8. cvičení z PSI

21. - 25. listopadu 2016

8.1 Sdružená hustota náhodného vektoru (X, Y) je rovna

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c \cdot xy & , \ 0 \leq x \leq 2 \ \& \ 0 \leq y \leq x, \\ 0 & , \ \text{jinak}, \end{cases}$$

kde $c > 0$ je vhodná konstanta. Určete

(a) sdruženou distribuční funkci $F_{X,Y}$,

(b) marginální distribuční funkce F_X, F_Y,

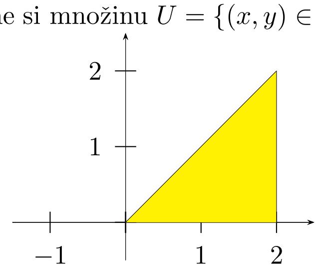
(c) marginální hustoty f_X, f_Y,

(d) střední hodnotu vektoru (X, Y),

(e) zda jsou veličiny X a Y nezávislé (pokud ne, spočítejte $\mathrm{cov}(X, Y)$),

(f) distribuční funkci F_Z náhodné veličiny $Z = X \cdot Y$.

Řešení:
Znázorníme si množinu $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2 \ \& \ 0 \leq y \leq x\}$, mimo níž je hustota nulová:



Nejdříve určíme konstantu c tak, aby $h_{X,Y}$ byla skutečně hustota:

$$1 = \iint_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y} \ dS = \iint_{U} f_{X,Y} \ dS = \int_0^2 \left(\int_0^x c \cdot xy \ dy \right) dx = c \int_0^2 x \cdot \frac{x^2}{2} \ dx = c \left[\frac{x^4}{8} \right]_0^2 = 2c$$

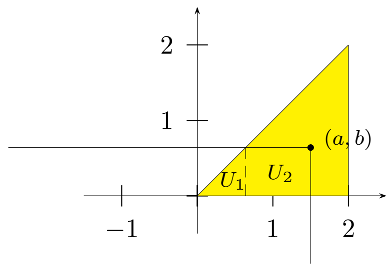
Tedy $c = \frac{1}{2}$.

(a) Sdružená distribuční funkce $F_{X,Y}$ je definována jako

$$F_{X,Y}(a,b) = \iint_{(-\infty,a\rangle \times (-\infty,b\rangle} f_{X,Y} \ dS = \iint_{(-\infty,a\rangle \times (-\infty,b\rangle \cap U} f_{X,Y} \ dS$$

tedy jako integrál přes množinu, kterou vysekne interval $(-\infty, a\rangle \times (-\infty, b\rangle$ v množině U.

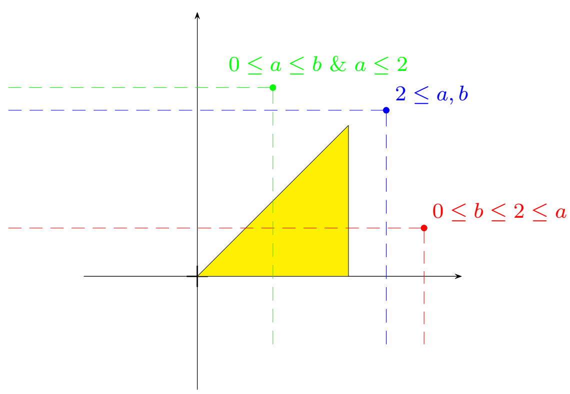
Nejdříve ji určíme pro $(a,b) \in U$:



$$F_{X,Y}(a,b) = \iint\limits_{U_1 \cup U_2} f_{X,Y}\ dS = \frac{1}{2}\int_0^b \left(\int_0^x xy\ dy\right) dx + \frac{1}{2}\int_b^a \left(\int_0^b xy\ dy\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^b x \cdot \frac{x^2}{2}\ dx + \frac{1}{2}\int_b^a x \cdot \frac{b^2}{2}\ dx = \frac{1}{4}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^b + \frac{b^2}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_b^a = \frac{a^2b^2}{8} - \frac{b^4}{16}$$

