplné pravděpodobnosti

$$P(X = i) = P(X = i|A) \cdot P(A) + P(X = i|\overline{A}) \cdot P(\overline{A}).$$

Z předpokladu pak máme

$$P(A) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}, \quad P(X = i|A) = \frac{1}{6} \quad \text{pro všechna } i$$

a

$$P(X = i|\overline{A}) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \ i = 6 \\ \frac{1}{10} & , \ i \neq 6 \ . \end{cases}$$

Celkem tedy dostáváme pro $i = 6$:

$$P(X = i) = \begin{cases} \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{18} & , \ i = 6 \\ \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{13}{90} & , \ i \neq 6 \ . \end{cases}$$

Veličina X je vlastně směs dvou veličin

$$X_1 : A \to \mathbb{R} \quad \text{a} \quad X_2 : \overline{A} \to \mathbb{R}$$

které znamenají

$X_1 =$ "*hodnota, která padla na **správné** vytažené kostce*"

$X_2 =$ "*hodnota, která padla na **vadné** vytažené kostce*"

Tedy $X = \mathrm{Mix}_c(X_1, X_2)$, kde koeficient c odpovídá poměru *správných* kostek ku všem kostkám, tj. $c = \frac{10}{15} = P(A)$. Z definice směsi pak máme

$$P(X = i) = c \cdot P_1(X_1 = i) + (1 - c) \cdot P_2(X_2 = i)$$

kde

$$P_1(\cdot) = P(\ \cdot\ |A) \quad \text{a} \quad P_2(\cdot) = P(\ \cdot\ |\overline{A})$$

jsou pravděpodobnosti na prostorech $\Omega_1 = A$ a $\Omega_2 = \overline{A}$ (přitom je $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$).

Opět tedy máme větu o úplné pravděpodobnosti.

5.4 (určení rozdělení dané veličiny)

Diskrétní náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení na množině $\{0, 1\}$ a spojitá náhodná veličina Y má rovnoměrné rozdělení na intervalu $[0, 1]$. Veličiny X a Y jsou nezávislé. Určete rozdělení veličiny $W = X + Y$ a veličiny $Z = XY$.

Řešení:
Protože X nabývá pouze konečně mnoha hodnot, bude výhodné použít větu o úplné pravděpodobnosti:

$$F_W(t) = P(X+Y \leq t) = P(X+Y \leq t|X=0) \cdot P(X=0) + P(X+Y \leq t|X=1) \cdot P(X=1)$$

Díky nezávislosti veličin X a Y máme

$$P(X+Y \leq t|X=1) = P(1+Y \leq t|X=1) = P(Y \leq t-1) = F_Y(t-1)$$

a podobně

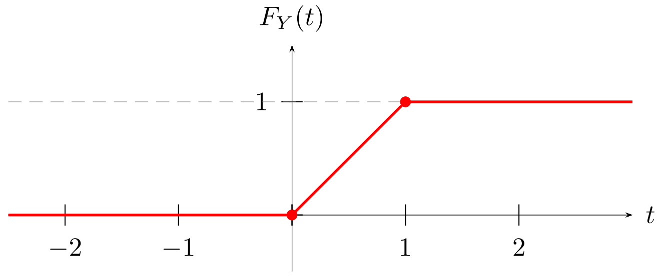
$$P(X+Y \leq t|X=0) = P(Y \leq t) = F_Y(t).$$

Protože ještě víme, že $P(X=0) = \frac{1}{2} = P(X=1)$, tak můžeme psát

$$F_W(t) = \frac{1}{2}\Big(F_Y(t) + F_Y(t-1)\Big) \ .$$

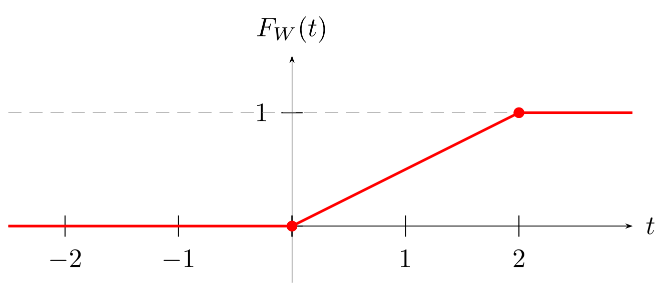
Nyní jen vyjádříme distribuční funkci veličiny Y

