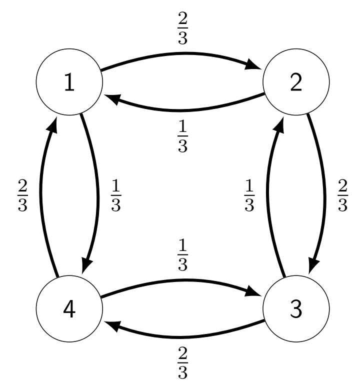
13. cvičení z PSI

3. ledna 2018

13.1 (Markovovy řetězce - sestavení matice, klasifikace stavů)

V obousměrně orientovaném cyklu délky 4 přejde v každém kroku každý stav na dva sousední a to s pravděpodobností 2/3 ve směru hodinových ručiček a s pravděpodobností 1/3 ve směru opačném. Stanovte pravděpodobnosti stavů po 4 krocích, jestliže počáteční stav je v jednom pevně vybraném vrcholu. Klasifikujte stavy.



Řešení:
Pokud očíslujeme stavy grafu vzestupně ve směru hodinových ručiček bude odpovídající matice přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} .$$

Graf je symetrický z hlediska všech vrcholů, takže si bez újmy na obecnosti zvolíme jako počáteční stav zvolíme např. stav 1. Počáteční rozdělení pravděpodobnosti tak bude

$$\boldsymbol{p}(0) = (1, 0, 0, 0) \ .$$

Rozdělení pravděpodobnosti $\boldsymbol{p}(n+1)$ v $n+1-$tém kroku se spočítá pomocí rozdělení pravděpodobnosti $\boldsymbol{p}(n)$ v $n-$tém kroku jako

$$\boldsymbol{p}(n+1) = \boldsymbol{p}(n) \cdot \mathbf{P} \ .$$

Rozdělení pravděpodobnosti po 4 krocích je tedy

$$\boldsymbol{p}(4) = \boldsymbol{p}(0) \cdot \mathbf{P}^4 \ .$$

Jednodušší než počítat 4-tou mocninu matice je ale spočítat postupně vektory $\boldsymbol{p}(i)$, protože výpočtů tak uděláme méně:

$$\boldsymbol{p}(1) = \boldsymbol{p}(0) \cdot \mathbf{P} = \left(0, \tfrac{2}{3}, 0, \tfrac{1}{3}\right)$$
$$\boldsymbol{p}(2) = \boldsymbol{p}(1) \cdot \mathbf{P} = \left(\tfrac{4}{9}, 0, \tfrac{5}{9}, 0\right)$$
$$\boldsymbol{p}(3) = \boldsymbol{p}(2) \cdot \mathbf{P} = \left(0, \tfrac{13}{27}, 0, \tfrac{14}{27}\right)$$
$$\boldsymbol{p}(4) = \boldsymbol{p}(3) \cdot \mathbf{P} = \left(\tfrac{41}{81}, 0, \tfrac{40}{81}, 0\right)$$

Jak je vidět, dvojice protilehlých stavů se stále střídají a přitom se jejich pravděpodobnosti stále více vyrovnávají.

Všechny stavy jsou trvalé s periodou 2, což se ukáže tak, že každá uzavřená cesta má sudou délku (indukcí podle délky orientované cesty). Řetězec je nerozložitelný (protože všechny trvalé stavy jsou navzájem propojitelné orientovanými cestami v grafu).

Poznámka: Dá se snadno ověřit, že jediné rozdělení pravděpodobnosti $\boldsymbol{p}$ takové, že $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p} \cdot \mathbf{P}$ (tzv. stacionární rozdělení), je v tomto případě právě jen $\boldsymbol{p} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. Takovéto rozdělení pravděpodobnosti se tedy během kroků nemění. Současně platí, že

$$\left(\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}, 0\right) \cdot \mathbf{P} = \left(0, \tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}\right)$$

$$\left(0, \tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}\right) \cdot \mathbf{P} = \left(\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}, 0\right)$$

takže tato dvě rozdělení $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right)$ a $\left(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ oscilují navzájem mezi sebou, což je způsobeno právě periodou rovnou 2. Také vidíme, ze tato dvě rozdělení NEKONVERGUJÍ ke stacionárnímu rozdělení.