Ostatní hodnoty $F_{X,Y}(a,b)$ už snadno určíme z obrázku (funkce $F_{X,Y}(a,b)$ je spojitá):

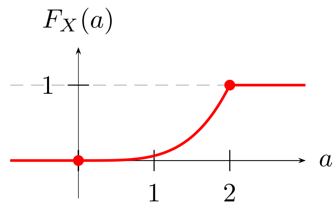


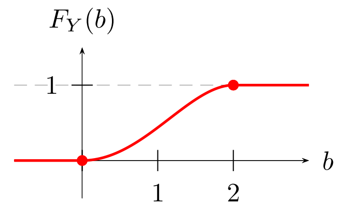
$$F_{X,Y}(a,b) = \begin{cases} 0 & ,\ a \le 0 \text{ nebo } b \le 0 \\ \frac{a^2b^2}{8} - \frac{b^4}{16} & ,\ (a,b) \in U \\ F_{X,Y}(2,b) = \frac{b^2}{2} - \frac{b^4}{16} & ,\ 0 \le b \le 2 \le a \\ F_{X,Y}(a,a) = \frac{a^4}{16} & ,\ 0 \le a \le b \ \&\ a \le 2 \\ 1 & ,\ 2 \le a, b. \end{cases}$$

(b) Marginální distribuční funkce F_X a F_Y představují distribuční funkce jednotlivých složek vektoru, tj. (samostatných) náhodných veličin X a Y. Získáme je jednoduše jako limity sdružené distribuční funkce (také s využitím obrázků):

$$F_X(a) = P(X \le a) = \lim_{b\to\infty} P(X \le a, Y \le b) = \lim_{b\to\infty} F_{X,Y}(a,b) = \begin{cases} 0 & ,\ a \le 0 \\ \frac{a^4}{16} & ,\ 0 \le a \le 2 \\ 1 & ,\ 2 \le a \end{cases}$$

$$F_Y(b) = P(Y \le b) = \lim_{a\to\infty} P(X \le a, Y \le b) = \lim_{a\to\infty} F_{X,Y}(a,b) = \begin{cases} 0 & ,\ b \le 0 \\ \frac{b^2}{2} - \frac{b^4}{16} & ,\ 0 \le b \le 2 \\ 1 & ,\ 2 \le b \end{cases}$$





Je dobré si uvědomit, že náhodný vektor (X, Y) můžeme snadno sestavit z libovolných dvou náhodných veličin X a Y. Zatímco ale k počítání s veličinou X nám stačí znát jen její distribuční funkci F_X, k práci s vektorem nám NESTAČÍ znalost distribučních funkcí jeho složek! Potřebujeme totiž znát, jaký je vztah mezi veličinami X a Y, a ten je schovaný právě ve sdružené distribuční funkci.

(c) Hustota pravděpodobnosti není určena jednoznačně, co se týče její funkční hodnoty, ale pouze hodnotami integrálu z této funkce. Přesněji, dvě nezáporné funkce f, g (s integrálem rovným jedné) jsou hustotami pro tutéž distribuční funkci právě když pro libovolný interval U platí

$$\int_U f(t)\ \mathrm{d}t = \int_U g(t)\ \mathrm{d}t\ .$$

To se dá popsat také tak, že pro danou (absolutně) spojitou veličinu X se funkce f a g (představující její hustotu) mohou lišit jen na takové množině $A \subseteq \mathbb{R}$, že $P(X \in A) = 0$. Říká se také, že f a g se rovnají *skoro všude* a zapisuje se to jako

$$f = g \quad \text{(s.v.)}\ .$$

Funkce f a g se mohou lišit např. v konečně mnoha bodech (ale i na větší množině). Rovnost hustot *skoro všude* se ale velmi často opomíjí a nevyznačuje se. Nicméně to nic nemění na tom, že je potřeba tuhle věc mít na paměti.

