12. cvičení z PST

20. prosince 2017

12.1 (test rozptylu normálního rozdělení)

Do laboratoře bylo odesláno $n = 5$ stejných vzorků krve ke stanovení obsahu alkoholu X (v promilích alkoholu). Výsledkem byla realizace

$$\boldsymbol{x} = (0.8, \quad 1, \quad 0.6, \quad 1.4, \quad 0.9) \ .$$

Posuďte na hladině významnosti $\alpha = 0.05$, zda směrodatná odchylka měření je nejvýše $\sigma_0 = 0.1$ promile alkoholu. Předpokládejte, že obsah alkoholu X má normální rozdělení a jednotlivá měření jsou nezávislá.

Řešení:

Naše veličina X, udávající obsah alkoholu v krvi v promilích, má normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$. Místo testu směrodatné odchylky σ budeme (ekvivalentně) testovat rozptyl σ^2 a sice nulovou hypotézu tvaru

$$\mathbf{H}_0 : \sigma^2 \leq (0.1)^2 \ (= \sigma_0)^2$$

proti alternativní hypotéze:

$$\mathbf{H}_1 : \sigma^2 > (0.1)^2$$

na hladině významnosti $\alpha = 0.05$.

Tentokrát budeme používat statistiku

$$T = \frac{(n-1)\, S_{\boldsymbol{X}}^2}{\sigma_0^2} \ ,$$

která má pro případ $\sigma = \sigma_0$ tzv. χ^2-rozdělení s $n-1$ stupni volnosti. Obecněji, teprve veličina $\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \cdot T$ bude mít χ^2-rozdělení. Za předpokladu nulové hypotézy, tj. pro $0 \leq \sigma \leq \sigma_0$, budou očekávané hodnoty statistiky T především v intervalu $(-\infty, 1\rangle$ (ve skutečnosti to bude jen interval $\langle 0, 1\rangle$, protože T je nezáporná veličina). Kritický obor tak bude

$$W : \ \left(q_{\chi^2(n-1)}(1-\alpha), \quad \infty \right)$$

a kritérium pro **ZAMÍTNUTÍ** proto bude tvaru

$$t > q_{\chi^2(n-1)}\,(1-\alpha) \quad \Rightarrow \quad \text{zamítáme } \mathbf{H}_0 \text{ (na dané hladině } \alpha) \ .$$

Dosadíme opět konkrétní hodnoty:

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{0.8 + 1 + 0.6 + 1.4 + 0.9}{5} = \frac{4.7}{5} = 0.94 \ ,$$

$$s_{\boldsymbol{x}}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{\boldsymbol{x}})^2 = \frac{0.14^2 + 0.06^2 + 0.34^2 + 0.46^2 + 0.04^2}{4} = \frac{0.352}{4} = 0.088 \ .$$

Realizace testovací statistiky je

$$t = \frac{(n-1)\, s_{\boldsymbol{x}}^2}{\sigma_0^2} = \frac{4 \cdot 0.088}{(0.1)^2} = 35.2$$

a hodnota kvantilu je

$$q_{\chi^2(n-1)}(1-\alpha) = q_{\chi^2(4)}(0.95) \doteq 9.49 \ .$$

Protože

$$t \doteq 35.2 \not> 9.49 \doteq q_{\chi^2(4)}(0.95) \ ,$$

nulovou hypotézu **ZAMÍTÁME**.

