10. cvičení z PST

6. prosince 2017

10.1 (metoda momentů a max. věrohodnosti - spojité rozdělení)

Náhodná veličina X s oborem hodnot $\langle a, +\infty)$ má hustotu

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & , \ t \in (-\infty, a), \\ e^{a-t} & , \ t \in \langle a, \infty), \end{cases}$$

kde $a \in \mathbb{R}$ je parametr. Pomocí metody maximální věrohodnosti i metody momentů odhadněte parametr a.

Úlohu vyřešte obecně pro realizaci $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a také pro konkrétní realizaci

$$\boldsymbol{x} = (1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 4)$$

rozsahu $n = 7$.

Řešení:

Funkce f_X je posunutá hustota exponenciálního rozdělení s parametrem $\tau = 1$. Je to tedy opět hustota, tj. je nezáporná a platí $\int_{\mathbb{R}} f_X(t)\, dt = 1$. Realizované výsledky musí spadat do oboru hodnot, tj.

$$x_i \in \langle a, +\infty)$$

pro všechna $i = 1, \ldots, n$ neboli musí platit, že

$$a \leq \min\{x_1, \ldots, x_n\} \ .$$

Metoda maximální věrohodnosti:

Naším cílem je maximalizovat funkci

$$\Lambda(a) = \prod_{i=1}^{n} e^{a - x_i} = e^{n\,a} \cdot e^{-\sum_i x_i} \ .$$

Tato funkce nabývá maxima pro největší přípustnou hodnotu parametru

$$\widehat{a} = \min\{x_1, \ldots x_n\} \ .$$

Pro konkrétní zadání je to pak

$$\widehat{a} = \min\{1, 2, 2, 2, 3, 3, 4\} = 1 \ .$$

Metoda momentů:

Porovnáme teoretickou střední hodnotu

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_X(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{\infty} t\, e^{a-t}\,\mathrm{d}t = [-t\, e^{a-t}]_{t=a}^{\infty} + \int_a^{\infty} e^{a-t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= a + [-e^{a-t}]_{t=a}^{\infty} = a + 1$$

a výběrový průměr $\overline{\boldsymbol{x}}$. Odtud tak pro parametr $\widehat{a}$ dostaneme

$$\widehat{a} = \overline{\boldsymbol{x}} - 1 \ ,$$

POKUD je ovšem splněno, že $a \leq \min\{x_1, \ldots, x_n\}$!

Pro konkrétní zadání je $\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{1+2+2+2+3+3+4}{7} = \frac{17}{7}$ a tedy $\widehat{a} = \frac{17}{7} - 1 \doteq 1.43$, což ale **NENÍ** menší než $\min\{1, 2, 2, 2, 3, 3, 4\} = 1$. V tomto případě tedy metoda momentů **NEDÁVÁ** žádný odhad.

10.2 (metoda momentů - spojité rozdělení)

Náhodná veličina X má biexponenciální rozdělení s hustotou

$$f_X(t) = c \cdot e^{-a|t|},\ t \in \mathbb{R}$$

kde $a, c > 0$. Metodou momentů odhadněte parametry na základě realizace rozsahu $n = 10$, z níž jsme vypočítali realizaci výběrového průměru $\overline{\boldsymbol{x}} = 2$ a realizaci výběrového rozptylu $s^2_{\boldsymbol{x}} = 4$.

Řešení:

Aby funkce f_X byla hustotou, musí být splněno, že

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\ dt = 2c \int_0^{\infty} e^{-at}\ dt = 2c \left[\frac{e^{-at}}{-a}\right]_{t=0}^{\infty} = \frac{2c}{a}$$

tedy $c = \frac{a}{2}$ a zbývá odhadnout parametr a.

Hustota je sudá funkce a proto střední hodnota $E(X)$ (stejně jako všechny liché momenty) bude nulová. Příslušné nevlastní integrály existují, protože klesající exponenciála převáží jakýkoliv polynom v nekonečnu.