Marginální hustoty f_X a f_Y jsou hustoty náhodných veličin X a Y a získají se buď částečným zintegrováním sdružené hustoty $f_{X,Y}$ tj. jako

$$f_X(a) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(a,b)\ \mathrm{d}b = \begin{cases} \int_0^a \frac{ab}{2}\ \mathrm{d}b = a\left[\frac{b^2}{4}\right]_{b=0}^{b=a} = \frac{a^3}{4} & ,\ 0 \le a \le 2 \\ 0 & ,\ \text{jinak.} \end{cases}$$

a

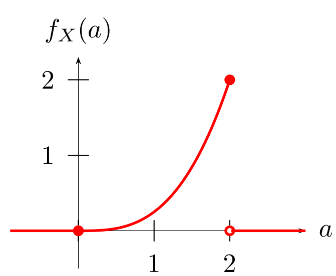
$$f_Y(b) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(a,b)\ \mathrm{d}a = \begin{cases} \int_b^2 \frac{ab}{2}\ \mathrm{d}a = b\left[\frac{a^2}{4}\right]_{a=b}^{a=2} = b - \frac{b^3}{4} & ,\ 0 \le b \le 2 \\ 0 & ,\ \text{jinak.} \end{cases}$$

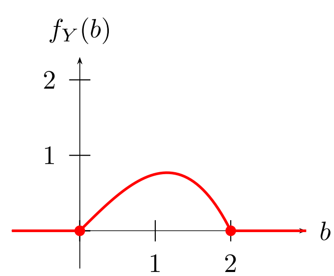
nebo zderivováním distribucí F_X a F_Y (tam, kde derivace existuje):

$$f_X(a) = F_X'(a) = \begin{cases} \frac{a^3}{4} & ,\ 0 \le a \le 2 \\ 0 & ,\ \text{jinak.} \end{cases}$$

$$f_Y(b) = F_Y'(b) = \begin{cases} b - \frac{b^3}{4} & ,\ 0 \le b \le 2 \\ 0 & ,\ \text{jinak.} \end{cases}$$

Všimněme si, že např. pro $a = 2$ derivace distibuční funkce F_X neexistuje. V tom případě si hodnotu v tomto bodě můžeme zvolit, jak budeme chtít, např. $f_X(2) = 2$.





(d) Střední hodnota náhodného vektoru (X, Y) se v případě existence sdružené hustoty definuje jako

$$E(X,Y) := \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \vec{u} \cdot f_{X,Y}(\vec{u})\ d\vec{u} =$$

$$= \Big(\iint\limits_{\mathbb{R}^2} x \cdot f_{X,Y}(x,y)\ dx\ dy,\ \ \iint\limits_{\mathbb{R}^2} y \cdot f_{X,Y}(x,y)\ dx\ dy \Big) =$$

$$= \Big(\int_{\mathbb{R}} x\ \big(\int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\ dy \big)\ dx,\ \ \int_{\mathbb{R}} y\ \big(\int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\ dx \big)\ dy \Big) =$$

$$= \Big(\int_{\mathbb{R}} x\ f_X(x)\ dx,\ \ \int_{\mathbb{R}} y\ f_Y(y)\ dy \Big) = \Big(E(X), E(Y) \Big)$$

neboli jako vektor ze středních hodnot jednotlivých složek. V případech, kdy neexistuje hustota, se vztah

$$E(X,Y) = \Big(E(X), E(Y) \Big)$$

vezme jako definice.

Máme tedy:

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x\ f_X(x)\ dx = \int_0^2 x \cdot \frac{x^3}{4}\ dx = \Big[\frac{x^5}{20} \Big]_0^2 = \frac{8}{5} = 1.6$$

$$E(Y) = \int_{\mathbb{R}} y\ f_Y(y)\ dy = \int_0^2 y \cdot \left(y - \frac{y^3}{4} \right)\ dy = \frac{8}{3} - \frac{8}{5} = \frac{16}{15} \doteq 1.067$$

takže celkem

$$E(X,Y) = \left(\frac{8}{5}, \frac{16}{15} \right).$$

(e) Dvě veličiny X a Y jsou nezávislé právě když pro každé dva intervaly $I, J \subseteq \mathbb{R}$ je

$$P(X \in I, Y \in J) = P(X \in I) \cdot P(Y \in J)$$

což nastane právě když pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$F_{X,Y}(a,b) = F_X(a) \cdot F_Y(b)\ .$$