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & , \ t < 0 \\ t & , \ t \in \langle 0, 1 \rangle \\ 1 & , \ t > 1 \ . \end{cases}$$



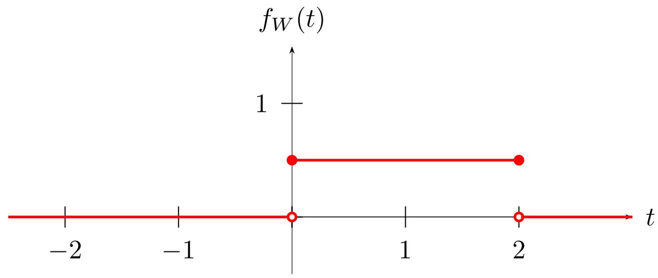
a dosadíme spolu s jejím posunutím do vzorce pro F_W, čímž získáme:

$$F_W(t) = \begin{cases} 0 & , \ t < 0 \\ \frac{t}{2} & , \ t \in \langle 0, 2 \rangle \\ 1 & , \ t > 2 \ . \end{cases}$$



Veličina W je tedy spojitá s rovnoměrným rozdělením na intervalu $\langle 0, 2 \rangle$ a hustotou:

$$f_W(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \ t \in \langle 0, 2 \rangle \\ 0 & , \ \text{jinak} \ . \end{cases}$$

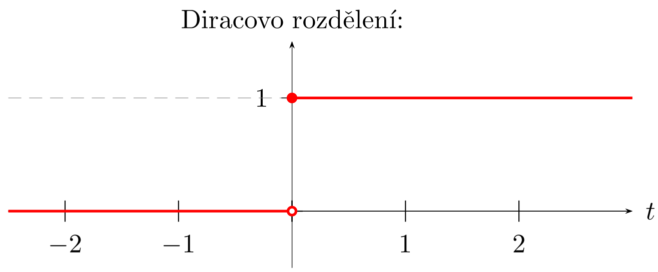


Pro veličinu $Z = XY$ budeme postupovat obdobně

$$F_Z(t) = P(XY \leq t) = P(XY \leq t | X = 0) \cdot P(X = 0) + P(XY \leq t | X = 1) \cdot P(X = 1) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(P(Z = 0 \leq t | X = 0) + P(Y \leq t | X = 1)\Big)$$

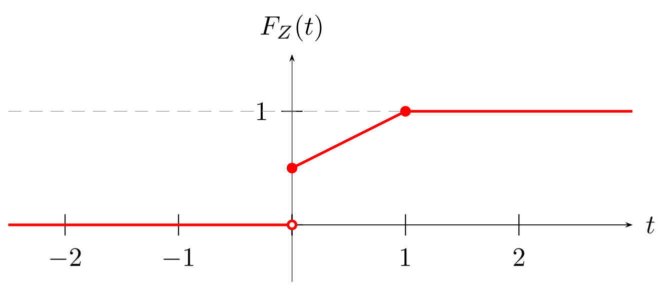
Na množině $A = X^{-1}(\{0\})$ je veličina Z konstantně nulová, takže výraz $P(Z = 0 \leq t | X = 0)$ je buď roven 1, když $0 \leq t$ anebo roven 0, když $t < 0$. Na množině A jde tedy o Diracovo rozdělení s distribuční funkci formálně psanou jako $P(0 \leq t)$.



Nyní tedy máme

$$F_Z(t) = \frac{1}{2}\Big(P(0 \leq t) + F_Y(t)\Big) = \begin{cases} 0 & , \ t < 0 \\ \frac{x+1}{2} & , \ t \in \langle 0, 1 \rangle \\ 1 & , \ t > 1 \ . \end{cases}$$

takže veličina Z má smíšené rozdělení a graf F_Z je:



Na začátku jsme také mohli veličiny vyjádřit jako směsi, kde by jedna ze složek odpovídala případu $X = 0$ a druhá případu $X = 1$ (tj. šlo by o zúžení veličin W a Z za daných podmínek). Pro $A = X^{-1}(\{0\})$ a $c = P(A) = P(X = 0) = \frac{1}{2}$ tak máme

$$W|_A = Y|_A, \quad W|_{\overline{A}} = Y + 1|_{\overline{A}}$$
$$Z|_A = 0|_A, \quad Z|_{\overline{A}} = Y|_{\overline{A}}$$

a pro vyjádření směsi tak dostáváme

$$W = \mathrm{Mix}_c(W|_A, W|_{\overline{A}}) = \mathrm{Mix}_{\frac{1}{2}}(Y|_A, Y + 1|_{\overline{A}})$$
$$Z = \mathrm{Mix}_c(Z|_A, Z|_{\overline{A}}) = \mathrm{Mix}_{\frac{1}{2}}(0|_A, Y|_{\overline{A}})$$

Zbytek postupu by pak už ale byl stejný.

