10. cvičení z PSI

13. prosince 2017

11.1 (test střední hodnoty při známém rozptylu)

Posuďte na hladině významnosti $\alpha = 0.01$ hypotézu, že mince je symetrická, jestliže

(a) při $n = 200$ hodech padl líc $80\times$,

(b) při $n = 100$ hodech padl líc $40\times$.

(tj. v obou případech to bylo 40% výsledků).

(**Návod:** Použijte vhodnou statistiku s přibližně normálním rozdělením odvozenou na základě centrální limitní věty pro náhodnou veličinu $X(líc) = 1$, $X(rub) = 0$.)

Řešení:

Situace, kdy přesně známe rozptyl daného (normálního) rozdělení, není příliš obvyklá. Většinou jej máme jen odhadnutý a pak musíme používat Studentovo rozdělení namísto normálního. Výjimkou jsou ale případy, kdy rozptyl nějakého rozdělení (alternativního, exponenciálního, Poissonova, atd.) je svázaný se střední hodnotou tohoto rozdělení prostřednictvím nějakého parametru.

Může se zdát, že pak se ale nedá použít obvyklý postup pro *test střední hodnoty se známým rozptylem*, protože nemáme normální rozdělení. To si ale můžeme vyrobit (přibližně) pomocí CLV.

Výsledky hodu mincí představují náhodnou veličinu $X(líc) = 1$, $X(rub) = 0$ s alternativním rozdělením s parametrem p, tj. $P(X = 1) = p$.

Naše nulová hypotéza tedy bude

$$\mathbf{H}_0 : p = p_0$$

proti alternativní hypotéze:

$$\mathbf{H}_1 : p \neq p_0$$

kde $p_0 = \frac{1}{2}$.

Vezmeme si nezávislé náhodné veličiny (kopie veličiny X)

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{, při } i\text{-tém pokusu padl líc,} \\ 0 & \text{, při } i\text{-tém pokusu padl rub .} \end{cases}$$

Za předpokladu nulové hypotézy budeme pro veličinu

$$\overline{\boldsymbol{X}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

mít $E(\overline{\boldsymbol{X}}) = \frac{1}{2}$ a $D(\overline{\boldsymbol{X}}) = \frac{1}{4n}$, takže podle CLV má (normovaná) statistika

$$T = \frac{\overline{\boldsymbol{X}} - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4n}}} = \frac{\overline{\boldsymbol{X}} - 0.5}{0.5}\sqrt{n},$$

přibližně (normované) normální rozdělení $N(0, 1)$.

Poznámka: Tato statistika je analogií statistiky

$$T' = \frac{\overline{\boldsymbol{X}}' - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n},$$

pro případ veličiny X' s normálním rozdělením $N(\mu, \sigma)$ a pro nulovou hypotézu

$$\mathbf{H}_0' : \mu = \mu_0 \ .$$

Pozor! Nenaznačujeme tím, že by naše původní veličina X s alternativním rozdělením snad měla vlastnosti nějaké jiné veličiny X' s normálním rozdělením! Jde tu o to, ze při hledání kritického oboru pro X (při dané hladině významnosti α) je postup principiálně stejný jako pro případ, kdy X' má normální rozdělení - viz dále.

Kritérium pro **ZAMÍTNUTÍ** je tvaru

$$|t| > \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \text{zamítáme } \mathbf{H}_0 \text{ (na dané hladině } \alpha) \ .$$

Zdůvodnění tvaru zamítacího kritéria: Nulová hypotéza je tvaru $\mathbf{H}_0 : p = p_0$ a hodnotu p aproximujeme pomocí $\overline{\boldsymbol{x}}$. Chceme si proto zvolit takovou dolní hranici $u_1 \in \mathbb{R}$ a takovou horní hranici $u_2 \in \mathbb{R}$, aby pravděpodobnost, že je hodnota veličiny $\overline{\boldsymbol{X}}$ překročí, byla nejvýše rovna hodnotě $\alpha = 1\%$ (zvolená hladina významnosti) a navíc tak, že překročení směrem výše bude stejně pravděpodobně jako směrem níže (neboli na každou stranu $\alpha/2$). Jinými slovy, má platit, že

$$P(\overline{\boldsymbol{X}} < u_1) = \frac{\alpha}{2} = P(u_2 < \overline{\boldsymbol{X}})$$

neboli

$$u_1 = q_{\overline{\boldsymbol{X}}}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad \text{a} \quad u_2 = q_{\overline{\boldsymbol{X}}}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

(u veličiny $\overline{\boldsymbol{X}}$ předpokládáme normální rozdělení.)