Pokud vektor (X, Y) má sdruženou hustotu (jako v našem případě), pak X a Y jsou nezávislé právě když pro každé dva intervaly $I, J \subseteq \mathbb{R}$ platí, že

$$\iint\limits_{I \times J} f_{X,Y}(a,b)\ \mathrm{d}S = \left(\int\limits_I f_X(a)\ \mathrm{d}a \right) \cdot \left(\int\limits_J f_Y(b)\ \mathrm{d}b \right)$$

neboli rovnost

$$f_{X,Y}(a,b) = f_X(a) \cdot f_Y(b)$$

platí pro *skoro všechny* body (a, b) (tj. množina bodů, kde rovnost NENASTÁVÁ, má nulový plošný obsah).

Pokud tedy máme nezávislé vektory, pak se množina $V \subseteq \mathbb{R}^2$, kde je $f_{X,Y} > 0$, musí dát napsat jako kartézský součin nějakých dvou množin $A \subseteq \mathbb{R}$ a $B \subseteq \mathbb{R}$ (s případnou tolerancí, která má nulový plošný obsah).

V našem případě má množina $V = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid f_{X,Y}(a,b) > 0\}$ tvar trojúhelníku a tudíž vektory X a Y musí být závislé.

Závislost veličin můžeme konkrétně zdůvodnit i tak, že např. máme

$$\iint\limits_{\langle 0,1 \rangle \times \langle 1,2 \rangle} f_{X,Y}(a,b)\ \mathrm{d}S = 0 \neq \left(\int\limits_0^1 f_X(a)\ \mathrm{d}a \right) \cdot \left(\int\limits_1^2 f_Y(b)\ \mathrm{d}b \right)\ .$$

Veličiny jsou nezávislé a my proto spočítáme jejich kovarianci. Protože

$$\mathrm{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)\ ,$$

využijeme už spočítaných středních hodnot $E(X) = \frac{8}{5} = 1.6$ a $E(Y) = \frac{16}{15} \doteq 1.067$ a určíme ještě

$$E(XY) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} xy \cdot f_{X,Y}(x,y)\ dS = \frac{1}{2}\int_0^2 \left(\int_0^x (xy)^2\ dy\right)\ dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2 \cdot \frac{x^3}{3}\ dx = \left[\frac{x^6}{36}\right]_0^2 = \frac{16}{9}$$

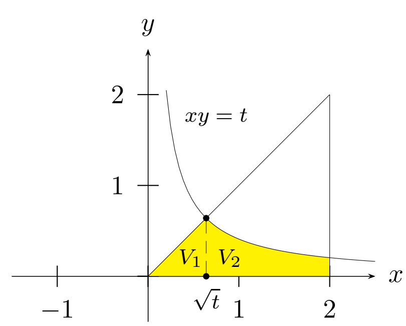
takže

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \frac{16}{9} - \frac{8}{5}\cdot\frac{16}{15} = \frac{16}{225} \doteq 0.071\ .$$

(f) Pro distribuční funkci veličiny $Z = X \cdot Y$ máme

$$F_Z(t) = P(XY \le t) = \iint\limits_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ |\ xy\le t\}} f_{X,Y}\ dS$$

Vzhledem k definici hustoty $f_{X,Y}$ ihned dostáváme (viz obrázek níže), ze $F_Z(t) = 0$ pro $t \le 0$ a $F_Z(t) = 1$ pro $t \ge 4$. Pro $t \in \langle 0, 4\rangle$ pak dále máme