Zdůvodnění tvaru kritického oboru: Opět si vyznačme závislost X a T na parametru σ jako

$$T_\sigma = \frac{(n-1)S^2_{\mathbf{X}_\sigma}}{(\sigma_0)^2} \ .$$

Kritický obor má být tvaru

$$W : \quad (u_1, \infty) \ ,$$

kde požadujeme, aby $u_1 \in \mathbb{R}$ bylo nejmenší takové, aby chyba 1. druhu byla nejvýše α, tj.

$$(\forall\ 0 \le \sigma \le \sigma_0) \quad P(T_\sigma \in W) = P(u_1 < T_\sigma) \le \alpha \ .$$

Opět případ $\sigma = \sigma_0$ je za předpokladu $\mathbf{H}_0$ ten "nejhorší" možný, jak je vidět z následujícího:

$$\sigma \le \sigma_0 \quad \Rightarrow \quad T_\sigma \ = \ \underbrace{\frac{\sigma^2}{(\sigma_0)^2}}_{\le 1} \ \cdot \ \frac{(n-1)S^2_{\mathbf{X}_\sigma}}{\sigma^2} \ \le \ \underbrace{\frac{(n-1)S^2_{\mathbf{X}_\sigma}}{\sigma^2}}_{\chi^2-\text{rozdělení}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad P\Big(u_1 < T_\sigma\Big) \le P\left(u_1 < \frac{(n-1)S^2_{\mathbf{X}_\sigma}}{\sigma^2}\right) = 1 - F_{\chi^2(n-1)}(u_1) = P\Big(u_1 < T_{\sigma_0}\Big)$$

Vidíme tedy, že $P\Big(u_1 < T_\sigma\Big) \le P\Big(u_1 < T_{\sigma_0}\Big)$ a hledané u_1 tak musí splňovat

$$P\Big(u_1 < T_{\sigma_0}\Big) = \alpha$$

tedy

$$u_1 = q_{\chi^2(n-1)}(1-\alpha) \ ,$$

a kritický obor je tak skutečně tvaru

$$W : \quad \Big(q_{\chi^2(n-1)}(1-\alpha), \quad \infty\Big) \ .$$

12.2 (test střední hodnoty dvou normálních rozdělení se stejným neznámým rozptylem)

Z realizací náhodných veličin X a Y (s normálním rozdělením) jsme z výběrů daného rozsahu obdrželi tyto realizace odhadů:

X	Y
$m = 11$	$n = 21$
$\overline{\boldsymbol{x}} = 10$	$\overline{\boldsymbol{y}} = 12,$
$s_{\boldsymbol{x}} = 2$	$s_{\boldsymbol{y}} = 3$

Posuďte na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ hypotézu, že střední hodnoty náhodných veličin X a Y jsou stejné. Současně zkontrolujte, zda je možné použít potřebné předpoklady.

Řešení:
Abychom mohli použít test střední hodnoty dvou normálních rozdělení se *stejným* neznámým rozptylem, měli bychom nejdříve otestovat, zda obě veličiny stejný rozptyl skutečně mají.

Test stejného rozptylu: Předpokládáme, že veličiny X a Y jsou *nezávislé* s normálními rozděleními po řadě $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ s $N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Jednotlivá měření pro X a Y považujeme *všechna navzájem za nezávislá.*

Budeme testovat nulovou hypotézu o rovnosti rozptylů

$$\mathbf{H}_0' : \ \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

proti alternativní hypotéze

$$\mathbf{H}_1' : \ \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \ .$$

Testovací statistika je

$$T' = \frac{S_{\boldsymbol{X}}^2}{S_{\boldsymbol{Y}}^2} \ ,$$

a má za předpokladu $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ tzv. Fisherovo-Snedecorovo $F(m-1, n-1)$ - rozdělení s $m-1$ a $n-1$ stupni volnosti (v tomto pořadí!).

Za předpokladu nulové hypotézy $\mathbf{H}_0'$ je očekávaná hodnota statistiky T' rovna 1 a kritický obor tak (podobně jako v některých předchozích příkladech) bude

$$W : \ \left(-\infty, \ q_{F(m-1,n-1)}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \cup \left(q_{F(m-1,n-1)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right), \ \infty\right) \ .$$

Kritérium pro **ZAMÍTNUTÍ** je proto tvaru

$$\left[t' < q_{F(m-1,n-1)}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \ \text{ nebo } \ q_{F(m-1,n-1)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) < t' \right] \ \Rightarrow \ \text{zamítáme } \mathbf{H}_0' \text{ (na dané hladině } \alpha) \ .$$