Porovnáním teoretické střední hodnoty a výběrového průměru dostaneme $0 = E(X) = \overline{x} = 2$ což sice evidentně neplatí, ale nedává to žádné omezení na volbu parametrů a. Navíc těžko můžeme čekat, že se měřením přesně trefíme do teoretické hodnoty.

Musíme proto použít další moment:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f_X(t)\ dt = \int_0^{\infty} t^2 \big(a e^{-at}\big)\ dt = \underbrace{\left[t^2 \cdot (-e^{-at})\right]_{t=0}^{\infty}}_{=0} + \int_0^{\infty} 2t e^{-at}\ dt =$$

$$= \underbrace{\left[2t \cdot \frac{e^{-at}}{-a}\right]_{t=0}^{\infty}}_{=0} + \frac{2}{a} \int_0^{\infty} e^{-at}\ dt = \frac{2}{a^2}\ ,$$

který chceme srovnat s druhým vyběrovým momentem (nikoliv s výběrovým rozptylem!):

$$m_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2\ .$$

Ten se dá získat z hodnot $\overline{\boldsymbol{x}} = 2$ a $s^2_{\boldsymbol{x}} = 4$ podobným vztahem jako máme pro rozptyl, tj. $D(X) = E(X^2) - \Big(E(X)\Big)^2$, jen si musíme dát pozor na to, že někde je $\frac{1}{n}$ a někde zase $\frac{1}{n-1}$. Máme tedy

$$\frac{n-1}{n} \cdot s^2_{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \Big(x_i - \overline{\boldsymbol{x}}\Big)^2 = m_2 - (\overline{\boldsymbol{x}})^2$$

takže

$$m_2 = \frac{n-1}{n} \cdot s^2_{\boldsymbol{x}} + (\overline{\boldsymbol{x}})^2 = \frac{9}{10} \cdot 4 + 2^2 = \frac{38}{5}\ .$$

Srovnáním dostaneme

$$\frac{2}{a^2} = E(X^2) = m_2 = \frac{38}{5}$$

a celkem tak máme

$$a = \sqrt{\frac{5}{19}} = \frac{\sqrt{95}}{19} \doteq 0.512\,989 \qquad \text{a} \qquad c = \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{95}}{38} \doteq 0.256\,495\ .$$

10.3 (metoda momentů a max. věrohodnosti - spojité rozdělení)

Předpokládáme, že náhodná veličina X má posunuté exponenciální rozdělení s oborem hodnot $\langle T, \infty)$ a s hustotou

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tau}\ \exp\left(-\frac{t-T}{\tau}\right), & t \geq T, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde $\tau > 0$. Z realizace $x = (2, 3, 8, 4, 10, 3, 5)$ odhadněte parametry T, τ.

Řešení:

Realizované výsledky musí spadat do oboru hodnot, tj. $x_i \in \langle T, +\infty)$ pro všechna i, neboli musí platit, že

$$T \leq \min\{x_1, \ldots, x_n\} = \min\{2, 3, 8, 4, 10, 3, 5\} = 2\ .$$

Tímto máme omezení $T \in (-\infty, 2\rangle$.

Metoda maximální věrohodnosti:

Logaritmicko-věrohodnostní funkce je

$$\lambda(T,\tau) = \ln\Lambda(T,\tau) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\tau}\exp\left(-\frac{x_i - T}{\tau}\right)\right) = -n\ \ln\tau - \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{\tau}\, n\, T =$$

$$= -n\left(\ln\tau + \frac{\overline{\boldsymbol{x}} - T}{\tau}\right)$$

Pro $T \in (-\infty, 2\rangle$ je zřejmě vždy $\lambda(T,\tau) \leq \lambda(2,\tau)$, takže maximum stačí hledat pro $\widehat{T} = \min_i x_i = 2$. Pro parametr τ najdeme maximum pomocí derivace

$$0 = \frac{\partial\lambda}{\partial\tau}(2, \widehat{\tau}) = -n\left(\frac{1}{\widehat{\tau}} - \frac{\overline{\boldsymbol{x}} - 2}{\widehat{\tau}^2}\right) = n \cdot \frac{\overline{\boldsymbol{x}} - 2 - \widehat{\tau}}{\widehat{\tau}^2}$$

tedy

$$\widehat{\tau} = \overline{\boldsymbol{x}} - 2\ .$$

V našem případě máme $\overline{\boldsymbol{x}} = 5$, takže maximálně věrohodné odhady parametrů jsou

$$\widehat{T} = 2, \quad \widehat{\tau} = 3\ .$$

Metoda momentů:

Momenty pro X můžeme spočítat buď přímo, nebo prostě použijeme, že veličina $Y := X - T$ má exponenciální rozdělení $\mathrm{Exp}(\tau)$. Pro $u \geq 0$ totiž máme

$$F_Y(u) = P(X - T \leq u) = P(X \leq u + T) = \int_T^{u+T} \frac{1}{\tau}\ \exp\left(-\frac{t-T}{\tau}\right)\ dt =$$

$$= \left[\begin{smallmatrix} s+T=t \\ ds=dt \end{smallmatrix} \right] = \int_0^u \tfrac{1}{\tau} \exp\left(-\tfrac{s}{\tau}\right) \ ds \ .$$

Pro $Y \sim \mathrm{Exp}(\tau)$ je $E(Y) = \tau$ a $D(Y) = \tau^2$. Tudíž

$$E(X) = E(Y+T) = E(Y) + T = \tau + T$$

a

$$E(X^2) = D(X) + \big(E(X)\big)^2 = D(Y) + \big(E(Y)+T\big)^2 = \tau^2 + (\tau+T)^2 \ .$$

Výběrové momenty pak jsou

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{35}{7} = 5\,, \qquad m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \frac{227}{7} \doteq 32.429\,,$$

a z rovnic

$$\begin{aligned} \widehat{\tau} + \widehat{T} \quad &= E(X) \quad &&= \overline{\boldsymbol{x}} = 5\,, \\ (\widehat{\tau} + \widehat{T})^2 + \widehat{\tau}^2 \quad &= E(X^2) \quad &&= m_2 = \tfrac{227}{7}\,, \end{aligned}$$

dostaneme tak řešení

$$\begin{aligned} \widehat{\tau} \quad &= \sqrt{m_2 - \overline{\boldsymbol{x}}^2} = \sqrt{\tfrac{227}{7} - 5^2} = \tfrac{2\sqrt{91}}{7} \doteq 2.7255 \\ \widehat{T} \quad &= \overline{\boldsymbol{x}} - \widehat{\tau} = 5 - \sqrt{\tfrac{52}{7}} \doteq 2.2745 \end{aligned}$$

které ovšem NEODPOVÍDÁ zadání, neboť $\widehat{T} > x_1 = 2$, takže nalezený model nepřipouští pozorovanou hodnotu x_1 (ta by měla nulovou hustotu pravděpodobnosti).

10.4 (metoda momentů)

Datový soubor $\boldsymbol{x} = (-4, -3, -2, -1.5, 0.5, 1, 2.5, 3)$ je realizací náhodné veličiny X, která má spojité rovnoměrné rozdělení v intervalu $\langle -h, h\rangle$. Metodou momentů určete odhad parametru h (a ověřte, zda odhad odpovídá zadání).

Řešení:
Rozsah souboru je $n = 8$. Realizované výsledky musí spadat do oboru hodnot, tj. $|x_i| \le h$ pro všechna i neboli musí platit, že

$$h \ge \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} = 4 \ .$$

Náhodná veličina X má hustotu pravděpodobnosti

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2h} & , \quad |x| \le h, \\ & \\ 0 & , \quad |x| > h. \end{cases}$$

a tedy střední hodnotu $E(X)$ rovnou nule. Proto musíme použít další momenty (jen pro představu: $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = -\frac{3.5}{8} = -0.4375$). Dostaneme

$$E(X^2) = \int_{-h}^{h} \frac{x^2}{2h}\ dx = \left[\frac{x^3}{6h}\right]_{-h}^{h} = \frac{h^2}{3} \ .$$