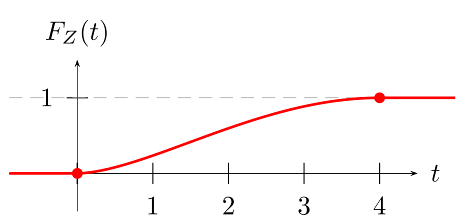
$$F_Z(t) = \iint\limits_{V_1\cup V_2} f_{X,Y}\ dS = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{t}} \left(\int_0^x xy\ dy\right)\ dx + \frac{1}{2}\int_{\sqrt{t}}^2 \left(\int_0^{t/x} xy\ dy\right)\ dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{t}} x\cdot\frac{x^2}{2}\ dx + \frac{1}{2}\int_{\sqrt{t}}^2 x \cdot \frac{t^2}{2x^2}\ dx = \left[\frac{x^4}{16}\right]_{x=0}^{x=\sqrt{t}} + \left[\frac{t^2 \ln x}{4}\right]_{x=\sqrt{t}}^{x=2} = \left(\frac{1}{16} + \frac{\ln 2}{4} - \frac{\ln t}{8}\right)t^2\ .$$

Celkově tak máme

$$F_Z(t) = \begin{cases} 0 & ,\ t \le 0 \\ \left(\frac{1}{16} + \frac{\ln 2}{4} - \frac{\ln t}{8}\right)t^2 & ,\ 0 < t \le 4 \\ 1 & ,\ t \ge 4 \end{cases}$$

s grafem



8.2 (náhodný vektor - diskrétní)

Dvourozměrný náhodný vektor (X, Y) má pravděpodobnosti hodnot dané tabulkou:

X \ Y	0	1
1	1/3	0
2	1/3	1/3

Vypočtěte korelaci náhodných veličin $\rho(X, Y)$. Jsou veličiny X a Y nezávislé?

Řešení:
Pro koeficient korelace

$$\rho(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)} \cdot \sqrt{D(Y)}} = \frac{E(XY) - E(X) \cdot E(Y)}{\sqrt{E(X^2) - E(X)^2} \cdot \sqrt{E(Y^2) - E(Y)^2}}$$

potřebujeme znát $E(X)$, $E(Y)$, $E(X^2)$, $E(Y^2)$ a $E(XY)$. Do tabulky doplníme marginální pravděpodobnostní funkce (součty přes řádky a sloupce), které představují pravděpodobnostní funkce jednotlivých náhodných veličin:

X \ Y	0	1	p_X
1	1/3	0	1/3
2	1/3	1/3	2/3
p_Y	2/3	1/3	

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

$$E(Y) = 0 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$E(X^2) = 1^2 \cdot \frac{1}{3} + 2^2 \cdot \frac{2}{3} = 3$$

$$E(Y^2) = 0^2 \cdot \frac{2}{3} + 1^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$E(XY) = 1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Takže

$$\rho(X,Y) = \frac{\frac{2}{3} - \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\sqrt{3 - \left(\frac{5}{3}\right)^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^2}} = \frac{1}{2}.$$

Protože $\rho(X,Y) = \cos\alpha$, kde $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$ je úhel, který svírají veličiny $X - E(X)$ a $Y - E(Y)$, dostáváme, že $\alpha = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$.

Pro připomenutí: Množina všech náhodných veličin na pravděpodobnostním prostoru Ω, (které ztotožníme, pokud se rovnají skoro všude na Ω) a které mají konečný rozptyl tvoří (reálný) vektorový prostor označený jako

$$\mathcal{L}_2 := \{X : \Omega \to \mathbb{R} \mid X \text{ je náhodná veličina } \& \ D(X) < \infty\}.$$

Na tomto prostoru můžeme zavést skalární součin $\bullet : \mathcal{L}_2 \times \mathcal{L}_2 \to \mathbb{R}$ (tj. pozitivně definitní bilineární symetrickou formu) jako

$$X \bullet Y := E(XY)$$

který pak přirozeně umožňuje zavést *normu* $\|\cdot\| : \mathcal{L}_2 \to \mathbb{R}$ (neboli "délku" vektoru) jako

$$\|X\| := \sqrt{X \bullet X} = \sqrt{E(X^2)}$$

Náhodné veličiny $X, Y \in \mathcal{L}_2$ jsou pak kolmé (tj. *nekorelované*), pokud $X \bullet Y = E(XY) = 0$.