Realizace testovací statistiky je

$$t' = \frac{s_{\boldsymbol{x}}^2}{s_{\boldsymbol{y}}^2} = \frac{4}{9} \doteq 0,444$$

a hodnoty kvantilů jsou

$$q_{F(m-1,n-1)}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = q_{F(10,20)}(0.025) = \frac{1}{q_{F(20,10)}(0.975)} \doteq \frac{1}{3.42} \doteq 0.2924$$

a

$$q_{F(m-1,n-1)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = q_{F(10,20)}(0.975) \doteq 2.77 \ .$$

Protože

$$t' \doteq 0.444 \in \left\langle 0.2924, \ 2.77 \right\rangle \ ,$$

hypotézu $\mathbf{H}_0'$, že X *a* Y *mají stejný rozptyl*, **NEZAMÍTÁME**.

Test rovnosti středních hodnot se stejným neznámým rozptylem:

Předpokládáme, že veličiny X a Y jsou *nezávislé* s normálními rozděleními po řadě $N(\mu_1, \sigma^2)$ s $N(\mu_2, \sigma^2)$. Tento předpoklad je podložen předchozím testem rovnosti rozptylů, který jsme nezamítli. Jednotlivá měření pro X a Y považujeme opět *všechna navzájem za nezávislá.*

Budeme testovat nulovou hypotézu o rovnosti středních hodnot

$$\mathbf{H}_0 : \ \mu_1 = \mu_2$$

proti alternativní hypotéze

$$\mathbf{H}_1 : \ \mu_1 \neq \mu_2 \ .$$

Testovací statistika je

$$T = \frac{\boldsymbol{X} - \boldsymbol{Y}}{S\sqrt{1/m + 1/n}} \ ,$$

kde

$$S^2 = \frac{m-1}{m+n-2} \cdot S^2_{\boldsymbol{X}} + \frac{n-1}{m+n-2} \cdot S^2_{\boldsymbol{Y}}$$

je (vážený) odhad rozptylu. Za předpokladu nulové hypotézy $\mathbf{H}_0$, tj. $\mu_1 = \mu_2$, má statistika T Studentovo $t(m+n-2)$-rozděleni s $m+n-2$ stupni volnosti.

Kritérium pro **ZAMÍTNUTÍ** bude proto (očekávatelně) tvaru

$$|t| > q_{t(m+n-2)}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \text{zamítáme } \mathbf{H}_0 \text{ (na dané hladině } \alpha\text{)} \ .$$

Po dosazení máme

$$s^2 = \frac{(m-1)s^2_{\boldsymbol{x}} + (n-1)s^2_{\boldsymbol{y}}}{m+n-2} = \frac{10 \cdot 2^2 + 20 \cdot 3^2}{10+20} = \frac{22}{3}$$

a

$$t = \frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}}{s\sqrt{1/m + 1/n}} = \frac{10 - 12}{\sqrt{\frac{22}{3}}\sqrt{\frac{1}{11} + \frac{1}{21}}} = -\frac{3}{4}\sqrt{7} \doteq -1.984 \ .$$

Hodnota kvantilu je

$$q_{t(m+n-2)}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = q_{t(30)}(0.975) \doteq 2.042 \ .$$

Protože

$$|t| \doteq 1.984 \not> 2.042 \doteq q_{t(m+n-2)}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \ ,$$

hypotézu $\mathbf{H}_0$, ze X *a* Y *mají stejnou střední hodnotu*, také **NEZAMÍTÁME**.

12.3 (párový pokus)

U $n = 8$ praváků jsme změřili délku prostředníčku na pravé a levé ruce, hodnoty v milimetrech uvádí tabulka.