Odhad druhého momentu je

$$m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \frac{47.75}{8} = 5.96875\,.$$

Odhad parametru získáme jako řešení rovnice

$$\frac{\widehat{h}^2}{3} = E(X^2) = m_2 = \frac{47.75}{8} \quad\Longrightarrow\quad \widehat{h} = \sqrt{17.90625} \doteq 4.2316\,.$$

Protože všechny hodnoty ze souboru leží v intervalu $\langle -h,\, h\rangle = \langle -4.2316,\, 4.2316\rangle$, můžeme nalezenou hodnotu h tudíž považovat za hledaný odhad parametru rozdělení.

10.5 (intervalový odhad pomocí CLV)

Počet X ryb, které rybář uloví za den je popsán Poissonovým rozdělením s parametrem $\lambda = 3$. Na ryby jde $n = 100$-krát za rok. Najděte symetrický interval, v němž se počet ulovených ryb za rok nachází s pravděpodobností 95%.

Řešení:
Pro $i = 1, \ldots, n$ máme veličiny

$$X_i = \text{"}\textit{počet ryb ulovených za i-tý den}\text{"}$$

které jsou za nezávislé a mají Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda = 3$.
Takže

$$E(X_i) = \lambda = 3 \quad \text{a} \quad D(X_i) = \lambda = 3\,.$$

Počet ryb ulovených za $n = 100$ dnů je

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i\,.$$

Takže $E(Y) = n{\cdot}\lambda = 100{\cdot}3 = 300$ a (díky nezávislosti) je $D(Y) = n{\cdot}\lambda = 100{\cdot}3 = 300$. Odhadem z CLV má veličina Y přibližně normální rozdělení $N\big(300, 300\big) =: N(\mu, \sigma^2)$. Pro takovouto veličinu má symetrický $1 - \alpha = 95\%$ intervalový odhad tvar

$$\Big\langle \mu - \sigma \cdot \Phi^{-1}\left(1 - \tfrac{\alpha}{2}\right),\ \ \mu + \sigma \cdot \Phi^{-1}\left(1 - \tfrac{\alpha}{2}\right)\Big\rangle =$$

$$= \left\langle 300 - 10\sqrt{3} \cdot \Phi^{-1}(0.975),\ \ 300 + 10\sqrt{3} \cdot \Phi^{-1}(0.975) \right\rangle \doteq$$

$$\doteq \langle 300\ -\ 33.948,\quad 300\ +\ 33.948\rangle\,.$$

10.6 (intervalový odhad pomocí CLV)

Veličina X, představující životnost žárovky, má exponenciální rozdělení s parametrem τ. Průměrná životnost $n = 64$ náhodně vybraných žárovek je $\overline{\boldsymbol{x}} = 210$ hodin. Pomocí centrální limitní věty určete oboustranný symetrický 95% interval spolehlivosti pro parametr τ.

Řešení:

Pro veličinu X máme $E(X) = \tau$ a $D(X) = \tau^2$. Veličina průměrná životnost $n = 64$ žárovek je dána jako

$$\overline{\boldsymbol{X}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \ .$$

Pro ni máme $E(\overline{\boldsymbol{X}}) = \tau$ a $D(\overline{\boldsymbol{X}}) = \frac{\tau^2}{n}$. Podle CLV má veličina $\overline{X}$ přibližně normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2) := N\big(\tau, \frac{\tau^2}{n}\big)$. Oboustranný symetrický $1 - \alpha = 95\%$ odhad spolehlivosti pro realizaci $\overline{\boldsymbol{x}}$ veličiny $\overline{\boldsymbol{X}}$ je

$$\mu - \sigma \cdot \Phi^{-1}\left(1 - \tfrac{\alpha}{2}\right) \ \leq \ \overline{\boldsymbol{x}} \ \leq \ \mu + \sigma \cdot \Phi^{-1}\left(1 - \tfrac{\alpha}{2}\right),$$