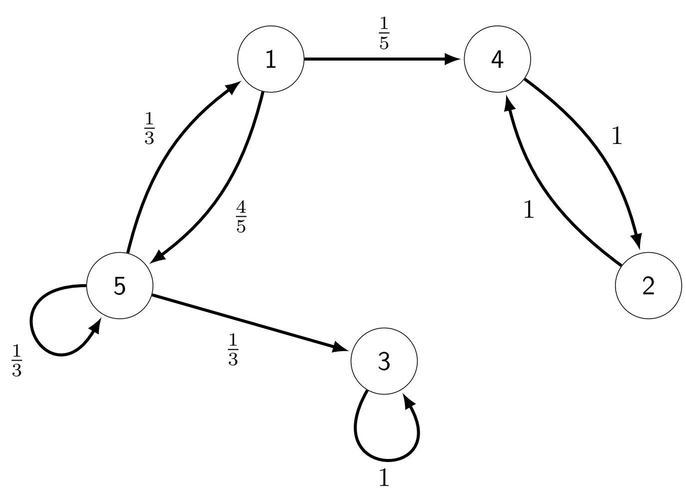
13.2 (Markovovy řetězce - sestavení diagramu, klasifikace stavů, uzavřené množiny)

V Markovově řetězci s následující maticí přechodu P oklasifikujte všechny stavy a najděte všechny uzavřené množiny trvalých stavů.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/5 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Řešení:

Nakreslíme si příslušný orientovaný graf přiřazený matici $\mathbf{P}$:



Z něj už je snadno vidět, že

- stav 3 je trvalý, dokonce absorpční (tudíž má periodu 1),
- stavy 2 a 4 jsou trvalé (s periodou 2) a

- stavy 1 a 5 jsou přechodné.

Všechny uzavřené množiny trvalých stavů (tj. množiny trvalých stavů, ze kterých nevedou ven žádné šipky) jsou

$$\emptyset,\ \{3\},\ \{2,4\},\ \{2,3,4\}\ .$$

Poznámka: Postupné změny rozdělení pravděpodobnosti během jednotlivých kroků si můžeme představovat také tak, že máme k dispozici dané množství kapaliny (o objemu 1), které se přelévá mezi jednotlivými stavy. Přechodné stavy se pak vyznačují tím, že to, co z nich "odteče" do trvalých stavů, se už do nich nevrátí, takže celkové množství kapaliny v těchto stavech se postupně v limitě sníží až k nule.

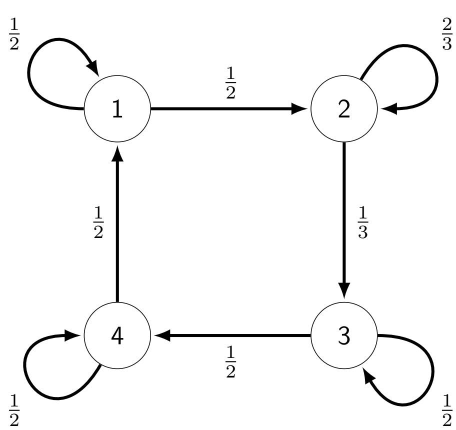
13.3 (Maximálně věrohodné odhady)

Odhadněte stav i a k Markovova řetězce s maticí přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

z pozorované posloupnosti stavů $(2, i, k, 3)$.

Řešení:
Pro větší názornost si nakreslíme diagram:



Stav odhadneme pomocí maximální věrohodnosti

$$L(i,k) = P\Big(X_0 = 2,\ X_1 = i,\ X_2 = k,\ X_3 = 3\Big).$$

Protože

$$P\Big(X_0 = i_0\ ,\ldots,\ X_n = i_n\Big) =$$

$$= P\Big(X_n = i_n \Big| X_0 = i_0\ ,\ldots,\ X_{n-1} = i_{n-1}\Big) \cdot P\Big(X_0 = i_0\ ,\ldots,\ X_{n-1} = i_{n-1}\Big) =$$

$$= P\Big(X_n = i_n \Big| X_{n-1} = i_{n-1}\Big) \cdot P\Big(X_0 = i_0\ ,\ldots,\ X_{n-1} = i_{n-1}\Big) =$$

$$= p_{i_{n-1},i_n} \cdot P\Big(X_0 = i_0 \ , \dots , \ X_{n-1} = i_{n-1}\Big) \ ,$$

dostaneme postupně, že

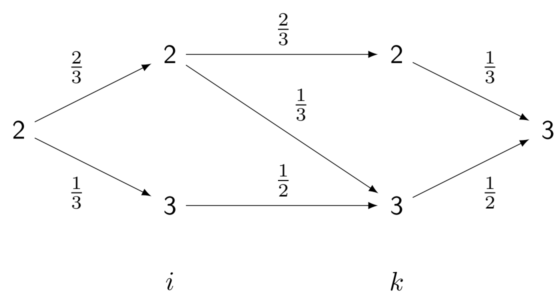
$$P\Big(X_0 = i_0 \ , \dots , \ X_n = i_n\Big) = P\Big(X_0 = i_0\Big) \cdot p_{i_0,i_1} \cdot p_{i_1,i_2} \cdots p_{i_{n-1},i_n} \ ,$$

kde $p_{j,\ell}$ je prvek matice $\mathbf{P}$ v j-tém řádku a ℓ-tém sloupci.