V prostoru $\mathcal{L}_2$ je význačným podprostorem množina všech náhodných veličin s nulovou střední hodnotou:

$$\mathcal{N} := \{X \in \mathcal{L}_2 \mid E(X) = 0\} \subseteq \mathcal{L}_2$$

ke kterému je ortogonálním doplněk (tj. prostor všech náhodných veličin kolmých k $\mathcal{N}$) množina všech konstantních veličin:

$$\mathcal{R} := \mathcal{N}^{\perp} = \{Y \in \mathcal{L}_2 \mid (\forall\ X \in \mathcal{N})\ X \bullet Y = 0\} = \\ = \{Y \in \mathcal{L}_2 \mid Y \text{ je konstantní skoro všude na } \Omega\}.$$

Prostor $\mathcal{C}$ má dimenzi 1 a můžeme si ho představit jako přímku, která je kolmá na vektorový prostor $\mathcal{N}$, který má dimenzi obvykle podstatně větší (např. nekonečnou).

Každá náhodná veličina se dá snadno jednoznačně rozložit na složku ležící v $\mathcal{N}$ a na složku k ni kolmou, která má nulovou střední hodnotu:

$$X = E(X) + \big(X - E(X)\big)$$

kde $E(X) \in \mathcal{R}$ a $X - E(X) \in \mathcal{N}$. Současně máme k dispozici ortogonální projekci na prostor $\mathcal{N}$ (podle kolmice na něj, tedy podle prostoru $\mathcal{R}$):

$$\pi : \mathcal{L}_2 \to \mathcal{N}$$
$$\pi(X) := X - E(X)$$

Zřejmě π je lineární zobrazení a platí $\pi(\pi(Z)) = \pi(Z)$ a $\pi(Z + c) = \pi(Z)$ pro každou náhodnou veličinu $Z \in \mathcal{L}_2$ a konstantu $c \in \mathbb{R}$.

Korelace veličin X a Y pak je

$$\rho(X, Y) := \frac{\pi(X) \bullet \pi(Y)}{\|\pi(X)\| \cdot \|\pi(Y)\|}$$

tedy kosinus úhlu mezi složkami $\pi(X)$ a $\pi(Y)$ v prostoru $\mathcal{N}$.

Praktické použití: Pokud např. máme dvě veličiny X a Y takové, že

• výchylka veličiny X od jejího průměru je kladná právě když výchylka Y zase od jejího průměru je také kladná,

pak dostaneme nezápornou korelaci.

Neboli platí: Jestliže

$$X - E(X) > 0 \ \Leftrightarrow\ Y - E(Y) > 0$$

pak je $\rho(X, Y) \geq 0$.

Obdobně platí: Jestliže

$$X - E(X) > 0 \ \Leftrightarrow\ Y - E(Y) < 0$$

pak je $\rho(X, Y) \leq 0$.

Ačkoliv zpětné implikace v obou případech neplatí, přesto nám korelace umožňuje nějakým způsobem zachytit jistou míru kauzální závislosti dvou veličin.

8.3 (náhodný vektor - diskrétní)

Dvourozměrný náhodný vektor (X, Y) má pravděpodobnosti hodnot dané tabulkou:

X \ Y	0	1	2
0	1/18	1/9	1/6
1	1/9	1/18	1/9
2	1/6	1/6	1/18

(a) Stanovte pravděpodobnost $P(\frac{1}{2} \leq X \leq 3\ \&\ Y \geq 1)$.

(b) Určete marginální rozdělení veličin X a Y.

(c) Zjistěte, zda X a Y jsou nezávislé. Pokud ne, vypočtěte korelaci a popište rozdělení náhodného vektoru (X', Y') se stejnými marginálními rozděleními, jehož složky jsou nezávislé veličiny.