po dosazení to je

$$\tau - \frac{\tau}{\sqrt{n}} \cdot \Phi^{-1}(0.975) \ \leq \ \overline{\boldsymbol{x}} \ \leq \ \tau + \frac{\tau}{\sqrt{n}} \cdot \Phi^{-1}(0.975)$$

a po úpravě dostáváme

$$\frac{\overline{\boldsymbol{x}}}{1 + \frac{\Phi^{-1}(0.975)}{\sqrt{n}}} \ \leq \ \tau \ \leq \ \frac{\overline{\boldsymbol{x}}}{1 - \frac{\Phi^{-1}(0.975)}{\sqrt{n}}}$$

Realizace veličiny $\overline{\boldsymbol{X}}$ je $\overline{\boldsymbol{x}} = 210$ (hodin). Hledaný oboustranný symetrický 95% interval spolehlivosti (v hodinách) pro τ je tak přibližně

$$\left\langle \frac{210}{1+\frac{1.96}{\sqrt{64}}}, \ \frac{210}{1-\frac{1.96}{\sqrt{64}}} \right\rangle \doteq \left\langle 168.675, \ 278.146 \right\rangle .$$

10.7 (intervalový odhad pro střední hodnotu)

Soubor dat (75, 85, 58, 72, 70, 75) je náhodným výběrem z normálního rozdělení N(μ, σ^2). Stanovte oboustranný symetrický 95% interval spolehlivosti pro střední hodnotu μ.

Řešení:
K určení intervalového odhadu použijeme statistiku

$$T = \frac{\overline{\boldsymbol{X}} - \mu}{S_{\boldsymbol{X}}} \sqrt{n}$$

která má Studentovo rozdělení $t(n-1)$, kde $n = 6$ je rozsah souboru. Oboustranný symetrický $1 - \alpha = 95\%$ interval spolehlivosti pro realizaci t veličiny T je

$$-q_{\mathrm{t}(n-1)}(1 - \tfrac{\alpha}{2}) \ \leq \ \frac{\overline{\boldsymbol{x}} - \mu}{s_{\boldsymbol{x}}} \sqrt{n} \ \leq \ q_{\mathrm{t}(n-1)}(1 - \tfrac{\alpha}{2}) \ .$$

Po úpravě máme

$$\overline{\boldsymbol{x}} - \frac{s_{\boldsymbol{x}}}{\sqrt{n}} \, q_{\mathrm{t}(5)}(0.975) \ \leq \ \mu \ \leq \ \overline{\boldsymbol{x}} + \frac{s_{\boldsymbol{x}}}{\sqrt{n}} \, q_{\mathrm{t}(5)}(0.975) \ .$$

Určíme si realizaci výběrového průměru $\overline{\boldsymbol{x}}$ a výběrového rozptylu $s_{\boldsymbol{x}}^2$

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{6} x_i = \frac{435}{6} = 72.5$$

$$s_{\boldsymbol{x}}^2 = \frac{1}{5} \left(\sum_{i=1}^{6} x_i^2 - 6 \cdot (\overline{\boldsymbol{x}})^2 \right) = \frac{385.5}{5} \doteq 77.1 , \qquad s_{\boldsymbol{x}} \doteq 8.781 .$$

Z tabulek kvantilů Studentova rozdělení dostaneme $q_{\mathrm{t}(5)}(0.975) \doteq 2.57$, a hledaný interval je tedy

$$63.29 \leq \mu \leq 81.71\,.$$

10.8 (intervalový odhad pro rozptyl)

Soubor (70, 84, 89, 70, 74, 70) je náhodným výběrem z normálního rozdělení $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Určete oboustranný symetrický 95% interval spolehlivosti pro rozptyl σ^2.