Levá	81	74	90	84	77	67	59	70
Pravá	84	76	89	85	80	69	58	68

Na hladině významnosti $\alpha = 5\%$ posuďte hypotézu, že praváci mají delší prostředníček na levé ruce, a uveďte předpoklady.

Řešení:

Označme si jako veličinu X délku prostředníčku na levé ruce a jako veličinu Y délku prostředníčku na pravé ruce (u téhož člověka, zde navíc praváka). Pokud na jednom subjektu provádíme měření více veličin (zde X a Y), pak už jejich vzájemné hodnoty nemůžeme považovat za nezávislé. Za nezávislá ovšem samozřejmě považujeme měření dvojice veličin (X, Y) (tj. náhodného vektoru) u různých lidí.

U veličiny $\Delta := X - Y$, která představuje rozdíly mezi veličinami můžeme přirozeně předpokládat normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ (neboť jde o odchylky, které obvykle tuto vlastnost mají). Máme tedy nezávislá měření s hodnotami $\boldsymbol{\delta} = (x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n)$ a naše původní hypotéza $E(X) \geq E(Y)$ lze ekvivalentně vyjádřit pomocí $0 \leq E(X) - E(Y) = E(\Delta) = \mu$ jako nulová hypotéza

$\mathbf{H}_0: \ \mu \geq 0$

kterou otestujeme proti alternativní hypotéze

$\mathbf{H}_1: \ \mu < 0 \ .$

na hladině významnosti $\alpha = 5\%$.

Půjde tedy o obvyklý test střední hodnoty (veličiny s normálním rozdělením) při neznámém rozptylu. Použijeme tudíž statistiku

$$T = \frac{\overline{\boldsymbol{\Delta}}}{S_{\boldsymbol{\Delta}}}\sqrt{n}$$

a kritérium pro **ZAMÍTNUTÍ** bude tvaru

$$t < q_{t(n-1)}(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \text{zamítáme } \mathbf{H}_0 \text{ (na dané hladině } \alpha) \ .$$

Určíme si hodnoty realizace $\boldsymbol{\delta}$ veličiny $\boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{X} - \boldsymbol{Y}$

$\boldsymbol{x}$	81	74	90	84	77	67	59	70
$\boldsymbol{y}$	84	76	89	85	80	69	58	68
$\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$	-3	-2	1	-1	-3	-2	1	2

Spočteme její výběrový průměr a rozptyl (pro $n = 8$):

$$\overline{\boldsymbol{\delta}} = -\frac{7}{8} = -0.875\,, \quad s^2_{\boldsymbol{\delta}} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\delta_i - \overline{\boldsymbol{\delta}}\right)^2 = \frac{215}{56} \doteq 3.8393\ ,$$

určíme realizaci statistiky

$$t = \frac{\overline{\boldsymbol{\delta}}}{s_{\boldsymbol{\delta}}}\sqrt{n} = -\frac{7\sqrt{7}}{\sqrt{215}} \doteq -1.263$$

a příslušný kvantil

$$q_{\mathrm{t}(n-1)}(\alpha) = -q_{\mathrm{t}(n-1)}(1-\alpha) = -q_{\mathrm{t}(7)}(0.95) \doteq -1.895\ .$$

Protože

$$t \doteq -1.263 \not< -1.895 \doteq q_{\mathrm{t}(7)}(0.05)\ ,$$

nulovou hypotézu, že praváci mají delší levý prostředníček než pravý, **NEZAMÍTÁME**.

12.4 (test nekorelovanosti dvou výběrů z normálních rozdělení)

Pro realizace

X	22	15	30	27	29
Y	10	6	8	4	8

náhodných výběrů z veličin X, Y testujte na hladině významnosti $\alpha = 5\,\%$ jejich korelovanost.

Řešení:

Testujeme hypotézu o koeficientu korelace $\varrho(X,Y)$ mezi náhodnými veličinami X a Y,

$\mathbf{H}_0: \ \varrho(X,Y) = 0$ (tj. náhodné veličiny X a Y jsou nekorelované)

proti alternativní hypotéze

$\mathbf{H}_1$: $\varrho(X,Y) \neq 0$ (tj. náhodné veličiny X a Y jsou korelované.)