V našem případě tak máme

$$L(i,k) = P(X_0 = 1) \cdot p_{2,i} \cdot p_{i,k} \cdot p_{k,3} \ .$$

Hodnotu počáteční pravděpodobnosti $c := P(X_0 = 1)$ sice neznáme, ale ani jí nepotřebujeme k výpočtu (za předpokladu, že byla nenulová). Abychom zjistili, které stavy i a k vůbec přicházejí (pro nenulovou věrohodnost) v úvahu, nakreslíme následující obrázek:



Vypsali jsme všechny stavy, na které přejde v jednom kroku počáteční stav 2 (druhý sloupec) a pak všechny stavy, které přejdou na koncový stav 3 (třetí sloupec). Mezi těmito dvěma sloupci nakreslíme všechny možné způsoby přechodu. Celkem máme tři možné cesty z počátečního 2 do koncového 3. Pak snadno dostáváme:

$$\begin{aligned}
L(2,2) &= c \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{3} &&= \tfrac{4}{27} \cdot c \\
L(2,3) &= c \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{2} &&= \tfrac{1}{9} \cdot c = \tfrac{3}{27} \cdot c \\
L(3,3) &= c \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} &&= \tfrac{1}{12} \cdot c \\
L(i,k) &= 0 \ , && \text{jinak.}
\end{aligned}$$

Případ, pro který je hodnota věrohodnosti nejvyšší, je tedy $i = 2$ a $k = 4$ (za předpokladu, že $P(X_0 = 1) > 0$, jinak jsou všechny čtyři stavy stejně věrohodné).

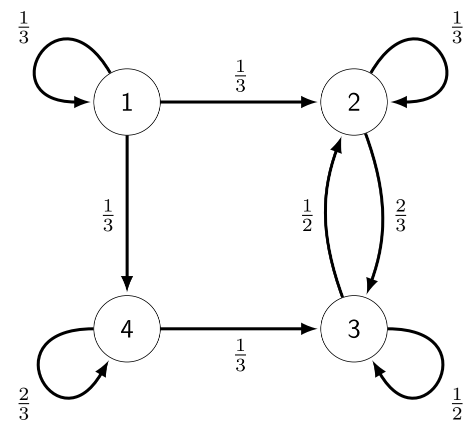
13.4 (Maximálně věrohodné odhady)

Odhadněte stav i Markovova řetězce s maticí přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

z pozorované posloupnosti stavů $(1, i, i, 3)$.

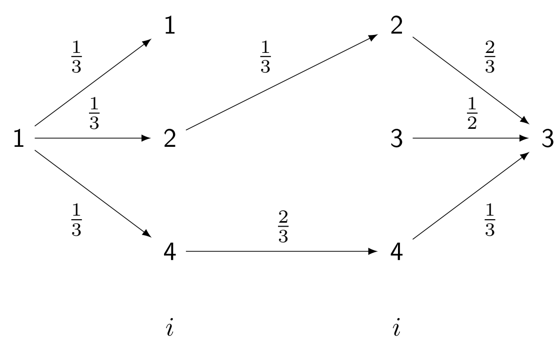
Řešení:
Pro větší názornost si opět nakreslíme diagram:



Stav odhadneme pomocí maximální věrohodnosti

$$L(i) = P\Big(X_0 = 1,\ X_1 = i,\ X_2 = i,\ X_3 = 3\Big) = P(X_0 = 1) \cdot p_{1,i} \cdot p_{i,i} \cdot p_{i,3}\ .$$

Hodnotu počáteční pravděpodobnosti $c := P(X_0 = 1)$ sice neznáme, ale ani jí nepotřebujeme k výpočtu (za předpokladu, že byla nenulová). Abychom zjistili, které stavy i přicházejí (pro nenulovou věrohodnost) v úvahu, nakreslíme následující obrázek:



Vypsali jsme všechny stavy, na které přejde v jednom kroku počáteční stav 1 (druhý sloupec) a pak všechny stavy, které přejdou na koncový stav 3 (třetí sloupec). Je vidět, že v obou těchto sloupcích jsou společné jen stavy 2 a 4 (tj. pouze takové mohou být hodnoty i, pokud věrohodnost má být nenulová). Mezi těmito dvěma hodnotami tedy nakreslíme všechny možné způsoby přechodu (v našem případě jsou jen dva). Pak snadno dostáváme:

$$\begin{aligned}
L(2) &= c \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{2}{3} &&= \tfrac{2}{27} \cdot c \\
L(4) &= c \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{3} &&= \tfrac{2}{27} \cdot c \\
L(1) &= 0 \\
L(3) &= 0 && .
\end{aligned}$$

Stavy, pro které je hodnota věrohodnosti nejvyšší, jsou tedy 2 a 4 (za předpokladu, že $P(X_0 = 1) > 0$, jinak jsou všechny čtyři stavy stejně věrohodné).