Řešení:
Interval spolehlivosti pro rozptyl určíme ze statistiky

$$T = \frac{(n-1)\ S^2_{\boldsymbol{X}}}{\sigma^2}\,,$$

má rozdělení $\chi^2(n-1)$, kde $n = 6$ je rozsah výběru a $S^2_{\boldsymbol{X}}$ je výběrový rozptyl. Oboustranný symetrický $1-\alpha = 95\%$ interval spolehlivosti pro realizaci t veličiny T je

$$q_{\chi^2(n-1)}\left(\tfrac{\alpha}{2}\right) \ \leq\ \frac{(n-1)\ s^2_{\boldsymbol{x}}}{\sigma^2} \ \leq\ q_{\chi^2(n-1)}\left(1-\tfrac{\alpha}{2}\right)\,.$$

Po úpravě máme

$$\frac{(n-1)\ s^2_{\boldsymbol{x}}}{q_{\chi^2(n-1)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \ \leq\ \sigma^2 \ \leq\ \frac{(n-1)\ s^2_{\boldsymbol{x}}}{q_{\chi^2(n-1)}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\,.$$

Realizace výběrového průměru a rozptylu jsou

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i = \frac{457}{6} \doteq 76.17$$

$$s^2_{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{5}\left(\sum_{i=1}^{6} x_i^2 - 6\cdot(\overline{\boldsymbol{x}})^2\right) \doteq \frac{341.787}{5} \doteq 68.358$$

a příslušné kvantily jsou

$$q_{\chi^2(5)}(0.025) = 0.831$$

$$q_{\chi^2(5)}(0.975) = 12.83\,.$$

Po dosazení dostáváme hledaný interval

$$26.64 \doteq \frac{341.787}{12.83} \ \leq\ \sigma^2 \ \leq\ \frac{341.787}{0.831} \doteq 411.296\,.$$

10.9 (intervalový odhad pro rozptyl)

Deset opakovaných měření obsahu alkoholu ve vzorku krve má průměrnou hodnotu $\overline{\boldsymbol{x}} = 0.15$ promile (alkoholu v krvi) a směrodatnou odchylku $s_{\overline{\boldsymbol{x}}} = 0.01$ promile (alkoholu v krvi). Jakou hodnotu σ_0 překročí chyba metody (t.j. směrodatná odchylka) s pravděpodobností nejvýše $\alpha = 1\,\%$? Uveďte použité předpoklady.

Řešení:
U veličiny

$Y =$ *"obsahu alkoholu v krvi (v promilích)"*

budeme předpokládat normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$. Naše veličina

$X =$ *"chyba měření obsahu alkoholu v krvi (v promilích)"*

bude tedy určena jako $X = Y - \mu$ s rozdělením $N(0, \sigma^2)$. Jednotlivá měření považujeme za nezávislá. Hledáme horní $1 - \alpha = 99\%$ intervalový odhad pro parametr rozptylu σ^2, který bude tvaru $\langle 0, \sigma_0^2 \rangle$.

Pro statistiku

$$T = \frac{(n-1)\, S_{\boldsymbol{X}}^2}{\sigma^2}$$

s χ^2-rozdělením s $n-1 = 9$ stupni volnosti máme, že s pravděpodobností $1-\alpha = 99\%$ pro realizaci t veličiny T platí, že:

$$q_{\chi^2(n-1)}(\alpha) \leq t = \tfrac{(n-1)\, s_{\boldsymbol{x}}^2}{\sigma^2}$$

takže

$$\sigma^2 \leq \tfrac{(n-1)\, s_{\boldsymbol{x}}^2}{q_{\chi^2(n-1)}(\alpha)} =: \sigma_0^2$$

a hledaná hranice tak je

$$\sigma_0 = s_{\boldsymbol{x}} \cdot \sqrt{\tfrac{n-1}{q_{\chi^2(n-1)}(\alpha)}} = 0.01 \cdot \sqrt{\frac{9}{q_{\chi^2(9)}(0.01)}} \doteq \frac{0.03}{\sqrt{2.0879}} \doteq 0.02076.$$