K testování použijeme výběrový koeficient korelace $R(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ a testovou statistiku

$$T = \frac{R(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-R^2(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})}} \ ,$$

která má Studentovo rozdělení $\mathrm{t}(n-2)$, kde n je rozsah výběrů. Realizaci $r(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ výběrového koeficientu korelace $R(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ vypočteme ze vzorce

$$r(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)\cdot\left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\right)}{\sqrt{\left(n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right)\cdot\left(n\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\right)^2\right)}} \ .$$

Za předpokladu nulové hypotézy $\mathbf{H}_0$, tj. $\varrho(X,Y) = 0$, je očekávaná hodnota statistiky T rovna 0. Kritérium pro **ZAMÍTNUTÍ** proto (podobně jako pro některé předchozí testy) bude tvaru

$$|t| > q_{t(n-2)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \text{zamítáme } \mathbf{H}_0 \text{ (na dané hladině } \alpha) \ .$$

Je $n = 5$,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 123, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i = 36, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 3\,179, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 280, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 890 \ .$$

Po dosazení hodnot dostaneme

$$r(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{4450-4428}{\sqrt{766\cdot 104}} = \frac{11}{2\sqrt{4979}} \doteq 0.07794$$

$$t = \frac{r(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}} = \sqrt{\frac{363}{19795}} \doteq 0.1354.$$

Z tabulek nalezneme kvantil

$$q_{t(n-2)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = q_{\mathrm{t}(3)}(0.975) \doteq 3.18 \ .$$

Protože

$$|t| \doteq 0.1354 \not> 3.18 \doteq q_{\mathrm{t}(3)}(0.975) \ ,$$

hypotézu $\mathbf{H}_0$ **NEZAMÍTÁME**.

12.5 (test dobré shody - geometrické rozdělení)

Realizací náhodné veličiny X jsme dostali následující četnosti výsledků:

hodnota	0	1	2	3	4	5	6
pozorovaná četnost	29	15	10	5	3	0	2

Posuďte na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ hypotézu, že náhodná veličina X má geometrické rozdělení s parametrem $q = 1/2$, tj. pravděpodobnostní funkce je

$$p_X(i) = q^i(1-q), \quad i \in \mathbb{N}_0 \ .$$

Řešení:
Veličina s geometrickým rozdělením nabývá nekonečně mnoha hodnot. Test dobré shody je ale možné dělat jen s veličinou s *konečně* mnoha hodnotami. Proto musíme některé hodnoty sloučit do jediné skupiny. Zde se přirozeně nabízí udělat to pro hodnoty 6 a výše. Pravděpodobnost pro tuto skupinu je pak součet pravděpodobností jednotlivých hodnot v této skupině. V našem případě je

$$P(X \geq 6) = 1 - P(X < 6) = 1 - \sum_{i=0}^{5} p_X(i) = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}\right) = \frac{1}{64} \, .$$

Při testu dobré shody porovnáváme naměřené četnosti s očekávanými četnostmi. Rozsah souboru (tj. počet měření) je $N = 29+15+10+5+3+0+2 = 64$. Naší tabulku tedy zpřesníme a doplníme o teoretické pravděpodobnosti p_i a teoretické (tj. očekávané) četnosti $N \cdot p_i$:

položka i	0	1	2	3	4	5	≥ 6
pozorovaná četnost n_i	29	15	10	5	3	0	2
teoretická pravděpodobnost p_i	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	1/64	1/64
teoretická četnost $N \cdot p_i$	32	16	8	4	2	1	1

Další podmínkou pro test dobré shody je to, aby jednotlivé položky měly TEORETICKÉ četnosti $N \cdot p_i \geq 5$. Pokud tomu tak není, je potřeba položky vhodně sloučit tak, abychom této hranice dosáhli. Zde se opět nabízí udělat to pro hodnoty $i \geq 3$.