Řešení:
Zřejmě

$$P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq 3 \ \&\ Y \geq 1\right) = P\Big((X,Y) \in \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}\Big) = \frac{1}{18} + \frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} = \frac{7}{18}\ .$$

Marginální pravděpodobnostní funkce p_X a p_Y (tj. pravděpodobnostní funkce jednotlivých složek vektoru) získáme pro jednotlivé hodnoty sečtením pravděpodobností v řádcích (p_X) a sloupcích (p_Y) naší tabulky:

X \ Y	0	1	2	p_X
0	1/18	1/9	1/6	1/3
1	1/9	1/18	1/9	5/18
2	1/6	1/6	1/18	7/18
p_Y	1/3	1/3	1/3	

Protože např. $p_{X,Y}(0,0) = \frac{1}{18} \neq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = p_X(0) \cdot p_Y(0)$, tak X a Y jsou závislé. Spočítáme tedy jejich korelaci (můžeme si pomoci i maticí):

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{5}{18} + 2 \cdot \frac{7}{18} = \frac{19}{18}$$

$$E(X^2) = 0^2 \cdot \frac{1}{3} + 1^2 \cdot \frac{5}{18} + 2^2 \cdot \frac{7}{18} = \frac{11}{6}$$

$$E(Y) = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} = 1$$

$$E(Y^2) = 0^2 \cdot \frac{1}{3} + 1^2 \cdot \frac{1}{3} + 2^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

$$E(XY) = (0,1,2) \cdot \begin{pmatrix} 1/18 & 1/9 & 1/6 \\ 1/9 & 1/18 & 1/9 \\ 1/6 & 1/6 & 1/18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= (1,2) \cdot \begin{pmatrix} 1/18 & 1/9 \\ 1/6 & 1/18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{15}{18}$$

Korelace tedy je

$$\rho(X,Y) = \frac{E(XY) - E(X) \cdot E(Y)}{\sqrt{E(X^2) - E(X)^2} \cdot \sqrt{E(Y^2) - E(Y)^2}} = \frac{\frac{15}{18} - \frac{19}{18} \cdot 1}{\sqrt{\frac{11}{6} - (\frac{19}{18})^2} \cdot \sqrt{\frac{5}{3} - 1^2}} =$$

$$= -4\sqrt{\frac{3}{466}} \doteq -0,32094 \doteq \arccos(108,72^\circ)\ .$$

Nechť (X', Y') je nyní náhodný vektor s nezávislými složkami takovými, že $p_{X'} = p_X$ a $p_{Y'} = p_Y$. Pak pro jeho pravděpodobnostní funkci máme $p_{X',Y'}(i,j) = p_{X'}(i) \cdot p_{Y'}(j)$ a můžeme ji tak popsat následující tabulkou:

X' \ Y'	0	1	2	$p_{X'}$
0	1/9	1/9	1/9	1/3
1	5/54	5/54	5/54	5/18
2	7/54	7/54	7/54	7/18
$p_{Y'}$	1/3	1/3	1/3	

8.4 (korelace)

Náhodné veličiny X, Y vyhovují vztahu $\alpha X - \beta Y = \gamma$, kde α, β jsou nenulové reálné konstanty. Určete korelační koeficient $\rho(X,Y)$ a poměr směrodatných odchylek σ_X/σ_Y.

Řešení:
Pro jednodušší zápis použijeme označení $\pi(Z) := Z - E(Z)$ (což je lineární zobrazení) a dále

$$\|\cdot\|$$

pro normu odvozenou ze skalárního součinu

$$X \bullet Y := E(XY) \ .$$

Důvodem pro toto použití je definice směrodatné odchylky pro veličinu Z s konečným rozptylem:

$$\sigma_Z = \sqrt{D(Z)} = \sqrt{(Z - E(Z)) \bullet (Z - E(Z))} = \|\pi(Z)\| \ ,$$

Pro další výpočty potřebujeme předpokládat, že $D(X) \neq 0 \neq D(Y)$, jinak nemáme co zjišťovat.

Korelace je pak zapsána jako

$$\rho(X,Y) := \frac{\pi(X) \bullet \pi(Y)}{\|\pi(X)\| \cdot \|\pi(Y)\|} \ .$$

Máme tedy $X = \frac{\beta}{\alpha}Y - \frac{\gamma}{\alpha}$, takže $\pi(X) = \pi\left(\frac{\beta}{\alpha}Y - \frac{\gamma}{\alpha}\right) = \pi\left(\frac{\beta}{\alpha}Y\right) = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \pi\left(Y\right)$ a můžeme psát

