Vstupní test 6.10.2016

Zadání A

(1) [4 body] Kolika způsoby můžeme sestavit náramek pomocí 3 červených, 4 modrých a 5 žlutých korálků? Náramky považujeme za stejné, pokud se dají převést jeden na druhý otáčením při položení na stůl (bez použití překlápění, tj. bez zvednutí ze stolu).

Řešení:
Způsobů, jak rozmístit $3+4+5=12$ uvedených korálků do (rovné) řady, je $\frac{12!}{3!\cdot 4!\cdot 5!} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 3\cdot 2} = 12\cdot 11\cdot 10\cdot 3\cdot 7$. Po spojení začátku a konce řady do kruhu, pak máme vždy 12 způsobů (tj. 12 cyklických přepermutování), jak daný náramek získat z (rovné) řady. Celkový počet tak je $\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 3\cdot 7}{12} = 11\cdot 10\cdot 3\cdot 7 = 2310$.

Pokud bychom rozlišovali náramky ještě vzhledem k překlopení, pak bychom museli počet náramků ležících na stole ještě vydělit dvěma (podobně jako některé dva trojúhelníky v rovině mohou být shodné až po překlopení v rámci 3D prostoru). Počet náramků by pak byl $\frac{2310}{2} = 1155$. To plyne z toho, že žádný z náramků po překlopení není identický sám se sebou. A to proto, že obsahuje dva různé druhy korálků, které mají lichý počet.

(2) [4 body] Jak můžeme rozesadit 5 osob v 5-místném autě, když jen dva z nich mají řidičský průkaz? Jak se může rozesadit 20 cestujících a 2 řidiči v 25-místném minibuse?

Řešení:
Auto: Na místě řidiče mohou sedět jen 2 osoby a na zbývající 4 místa se rozesadí zbylí cestující. Tedy $2\cdot(4!) = 48$ možností.

Minibus: Podobně, na místě řidiče opět můžou sedět jen dva. Každý ze zbývajících 21 cestujících si pak zvolí právě jedno ze zbývajících 24 míst. To jsou tedy variace 21-té třídy z 24 prvků bez opakování, neboli $n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ pro $n=24$ a $k=21$. Celkem tak máme $2\cdot\frac{24!}{3!} = \frac{24!}{3}$ možností.

Zadání B

(1) [4 body] Kolika způsoby můžeme posadit na 12 židlí za kruhový stůl 6 manželských párů, pokud vždy chtějí sedět vedle sebe manžel s manželkou. Pro každého z nich není důležité místo na kterém sedí, ale jen to, kdo je jeho soused zprava a kdo je soused zleva.

Řešení:
Spočítáme nejdříve kolika způsoby se rozesadí do rovné řady na 12 míst 6 manželských párů tak, aby vždy vedle sebe seděl manžel s manželkou. Manžela s manželkou tak můžeme považovat za nedělitelnou jednotku. Tyto páry můžeme rozmístit 6! způsoby a v rámci páru pak máme vždy 2 způsoby jak dvojici rozesadit. Do rovné řady tak můžeme manželské páry rozesadit $2^6\cdot(6!)$ způsoby.

Tato rozesazení do řad pak vytvoří rozesazení kolem kruhového stolu, přičemž dvě řadová rozesazení R_1 a R_2 dají stejné kruhové rozesazení právě když R_1 můžeme převést na R_2 cyklickým posunem. Protože řadová uspořádání jsou tvořena ze dvojic jednotlivých manželských párů, je takovýchto různých cyklických posunů právě 6.

Celkem je tedy počet všech hledaných rozesazení kolem kruhového stolu roven $\frac{2^6\cdot(6!)}{6} = 2^6 \cdot (5!) = 7680$.

(2) [4 body] Kolik existuje (nenulových) přirozených čísel dělitelných 5-ti, které jsou menší než 8000 a jsou sestaveny z číslic $0, 1, 2, 5, 7, 9$, které se mohou opakovat?

Řešení:
Čísla odpovídají posloupnostem délky 4 sestavených z číslic $0, 1, 2, 5, 7, 9$, které se mohou opakovat a to takovým, že

- na 1. místě jsou cifry z $\{0, 1, 2, 5, 7\}$,
- na 2. a 3. místě jsou cifry z $\{0, 1, 2, 5, 7, 9\}$,
- na 4. místě jsou cifry z $\{0, 5\}$ a
- posloupnost je různá od posloupnosti 0000.

Celkem tedy $(5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2) - 1 = 360 - 1 = 359$ čísel.

Pokud bychom uvažovali jen neopakující se cifry, pak čísla musí končit buď cifrou 0 nebo 5. Jednociferné (nenulové) číslo je jen jedno (a sice číslo 5). Dvouciferných (tvaru "$a0$"nebo "$b5$") je $5 + (5 - 1) = 9$. Trojciferných (tvaru "$ab0$"nebo "$cd5$") je

$$5 \cdot 4 + (5 \cdot 4 - 1 \cdot 4) = (2 \cdot 5 - 1) \cdot 4 = 36 .$$

Odečítali jsme ty, co začínají cifrou 0.

A konečně, čtyřciferných (tvaru "$abc0$"nebo "$def5$", kde $a < 9$ a $d < 9$) je

$$(5 \cdot 4 \cdot 3 - 1 \cdot 4 \cdot 3) + (5 \cdot 4 \cdot 3 - 1 \cdot 4 \cdot 3 - 1 \cdot 4 \cdot 3) = (2 \cdot 5 - 3) \cdot 4 \cdot 3 = 84 .$$

V posledním případě jsme spočítali počet všech posloupností sestavitelných z původní množiny $\{0, 1, 2, 5, 7, 9\}$ neopakujících se cifer a odečetli ty, co začínají cifrou 9 nebo 0.

Celkem tedy máme $1 + 9 + 36 + 84 = 130$ čísel (pro neopakující se cifry).