5.5 (rozklad náhodné veličiny)
Náhodná veličina X má distribuční funkci

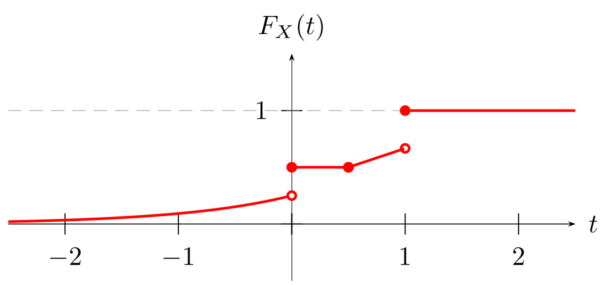
$$F_X(t) = \begin{cases} \frac{e^t}{4} & , \ t < 0 \\ \frac{1}{2} & , \ t \in \langle 0, \frac{1}{2}) \\ \frac{t+1}{3} & , \ t \in \langle \frac{1}{2}, 1) \\ 1 & , \ 1 \le t. \end{cases}$$

(a) Rozložte X na směs diskrétní náhodné veličiny D a spojité náhodné veličiny S.

(b) Pro diskrétí část D najděte distribuční funkci F_D a pravděpodobnostní funkci p_D.

(c) Pro spojitou část S najděte distribuční funkci F_S a hustotu pravděpodobnosti f_S.

Řešení:
(a) Abychom o distribuční funkci F_X měli lepší představu, znázorníme si její graf:



Připomeňme si, jak se hledá diskrétní a spojitá část veličiny X. Diskrétní část D je zodpovědná za skoky v distribuční funkci. Nejdříve si tedy určíme množinu

$$O_X := \{a \in \mathbb{R} \mid P(X = a) \neq 0\} = \text{"}\textit{množina všech bodů nespojitosti funkce } F_X\text{"} = \{0, 1\}.$$

Diskrétni část D je zúžení X na množinu

$$\Omega_1 := X^{-1}(O_X) \subseteq \Omega,$$

tedy

$$D := X|_{\Omega_1},$$

a spojitá část je pak zúžení X na zbytek prostoru, tj.

$$S := X|_{\overline{\Omega}_1} \ .$$

Pak máme

$$X = \mathrm{Mix}_c(D, S),$$

kde

$$c = P(X \in O_X) = \sum_{a \in O_X} P(X = a) = \text{”}\textit{součet všech skoků funkce } F_X\text{”}$$

To dostaneme pomocí vztahu

$$P(X = a) = F_X(a) - F_X(a-),$$

a jednotlivé skoky jsou tedy

$$P(X = 0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \qquad \text{a} \qquad P(X = 1) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

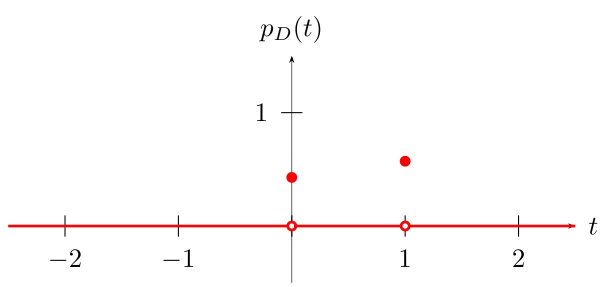
Takže

$$c = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}.$$

(b) Pro pravděpodobnostní funkci p_D diskrétní veličiny D platí

$$p_D(t) = \frac{1}{c} \cdot P(X = t) = \frac{12}{7} \cdot P(X = t) = \begin{cases} \frac{3}{7} & , \ t = 0 \\ \frac{4}{7} & , \ t = 1 \\ 0 & , \ \text{jinak} \end{cases}$$

s grafem:



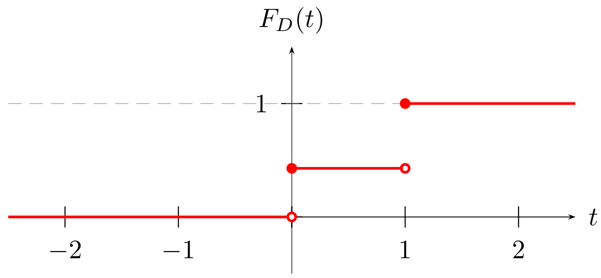
Proč to platí:

$$p_D(t) = P(D = t|\Omega_1) = \frac{P\Big((D = t) \cap \Omega_1\Big)}{P(\Omega_1)} = \frac{P(X = t)}{c}$$

Pro distribuční funkci F_D pak nasčítáním dostaneme

$$F_D(t) = \sum_{x \leq t} p_D(x) = \begin{cases} 0 & , \ t < 0 \\ \frac{3}{7} & , \ 0 \leq t < 1 \\ 1 & , \ 1 \leq t \end{cases}$$

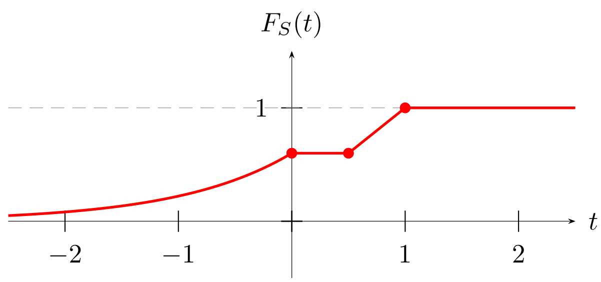
s grafem:



(c) Pro distribuční funkci spojité veličiny S pak ze vztahu $F_X = cF_D + (1-c)F_S$ dostáváme

$$F_S(t) = \frac{F_X(t) - cF_D(t)}{1-c} = \frac{12}{5}\left(F_X(t) - \frac{7}{12}F_D(t)\right) = \begin{cases} \frac{12}{5}\cdot\frac{e^t}{4} = \frac{3}{5}e^t &, \ t < 0 \\ \frac{12}{5}(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) = \frac{3}{5} &, \ t \in \langle 0, \frac{1}{2}) \\ \frac{12}{5}(\frac{t+1}{3} - \frac{1}{4}) = \frac{4t+1}{5} &, \ t \in \langle \frac{1}{2}, 1) \\ \frac{12}{5}(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3}) = 1 &, \ 1 \leq t \end{cases}$$

Graf funkce F_S dostaneme jednoduše tak, ze části grafu F_X, které na sebe nenavazují, posuneme dolů tak, aby výsledek byl spojitý. Celý graf pak ve směru y natáhneme tak, aby v nekonečnu měl limitu rovnou 1:

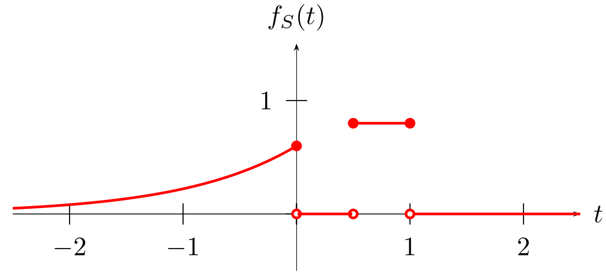


Hustotu f_S spojité veličiny S pak získáme derivací F_S pro body, kde derivace existuje. V ostatních (konečně mnoha bodech - v tomto případě) na hodnotách nezáleží. Takže můžeme psát toto:

$$f_S(t) = F_S'(t) = \left(\frac{F_X - cF_D}{1-c}\right)'(t) = \frac{1}{1-c}\cdot F_X'(t)$$

$$f_S(t) = \frac{1}{1-c}\cdot F_X'(t) = \frac{12}{5}\cdot F_X'(t) = \begin{cases} \frac{3}{5}e^t &, \ t \leq 0 \\ \frac{4}{5} &, \ t \in \langle \frac{1}{2}, 1\rangle \\ 0 &, \ \text{jinak.} \end{cases}$$

Graf f_S pak bude:


$f_S(t)$
1
t
-2
-1
1
2