Pokud nastane jedno z překročení (tj. pro realizaci $\overline{\boldsymbol{x}}$ máme $\overline{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R} \setminus \langle u_1, u_2 \rangle$), budeme to považovat za příliš porušení nulové hypotézy (pro danou toleranci chyby) a zamítneme ji. Místo veličiny $\overline{\boldsymbol{X}}$ a jejích kvantilů si ale raději vezmeme už zmíněnou statistiku $T = \frac{\overline{\boldsymbol{X}} - 0.5}{0.5}\sqrt{n}$, která je jen transformací veličiny $\overline{\boldsymbol{X}}$, a problém pomocí ní ekvivalentně přeformulujeme. Veličina T má přibližně rozdělení $N(0,1)$, takže meze pro T snadno najdeme:

$$P\left(T < \Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = \frac{\alpha}{2} = P\left(\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) < T\right) \ .$$

Tedy kritériem pro **ZAMÍTNUTÍ** nulové hypotézy je případ, kdy pro realizaci t statistiky T nastane

$$t < \Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad \text{nebo} \quad \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) < t$$

neboli

$$|t| > \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \ ,$$

protože máme rovnost $\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$.

Nyní stačí už jen dosadit:
(a) Zde máme $n = 200$, $\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{80}{200} = 0.4$ a $1 - \frac{\alpha}{2} = 0.995$ takže

$$|t| = \left|\frac{\overline{\boldsymbol{x}} - 0.5}{0.5}\sqrt{n}\right| = \left|\frac{0.4 - 0.5}{0.5}\sqrt{200}\right| \doteq 2,828 > 2,576 \doteq \Phi^{-1}(0.995) \ .$$

Hypotézu $\mathbf{H}_0 : p = \frac{1}{2}$ tedy **ZAMÍTÁME** na dané hladině $\alpha = 1\%$.

(b) Zde máme $n = 100$ a opět $\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{40}{100} = 0.4$ a $1 - \frac{\alpha}{2} = 0.995$ takže

$$|t| = \left|\frac{\overline{\boldsymbol{x}} - 0.5}{0.5}\sqrt{n}\right| = \left|\frac{0.4 - 0.5}{0.5}\sqrt{100}\right| = 2 \ \not> \ 2,576 \doteq \Phi^{-1}(0.995) \ .$$

Hypotézu $\mathbf{H}_0 : p = \frac{1}{2}$ tedy **NEZAMÍTÁME** na dané hladině $\alpha = 1\%$.

Jak je vidět, za předpokladu, že mince je symetrická se jen 40% úspěšných pokusů dá ještě tolerovat při $n = 100$ hodech, ale už ne při $n = 200$ hodech.

11.2 (test střední hodnoty normálního rozdělení při neznámém rozptylu)

Výrobce tvrdí, že spotřeba automobilu je $\mu_0 = 8$ litrů na 100 km. Průměrná spotřeba $n = 49$ uživatelů však byla $\overline{\boldsymbol{x}} = 8.4$ litru na 100 km s výběrovým rozptylem $s^2_{\boldsymbol{x}} = 2.56$. Testujte na hladině významnosti $\alpha = 5\%$, zda má výrobce pravdu, a uveďte použité předpoklady.

Řešení:
K provedení testu střední hodnoty (s neznámým rozptylem) potřebujeme předpokládat, že testovaná veličina spotřeby X má normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ a že měření odpovídají náhodnému výběru (tj. jsou nezávislá). Protože předpokládáme (přesné) normální rozdělení, nemusíme (jako u CLV) mít zase tak velký rozsah souboru.