Původní veličinu X tedy nakonec nahradíme veličinou X' popsanou následující tabulkou:

položka i	0	1	2	≥ 3
pozorovaná četnost n_i	29	15	10	10
teoretická pravděpodobnost p_i	1/2	1/4	1/8	1/8
teoretická četnost $N \cdot p_i$	32	16	8	8

Nyní už můžeme zformulovat naši nulovou hypotézu

$$\mathbf{H}_0 : \text{pro pravděpodobnosti hodnot veličiny } X' \text{ platí } \left(p_0,\ p_1,\ p_2,\ p_{\geq 3}\right) = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{8}\right),$$

kterou budeme testovat proti alternativní hypotéze:

$$\mathbf{H}_1 : \text{pro pravděpodobnosti hodnot veličiny } X' \text{ platí } \left(p_0,\ p_1,\ p_2,\ p_{\geq 3}\right) \neq \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{8}\right).$$

Pro test dobré shody používáme určitou statistiku T, jejíž *realizace* t se počítá vzorcem

$$t = \sum_{i \in K} \frac{(n_i - N \cdot p_i)^2}{N \cdot p_i} \, ,$$

kde K je množina položek veličiny X a $k = |K|$ je jejich počet. Rozdělení statistiky T se pro $N \to \infty$ blíží k $\chi^2(k-1)$-rozdělení s $k-1$ stupni volnosti (právě kvůli přibližnosti jsme také potřebovali teoretické četnosti ≥ 5).

Kritérium pro **ZAMÍTNUTÍ** bude podobné jako u jednostranného testu rozptylu (protože jde opět o χ^2-rozdělení). Je tedy tvaru

$$t > q_{\chi^2(k-1)}(1-\alpha) \quad \Rightarrow \quad \text{zamítáme } \mathbf{H}_0 \text{ (na dané hladině } \alpha) \, .$$

Zdůvodnění tvaru zamítacího kritéria: Máme-li správné rozdělení, měly by být odchylky teoretických a naměřených četností malé a proto i hodnota statistiky T bude spíše menší. Jako kritický obor si tudíž volíme opět $W : (u_1, \infty)$, kde má platit, že $P(u_1 < T) = \alpha$. Dostaneme tak, že $u_1 = q_{\chi^2(k-1)}(1-\alpha)$, protože předpokládáme, že T má přibližně χ^2-rozdělení.

V našem případě máme $k = 4$. Hodnota statistiky je

$$t = \frac{(29-32)^2}{32} + \frac{(15-16)^2}{16} + \frac{(10-8)^2}{8} + \frac{(10-8)^2}{8} = 1.34375$$

a hodnota kvantilu je

$$q_{\chi(k-1)}(1-\alpha) = q_{\chi(3)}(0.95) \doteq 7.815 \ .$$

Protože

$$t = 1.34375 \not> 7.815 \doteq q_{\chi(3)}(0.95) \ ,$$

nulovou hypotézu $\mathbf{H}_0$ pro veličinu X' **NEZAMÍTÁME**. Tento výsledek interpretujeme tak, že hypotézu

X má geometrické rozdělení s parametrem $q = 1/2$,

rovněž **NEZAMÍTÁME**.

12.6 (test dobré shody - rovnoměrné rozdělení)

Účastníci konference budou ubytováni ve čtyřpatrovém penziónu se 12 pokoji, v každém patře jsou tři pokoje se dvěma lůžky. Každý z $N = 20$ účastníků poslal organizátorům nezávisle svůj požadavek čísla pokoje, kde by chtěl být ubytovaný. Čísla byla následující

$$(8,\ 12,\ 5,\ 4,\ 3,\ 5,\ 6,\ 12,\ 11,\ 2,\ 6,\ 4,\ 2,\ 12,\ 11,\ 9,\ 6,\ 7,\ 9,\ 9).$$