$$\rho(X,Y) := \frac{\left(\frac{\beta}{\alpha} \cdot \pi\left(Y\right)\right) \bullet \pi(Y)}{\|\frac{\beta}{\alpha} \cdot \pi\left(Y\right)\| \cdot \|\pi(Y)\|} = \frac{\frac{\beta}{\alpha} \cdot \left(\pi\left(Y\right) \bullet \pi(Y)\right)}{\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \cdot \|\pi\left(Y\right)\| \cdot \|\pi(Y)\|} =$$

$$= \frac{\frac{\beta}{\alpha}}{\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|} \cdot \frac{\|\pi(Y)\|^2}{\|\pi(Y)\|^2} = \operatorname{sgn}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \in \{-1, 1\} \ .$$

Výsledek je tedy dán čistě znaménkem čísla $\frac{\beta}{\alpha}$ a hodnota korelace tak říká, jestli lineárně závislé veličiny $\pi(X)$ a $\pi(Y)$ jsou stejně orientované (v tomto případě je to když $\rho(X,Y) = 1$) nebo opačně orientované (když nastane druhá možnost, tedy $\rho(X,Y) = -1$).

Pro poměr směrodatných odchylek pak máme

$$\frac{\sigma_X}{\sigma_Y} = \frac{\|\pi(X)\|}{\|\pi(Y)\|} = \frac{\|\frac{\beta}{\alpha} \cdot \pi(Y)\|}{\|\pi(Y)\|} = \left|\frac{\beta}{\alpha}\right|.$$

8.5 (kovariance)

Pro náhodné veličiny X a Y platí, že

$$D(X) = 3, \quad D(Y) = 4, \quad \operatorname{cov}(X,Y) = -2.$$

Pro náhodné veličiny $U = 3X + 4Y - 1$ a $V = -2X + 2Y + 3$ určete koeficient kovariance $\operatorname{cov}(U,V)$.

Řešení:
Kovariance $\operatorname{cov}(\cdot,\cdot)$ má tyto vlastnosti:

- je lineární v každé složce zvlášť (tj. bilineární),
- $\mathrm{cov}(Z+c, W+d) = \mathrm{cov}(Z, W)$ pro všechna $c, d \in \mathbb{R}$,
- symetrická (tj. $\mathrm{cov}(Z, W) = \mathrm{cov}(W, Z)$) a
- $\mathrm{cov}(Z, Z) = D(Z)$.

Díky tomu můžeme tedy jednotlivé složky "roznásobit":

$$\mathrm{cov}(U, V) = \mathrm{cov}(3X + 4Y - 1, -2X + 2Y + 3) = \mathrm{cov}(3X + 4Y, -2X + 2Y) =$$

$$= 3 \cdot (-2) \cdot \mathrm{cov}(X, X) + 3 \cdot 2 \cdot \mathrm{cov}(X, Y) + 4 \cdot (-2) \cdot \mathrm{cov}(Y, X) + 4 \cdot 2 \cdot \mathrm{cov}(Y, Y) =$$

$$= (-6) \cdot D(X) + (-2) \cdot \mathrm{cov}(X, Y) + 8 \cdot D(Y) = (-6) \cdot 3 + (-2) \cdot (-2) + 8 \cdot 4 = 18 \ .$$

Jak je vidět, znalost $E(X)$ a $E(Y)$ jsme vůbec nepotřebovali!

Vlastnosti kovariance si můžeme zapamatovat pomocí definice

$$\mathrm{cov}(Z, W) = \pi(Z) \bullet \pi(W) \ ,$$

kde $\pi(Z) = Z - E(Z)$.

Je dobré si všimnout, ze díky bilinearitě můžeme také používat přehlednější maticový zápis:

$$\mathrm{cov}(aX + bY, cX + dY) = (a, b) \begin{pmatrix} \mathrm{cov}(X,X) & \mathrm{cov}(X,Y) \\ \mathrm{cov}(X,Y) & \mathrm{cov}(Y,Y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

V našem případě tedy

$$\mathrm{cov}(U, V) = (3, 4) \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = (3, 4) \begin{pmatrix} -10 \\ 12 \end{pmatrix} = 18 \ .$$