Podle zadání máme otestovat hypotézu o střední hodnotě

$$\mathbf{H}_0 : \mu = \mu_0 (= 8)$$

proti alternativní hypotéze:

$$\mathbf{H}_1 : \mu \neq \mu_0 (= 8) \ .$$

Hodnotu rozptylu neznáme, takže je nutné použít testovací statistiku, která obsahuje odhad směrodatné odchylky σ pomocí $S_{\boldsymbol{X}}$:

$$T = \frac{\overline{\boldsymbol{X}} - \mu_0}{S_{\boldsymbol{X}}} \sqrt{n} \ .$$

Kritérium pro **ZAMÍTNUTÍ** je tvaru

$$|t| > q_{t(n-1)} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \text{zamítáme } \mathbf{H}_0 \text{ (na dané hladině } \alpha) \ .$$

Zdůvodnění tvaru zamítacího kritéria: Za předpokladu platnosti nulové hypotézy, tj. pokud $E(X) = \mu_0$, bude mít statistika T tzv. Studentovo t-rozdělení s $n - 1$ stupni volnosti (speciálně tedy bude platit $E(T) = 0$) a očekávané hodnoty takovéto statistiky by se měly pohybovat blízko nuly. Pokud se příliš odchýlí (více než bude dovolovat hladina α omezující chybu 1. druhu), bude to důvod k zamítnutí nulové hypotézy.

Odchýlení opět znamená, že realizované hodnoty t statistiky T spadnou do kritického oboru W (pro statistiku T), který je symetrický vzhledem k 0 z hlediska pravděpodobnosti. Bude tedy tvaru $W: \ (-\infty, u_0) \cup (u_1, \infty)$, kde $P(T < u_0) = \frac{\alpha}{2} = P(u_1 < T)$ (což je omezení chyby 1. druhu, tj. že bychom se spletli a zamítli něco, co platí). Dostáváme tak $u_0 = q_{t(n-1)} \left(\frac{\alpha}{2}\right) = -q_{t(n-1)} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = -u_1$, tudíž

$$W: \quad \left(-\infty, -q_{t(n-1)} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right) \cup \left(q_{t(n-1)} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right), \infty\right)$$

a kritérium pro **ZAMÍTNUTÍ** je tak skutečně tvaru

$$|t| > q_{t(n-1)} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \text{zamítáme } \mathbf{H}_0 \text{ (na dané hladině } \alpha).$$

Teď už tedy dosadíme konkrétní hodnoty. Realizace testovací statistiky je

$$t = \frac{\overline{\boldsymbol{x}} - \mu_0}{\sqrt{s^2_{\boldsymbol{x}}}} \sqrt{n} = \frac{8.4 - 8}{\sqrt{2.56}} \sqrt{49} = \frac{0.4}{1.6} \cdot 7 = 1.75 \ .$$

Protože

$$|t| = 1.75 \not> 2.011 \doteq q_{t(48)}(0.975) = q_{t(n-1)} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \ ,$$

nulovou hypotézu **NEZAMÍTÁME**.

Naše měření tak nejsou dostačující na to, abychom mohli zamítnout tvrzení výrobce na hladině významnosti 5%. Je dobré si ještě zjistit, jak moc bychom si museli dovolit být nejistí, abychom už tvrzení výrobce zamítli. Tato hladina α_0 je určena jako

$$q_{t(n-1)}\left(1-\frac{\alpha_0}{2}\right)=|t|\ ,$$

tedy

$$\alpha_0 = 2-2\cdot F_{t(n-1)}(|t|) = 2-2\cdot F_{t(n-1)}(1.75) \doteq 2-2\cdot 0.9567 = 0.0866\ .$$

Pokud tedy budeme posuzovat hypotézu na hladině významnosti **VYŠŠÍ** než $8,66\%$, dojdeme k jejímu zamítnutí. (A naopak čím více si chceme být jistí, že jsme se nespletli (tj. zmenšujeme hodnoty α), tím víc "prohřešků" od výrobce budeme muset tolerovat.)

Poznámka: Podle zadání jsme uvažovali případ, kde se ptáme na rovnost (tj. $\mu=\mu_0$). V této situaci máme jedinou možnost, jak zvolit nulovou hypotézu - a sice výše uvedeným způsobem. Jako nulovou hypotézu není možné zvolit případ $\mu\neq\mu_0$, protože množina $\{\mu\in\mathbb{R}\mid\mu\neq\mu_0\}$ není uzavřená.

V úvahu vzhledem k zadání by ale mohl ještě přicházet jednostranný test, protože výrobce určitě raději tvrdí, že $\mu\leq\mu_0$. V tomto případě pak buď můžeme testovat $\mathbf{H}_0'$: $\mu\leq\mu_0$, ale mohli bychom také testovat $\mathbf{H}_0''$: $\mu\geq\mu_0$.