Otestujte na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ hypotézu

$\mathbf{H}_0$: rozdělení účastníků do pater je rovnoměrné

proti alternativě

$\mathbf{H}_1$: rozdělení účastníků do pater není rovnoměrné.

patro	1	2	3	4
čísla pokojů	1 – 3	4 – 6	7 – 9	10 – 12

Řešení:

Veličina X, která přiřazuje účastníkovi patro, ve kterém bude bydlet, má 4 položky. Požadavek rovnoměrného rozdělení znamená, že pravděpodobnosti p_i těchto položek (tj. patra očíslovaná pomocí $i = 1, \ldots, 4$) budou $(p_1, p_2, p_2, p_4) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. Hypotézu tedy vyjádříme konkrétně:

$\mathbf{H}_0$: pro pravděpodobnosti hodnot veličiny X platí $(p_1, p_2, p_2, p_4) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$,

a alternativní hypotéza bude:

$\mathbf{H}_1$: pro pravděpodobnosti hodnot veličiny X platí $(p_1, p_2, p_2, p_4) \neq \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

K rozhodování použijeme χ^2-test dobré shody. Setřídíme data do skupin a vypočteme empirické četnosti n_i, které zapíšeme spolu s teoretickými četnostmi $N \cdot p_i$ do tabulky. Ze zadání máme $N = 20$ počet dat, $k = 4$ počet tříd a $p_i = \frac{1}{4}$, $1 \leq i \leq 4$, pro rovnoměrné rozdělení.

číslo patra i	1	2	3	4
čísla pokojů	$1-3$	$4-6$	$7-9$	$10-12$
n_i	3	7	5	5
$N \cdot p_i$	5	5	5	5

Podmínka na teoretické četnosti ≥ 5 je splněna, takže položky nemusíme slučovat. Dosadíme do vzorce pro realizaci t statistiky T, která má v tomto případě rozdělení přibližně $\chi^2(k-1) = \chi^2(3)$

$$t = \sum_{i=1}^{4} \frac{(n_i - N \cdot p_i)^2}{N \cdot p_i} = \frac{1}{5}\left(2^2 + 2^2 + 0^2 + 0^2\right) = 1.6\,,$$

a porovnáme ji s kvantilem

$$q_{\chi^2(k-1)}(1-\alpha) = q_{\chi^2(3)}(0.95) \doteq 7.815\ .$$

Protože

$$t = 1.6 \not> 7.815 \doteq q_{\chi(3)}(0.95)\ ,$$

nulovou hypotézu $\mathbf{H}_0$, že rozdělení účastníků do pater je rovnoměrné, **NEZAMÍTÁME**.

12.7 (test dobré shody - nezávislost veličin)

Na $N = 100$ lidech byla pozorována barva očí a vlasů. Data jsou shrnuta v tabulce. Na hladině $\alpha = 5\%$ testujte hypotézu o nezávislosti barvy očí a vlasů.

Oči \ Vlasy	tmavé	světlé
modré	10	20
šedé	10	10
hnědé	40	10

Řešení:

Označme si X veličinu, která přiřazuje danému člověku barvu očí a Y veličinu, která přiřazuje témuž člověku barvu vlasů. Budeme testovat hypotézu:

$\mathbf{H}_0$: rozdělení veličin X a Y jsou *nezávislá*

proti alternativní hypotéze:

$\mathbf{H}_1$: rozdělení veličin X a Y jsou *závislá.*

na hladině významnosti $\alpha = 5\%$. Označme si ještě pro jednoduchost obor hodnot veličiny X jako $A = \{\textit{modré, šedé, hnědé}\}$ a obor veličiny Y jako $B = \{\textit{tmavé, světlé}\}$. Četnosti pro $(i,j) \in A \times B$ z tabulky označme jako $n_{i,j}$.