Metoda maximální věrohodnosti nám tak zde poskytuje *více* (stejně dobrých) odpovědí.

13.5 (Maximálně věrohodné odhady)

Markovův řetězec má dva stavy 1 a 2. Pravděpodobnost přechodu ze stavu 1 do stavu 2 je p, pravděpodobnost přechodu ze stavu 2 do stavu 1 je q. Z pozorované posloupnosti stavů

$$(1,2,2,1,1,1,2,1,1,1,2,2,1,1,1,1)$$

odhadněte parametry p, q.

Řešení:

Cvičení 3.3: `http://cmp.felk.cvut.cz/~navara/stat/MarkovCvic_print.pdf`

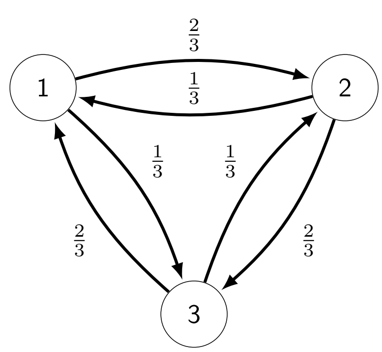
13.6 (Stacionární rozdělení)

Najděte všechna stacionární rozdělení pravděpodobnosti stavů Markovova řetězce s maticí přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Pro větší názornost si opět nakreslíme diagram:



Stacionární rozdělení pravděpodobnosti pro matici $\mathbf{P}$ je takový vektor $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$, s nezápornými složkami, pro který platí $\sum_j p_j = 1$ a

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p} \cdot \mathbf{P} \quad \text{neboli} \quad \boldsymbol{p} \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{I}_3) = 0 \ .$$

Ekvivalentní zápis je

$$\mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{p}^T = \boldsymbol{p}^T \quad \text{neboli} \quad (\mathbf{P}^T - \mathbf{I}_3^T) \cdot \boldsymbol{p}^T = 0^T \ .$$

Je tedy třeba najít vlastní vektor matice $\mathbf{P}^T$ pro její vlastní číslo 1.

Pozor! Přechod k transponované matici je nezbytný, pokud budeme při Gaussově eliminaci používat ekvivalentní ŘÁDKOVÉ úpravy soustavy $(\mathbb{A}|0)$. Ta totiž odpovídá rovnici $\mathbb{A}x = 0$, kdy x je SLOUPCOVÝ vektor.

Pomocí Gaussovy eliminace najdeme tudíž řešení soustavy $(\mathbf{P}^T - \mathbf{I}_3^T) \cdot \boldsymbol{p}^T = 0$ reprezentované maticí

$$\mathbf{P}^T - \mathbf{I}_3^T = \begin{pmatrix} -1 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -1 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tato soustava má hodnost 2, tedy má pouze $3 - 2 = 1$ lineárně nezávislých řešení, např. $(1, 1, 1)$. Po jeho znormování pak dostaneme

$$\boldsymbol{p} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) .$$

Pozor! NEJEDNÁ se o eukleidovskou normu $\|\boldsymbol{p}\|_2 := \left(\sum_i |p_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, ALE o normu tvaru $\|\boldsymbol{p}\|_1 := \sum_i |p_i|$.

Jedinečnost řešení plyne také z toho, že

- daný řetězec má všechny stavy *trvalé* a *neperiodické* (tj. ergodické) a
- samotný řetězec je *nerozložitelný* (tj. jediná uzavřená neprázdná množina trvalých stavů je množina *všech* těchto stavů, neboli všechny stavy jsou propojené nějakou cestou, nebo to také prostě můžeme říct tak, že graf má jedinou komponentu souvislosti).

Tyto vlastnosti se dají ihned odvodit z orientovaného grafu výše.

13.7 (Stacionární rozdělení)

Markovův řetězec má matici přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

(a) Klasifikujte všechny stavy.

(b) Najděte všechny uzavřené množiny stavů.

(c) Najděte všechna stacionární rozdělení pravděpodobností a posuďte, zda řetězec k některému z nich konverguje.

Řešení:

Cvičení 1.5: `http://cmp.felk.cvut.cz/~navara/stat/MarkovCvic_print.pdf`

13.8 (Stacionární rozdělení)

Markovův řetězec má matici přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

(a) Klasifikujte všechny stavy.

(b) Najděte všechny uzavřené množiny stavů.

(c) Najděte všechna stacionární rozdělení pravděpodobností a posuďte, zda řetězec k některému z nich konverguje.je.

Řešení:
Cvičení 1.8: `http://cmp.felk.cvut.cz/~navara/stat/MarkovCvic_print.pdf`