V případě testu hypotézy $\mathbf{H}_0'$: $\mu\leq\mu_0$ se snažíme vyhnout tomu, že bychom omylem poškodili *výrobce*, a výsledek testu bude

$$t=1.75>1.6772\doteq q_{t(48)}(0.95)=q_{t(n-1)}\left(1-\alpha\right)$$

takže hypotézu výrobce **ZAMÍTNEME**. (Pozor, jde o jednostranný test, takže kvantil je jiný! Veškerou chybu jsme spotřebovali jen na ty vysoké hodnoty. A toto malé zvětšení, oproti oboustrannému testu, už stačilo na zamítnutí.)

A v případě testu hypotézy $\mathbf{H}_0''$: $\mu\geq\mu_0$ se snažíme vyhnout tomu, že bychom omylem poškodili *uživatele*, a výsledek testu bude

$$t=1.75\not<-1.6772\doteq -q_{t(48)}(0.95)=q_{t(n-1)}\left(\alpha\right)$$

takže hypotézu uživatelů **NEZAMÍTNEME**.

11.3 (test střední hodnoty normálního rozdělení při neznámém rozptylu)

Z $n=10$ měření krevního tlaku u jednoho pacienta jsme obdrželi výběrový průměr $\overline{\boldsymbol{x}}=150$ a výběrovou směrodatnou odchylku $s_{\boldsymbol{x}}=20$. Rozhodněte na hladině významnosti $\alpha=0.05$, zda je střední hodnota krevního tlaku nejvýše $\mu_0=140$. Předpokládejte, že výška krevního tlaku má normální rozdělení a jednotlivá měření jsou nezávislá.

Řešení:

Hypotéza, že $\mu\geq\mu_0(=140)$ by znamenala, že pacient je na tom asi dost špatně. To ale předpokládat nechceme (ledaže bychom k tomu měli zvláštní důvod) a naopak budeme předpokládat, že by měl být spíš v pořádku a budeme proto testovat hypotézu

$$\mathbf{H}_0:\mu\leq\mu_0$$

proti hypotéze

$$\mathbf{H}_1:\mu>\mu_0.$$

Opět použijeme testovací statistiku

$$T=\frac{\overline{\boldsymbol{X}}-\mu_0}{S_{\boldsymbol{X}}}\sqrt{n}$$

a kritérium pro **ZAMÍTNUTÍ** bude tvaru

$$t>q_{t(n-1)}\left(1-\alpha\right)\quad\Rightarrow\quad\text{zamítáme }\mathbf{H}_0\text{ (na dané hladině }\alpha)\ .$$

Dosadíme opět konkrétní hodnoty. Realizace testovací statistiky je

$$t = \frac{\overline{\boldsymbol{x}} - \mu_0}{s_{\boldsymbol{x}}}\sqrt{n} = \frac{150 - 140}{20}\sqrt{10} \doteq 1.58 \; .$$

Protože

$$t \doteq 1.58 \not> 1.83 \doteq q_{t(9)}(0.95) = q_{t(n-1)}\,(1-\alpha) \;\; ,$$

nulovou hypotézu **NEZAMÍTÁME**.

Zdůvodnění tvaru zamítacího kritéria: Abychom si více uvědomili závislost veličiny X na parametru μ, budeme ji vyznačovat jako X_μ a podobně pro statistiku $T_\mu = \frac{\overline{\boldsymbol{X}}_\mu - \mu_0}{S_{\boldsymbol{X}_\mu}}\sqrt{n}$. Protože předpokládáme $\mathbf{H}_0 : \; \mu \leq \mu_0$, a tedy $E(\overline{\boldsymbol{X}}_\mu) = \mu$, budou očekávané hodnoty statistiky T_μ především v intervalu $(-\infty, 0\rangle$. Jako kritický obor si proto zvolíme

$$W : (u_1, \infty) \; ,$$

kde požadujeme, aby $u_1 \in \mathbb{R}$ bylo nejmenší takové, aby chyba 1. druhu byla nejvýše α, tj.

$$(\forall \mu \leq \mu_0) \quad P(T_\mu \in W) = P(u_1 < T_\mu) \leq \alpha \; .$$

Je nutné zdůraznit, že za předpokladu nulové hypotézy (tj. že $\mu \leq \mu_0$) statistika T_μ obecně **NEMÁ** Studentovo t-rozdělení (t-rozdělení se objeví právě jen pokud $\mu = \mu_0$).