Rozdělení veličin X ani Y neznáme a proto je odhadneme jako

$$p_X(i) = \frac{n_{i,*}}{N}\ ,$$

$$p_Y(j) = \frac{n_{*,j}}{N}\ ,$$

kde

$$n_{*,i} = \sum_{j \in B} n_{i,j} \quad \text{a} \quad n_{j,*} = \sum_{i \in A} n_{i,j}$$

jsou marginální četnosti.

$n_{i,j}$ $(Y =)\ j$ / $(X =)\ i$	tmavé	světlé	$n_{i,*}$
modré	10	20	30
šedé	10	10	20
hnědé	40	10	50
$n_{*,j}$	60	40	100

Za předpokladu nezávislosti veličin X a Y máme $p_{X,Y}(i,j) = p_X(i) \cdot p_Y(j)$. Hypotézu o nezávislosti tedy můžeme přeformulovat takto

$\mathbf{H}_0 : p_{X,Y}(i,j) = p_X(i) \cdot p_Y(i)$ pro všechna $(i,j) \in A \times B$,

a alternativní hypotézu jako

$\mathbf{H}_1 : p_{X,Y}(i,j) \neq p_X(i) \cdot p_Y(i)$ pro alespoň jedno $(i,j) \in A \times B$.

Otestování hypotézy $\mathbf{H}_0$ tak bude **TÉMĚŘ** odpovídat obvyklému testu dobré shody s předepsaným rozdělením (tentokrát pracujeme s diskrétním náhodným vektorem (X,Y)) ale s tím rozdílem, že počet stupňů volnosti bude (kvůli odhadu marginálních pravděpodobností) **JINÝ**, než by tomu bylo u obvyklého testu dobré shody se 6 položkami. Počet stupňů volnosti je v tomto případě

$$\big(|A| - 1\big) \cdot \big(|B| - 1\big) = (3-1) \cdot (2-1) = 2\ .$$

Za předpokladu $\mathbf{H}_0$ pro očekávané četnosti pro jednotlivé hodnoty (i,j) náhodného vektoru (X,Y) pak bude platit, že

$$N \cdot p_{X,Y}(i,j) = N \cdot p_X(i) \cdot p_Y(j) = \frac{n_{i,*} \cdot n_{*,j}}{N}\ .$$

Tabulka pro pro tyto četnosti bude:

$N \cdot p_{X,Y}(i,j)$ $(Y =)\ j$ / $(X =)\ i$	tmavé	světlé	$n_{i,*}$
modré	$\frac{30\cdot 60}{100} = 18$	$\frac{30\cdot 40}{100} = 12$	30
šedé	$\frac{20\cdot 60}{100} = 12$	$\frac{20\cdot 40}{100} = 8$	20
hnědé	$\frac{50\cdot 60}{100} = 30$	$\frac{50\cdot 40}{100} = 20$	50
$n_{*,j}$	60	40	100

Podmínka na teoretické (tj. očekávané) četnosti ≥ 5 je splněna, takže položky nemusíme slučovat. Pro realizaci testovací statistiky dostaneme

$$t = \sum_{i,j} \frac{\Big(n_{i,j} - N \cdot p_{X,Y}(i,j)\Big)^2}{N \cdot p_{X,Y}(i,j)} =$$

$$= \frac{(10-18)^2}{18} + \frac{(10-12)^2}{12} + \frac{(40-30)^2}{30} + \frac{(20-12)^2}{12} + \frac{(10-8)^2}{8} + \frac{(10-20)^2}{20} = 18 + \frac{1}{18} \doteq 18.056$$

a porovnáme ji s hodnotou kvantilu χ^2 pro $(3-1)\cdot(2-1)=2$ stupňů volnosti

$$q_{\chi^2(2)}(1-\alpha) = q_{\chi^2(2)}(0.95) \doteq 5.992 \ .$$

Protože

$$t \doteq 18.056 > 5.992 \doteq q_{\chi^2(2)}(0.95) \ ,$$

hypotézu o nezávislosti proto **ZAMÍTÁME**.