Přesto ho ale nakonec použijeme, protože případ $\mu = \mu_0$ je za předpokladu $\mathbf{H}_0$ ten "nejhorší" možný, jak je vidět z následujícího:

$$\mu \leq \mu_0 \quad \Rightarrow \quad T_\mu = \frac{\overline{\boldsymbol{X}}_\mu - \mu_0}{S_{\boldsymbol{X}_\mu}}\sqrt{n} \quad = \quad \frac{\overline{\boldsymbol{X}}_\mu - \mu}{S_{\boldsymbol{X}_\mu}}\sqrt{n} + \underbrace{\frac{\mu - \mu_0}{S_{\boldsymbol{X}_\mu}}\sqrt{n}}_{\leq 0} \quad \leq \quad \underbrace{\frac{\overline{\boldsymbol{X}}_\mu - \mu}{S_{\boldsymbol{X}_\mu}}\sqrt{n}}_{t-\text{rozdělení}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad P\Big(u_1 < T_\mu\Big) \leq P\left(u_1 < \frac{\overline{\boldsymbol{X}}_\mu - \mu}{S_{\boldsymbol{X}_\mu}}\sqrt{n}\right) = 1 - F_{t(n-1)}(u_1) = P\Big(u_1 < T_{\mu_0}\Big)$$

Vidíme tedy, že $P\Big(u_1 < T_\mu\Big) \leq P\Big(u_1 < T_{\mu_0}\Big)$ a hledané u_1 tak musí splňovat, že

$$P\Big(u_1 < T_{\mu_0}\Big) = \alpha$$

tedy

$$u_1 = q_{t(n-1)}(1-\alpha)$$

a kritérium pro **ZAMÍTNUTÍ** je tak skutečně tvaru

$$t > q_{t(n-1)}\,(1-\alpha) \quad \Rightarrow \quad \text{zamítáme } \mathbf{H}_0 \text{ (na dané hladině } \alpha) \; .$$

11.4 (test střední hodnoty normálního rozdělení při neznámém rozptylu)

Provádíme průzkum, jaký skutečný objem piva X točí v nejmenované restauraci. Zakoupeno bylo $n = 10$ piv a jejich objem byl (v litrech):

$$\boldsymbol{x} = (0.510, \;\; 0.462, \;\; 0.491, \;\; 0.466, \;\; 0.451, \;\; 0.503, \;\; 0.475, \;\; 0.487, \;\; 0.512, \;\; 0.505)\,.$$

Předpokládejte, že natočený objem piva X se řídí normálním rozdělením a jednotlivá měření jsou nezávislá.

(a) Pro zvolenou hladinu $\alpha = 0.05$ odhadněte (symetricky intervalově) střední hodnotu objemu natočeného piva.

(b) Na hladině $\alpha = 0.05$ otestujte hypotézu, že dostaneme natočeno alespoň $\mu_0 = 0.5$ litru.

Řešení:
Rozptyl je neznámý. Spočítáme si proto realizaci výběrového průměru $\overline{\boldsymbol{x}}$ a výběrové směrodatné odchylky $s_{\boldsymbol{x}}$:

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{10}(0.510 + 0.462 + \cdots + 0.505) = \frac{4.862}{10} = 0.4862 \ ,$$

$$s_{\boldsymbol{x}}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{\boldsymbol{x}})^2 = \frac{1}{n-1}\Big[\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big) - n\cdot\overline{\boldsymbol{x}}^2\Big] =$$

$$= \frac{1}{9}\Big[(0.510^2 + 0.462^2 + \cdots + 0.505^2) - 10\cdot(0.4862)^2\Big] =$$

$$= \frac{1}{9}\Big(2.368154 - 2.3639044\Big) = \frac{0.0042496}{9} = 4.72178\cdot 10^{-4} \ ,$$

$$s_{\boldsymbol{x}} = \sqrt{s_{\boldsymbol{x}}^2} = \sqrt{4.72178}\cdot 10^{-2} \doteq 2.173\cdot 10^{-2} \ .$$

(a) Veličina X má normální rozdělení $N(\mu,\sigma^2)$. Statistika $T = \frac{\overline{\boldsymbol{X}}-\mu}{S_{\boldsymbol{X}}}\sqrt{n}$ má pak Studentovo t-rozdělení s $n-1$ stupni volnosti. Pokud chceme, aby T padlo **MIMO** interval $\langle u_0, u_1\rangle$ s pravděpodobností α (a to se stejnou pravděpodobností “nad” i “pod”), pak budeme mít

$$\langle u_0, u_1\rangle = \Big\langle -q_{t(n-1)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right), \quad q_{t(n-1)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\Big\rangle$$

Pro $\alpha = 0.05$ tak úpravami dostaneme

$$0.95 = P\left(-q_{t(9)}(0.975) \quad\leq\quad \frac{\overline{\boldsymbol{X}}-\mu}{S_{\boldsymbol{X}}}\sqrt{n} \quad\leq\quad q_{t(9)}(0.975)\right) =$$

$$= P\left(\overline{\boldsymbol{X}} - \frac{S_{\boldsymbol{X}}}{\sqrt{n}}\cdot q_{t(9)}(0.975) \quad\leq\quad \mu \quad\leq\quad \overline{\boldsymbol{X}} + \frac{S_{\boldsymbol{X}}}{\sqrt{n}}\cdot q_{t(9)}(0.975)\right) \ .$$

Kvantil Studentova rozdělení je $q_{t(n-1)}(1-\frac{\alpha}{2}) = q_{t(9)}(0.975) \doteq 2.26$ a tedy

$$\frac{s_{\boldsymbol{x}}}{\sqrt{n}}\cdot q_{t(9)}(0.975) \doteq \frac{2.173\cdot 10^{-2}}{\sqrt{10}}\cdot 2.26 \doteq 0.0155$$

Hledaný oboustranný symetrický 95% interval spolehlivosti (v litrech) pro střední hodnotu μ je tak

$$\Big\langle \overline{\boldsymbol{x}} - \frac{s_{\boldsymbol{x}}}{\sqrt{n}}\cdot q_{t(9)}(0.975), \quad \overline{\boldsymbol{x}} + \frac{s_{\boldsymbol{x}}}{\sqrt{n}}\cdot q_{t(9)}(0.975)\Big\rangle \doteq \Big\langle 0.4862 - 0.0155, \quad 0.4862 + 0.0155\Big\rangle$$

$$\doteq \langle 0.4707, 0.5017\rangle \ .$$

(b) Otestujeme nulovou hypotézu

$\mathbf{H}_0 : \mu \geq 0.5 \ (= \mu_0)$

proti alternativní hypotéze:

$\mathbf{H}_1 : \mu < 0.5$

na hladině významnosti $\alpha = 0.05$.

Opět použijeme statistiku

$$T = \frac{\overline{\boldsymbol{X}} - \mu_0}{S_{\boldsymbol{X}}} \cdot \sqrt{n}$$

a **ZAMÍTACÍ** kritérium

$$t < q_{t(n-1)}(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \text{zamítáme } \mathbf{H}_0 \text{ (na dané hladině } \alpha) \ .$$

Realizace testovací statistiky je

$$t = \frac{\overline{\boldsymbol{x}} - \mu_0}{s_{\boldsymbol{x}}} \sqrt{n} \doteq \frac{0.4862 - 0.5}{2.173 \cdot 10^{-2}} \sqrt{10} \doteq -2.008$$

a kvantil Studentova rozdělení je

$$q_{t(n-1)}(\alpha) = -q_{t(n-1)}(1-\alpha) = -q_{t(9)}(0.95) \doteq -1.83 \ .$$

Protože

$$t \doteq -2.008 < -1.83 \doteq q_{t(9)}(0.05) \ ,$$

nulovou hypotézu tedy **ZAMÍTÁME**. V této hospodě bychom si tedy asi pivo dávat nechtěli.

Doplnění: Na druhé straně, pokud by přišla do této hospody kontrola a chtěla testovat správnou míru, tj. hypotézu

$\mathbf{H}_0' : \mu = 0.5 \ (= \mu_0)$

také na hladině $\alpha = 0.05$, dojde k jinému závěru:

$$|t| \doteq 2.008 \not> 2.2622 \doteq q_{t(9)}(0.975) = q_{t(n-1)}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

a tudíž hypotézu $\mathbf{H}_0'$ **NEZAMÍTNE**.