14. cvičení z PSI

9. ledna 2018

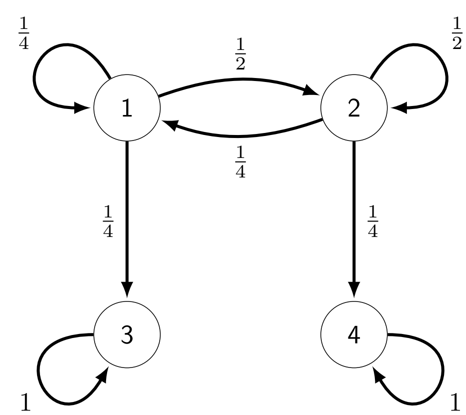
14.1 (Asymptotické pravděpodobnosti stavů)

Najděte asymptotické pravděpodobnosti stavů Markovova řetězce s maticí přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

jestliže počáteční stav je 2.

Řešení:
Příslušný diagram je



Stavy 1 a 2 jsou přechodné, stavy 3 a 4 jsou absorpční. Stavy si přečíslujeme tak, abychom jako první měli ty, co jsou absorpční a teprve za nimi šly ty přechodné, tj. např.

$$1' := 3, \quad 2' := 4, \quad 3' := 1, \quad 4' := 2 \ .$$

Tím dostaneme matici

$$\mathbf{P}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{pmatrix},$$

kde

$$\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}, \ \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Počáteční stav je stav číslo 2, čemuž odpovídá počáteční rozdělení pravděpodobnosti

$$\boldsymbol{p}(0) = (0, 1, 0, 0) \ .$$

Pro přečíslované stavy je to stav číslo $4'$ a tedy počáteční rozdělení pravděpodobnosti je

$$\boldsymbol{p}'(0) = (0, 0, 0, 1) \ .$$

Asymptotické rozdělení pravděpodobnosti s počátečním rozdělením $\mathbf{p}'(0)$ je dáno jako

$$\boldsymbol{p}'(\infty) := \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{p}'(n) = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{p}'(0) \cdot (\mathbf{P}')^n \ .$$

Stačí tedy určit

$$(\mathbf{P}')^\infty := \lim_{n\to\infty} (\mathbf{P}')^n = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ (\mathbf{I}_2 - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{R} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \ .$$

Spočítáme příslušnou inverzní matici

$$(\mathbf{I}_2 - \mathbf{Q})^{-1} = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/2 \\ -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}^{-1} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \ ,$$

kde jsme využili jednoduchý způsob uhádnutí inverzní matice typu 2×2 pomocí

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \ .$$

A určíme příslušný součin matic

$$(\mathbf{I}_2 - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix} .$$

Dostáváme tak

$$(\mathbf{P}')^\infty = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

tudíž

$$\boldsymbol{p}'(\infty) = \boldsymbol{p}'(0) \cdot (\mathbf{P}')^\infty = (0, 0, 0, 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (1/4, 3/4, 0, 0) \ .$$

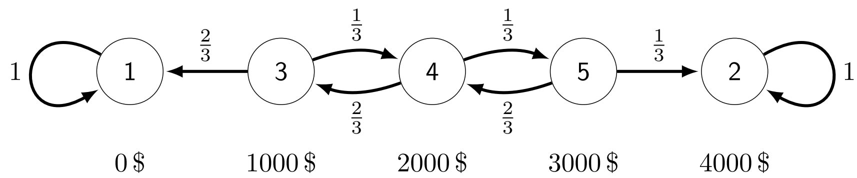
Po zpětném přečíslování stavů do původních (nečárkovaných) dostaneme asymptotické rozdělení stavů

$$\boldsymbol{p}(\infty) = \left(0, 0, \tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}\right) \ .$$

14.2 (Aplikace Markovových řetězců - asymptotické pravděpodobnosti stavů)

Alice hraje v kasinu hru, kde s pravděpodobností 1/3 vyhraje. V každém kole vsadí 1000 dolarů. V případě výhry získá 1000 dolarů, v případě prohry o 1000 dolarů přijde. Alice odejde z kasina, jestliže prohraje všechny své peníze nebo bude mít 4000 dolarů. Jaká je pravděpodobnost, že Alice odejde s prázdnou, měla-li na začátku 3000 dolarů?

Řešení:
Nakreslíme si příslušný orientovaný graf:



Pro Alici uvažujme stavy

1 - odchází s prázdnou, 2 - má 4000 dolarů (a tedy odchází), 3 - má 1000 dolarů, 4 - má 2000 dolarů a 5 - má 3000 dolarů.

Stavy jsme si očíslovali tak, aby první byly ty absorpční a teprve po nich následovali ty přechodné. Na začátku má Alice 3000 dolarů, tedy je ve stavu číslo 5 a počáteční rozdělení pravděpodobnosti tak je

$$\boldsymbol{p}(0) = (0, 0, 0, 0, 1)\ .$$

pravděpodobnost, že Alice odejde s prázdnou odpovídá složce pro stav 1 v asymptotickém rozdělení pravděpodobnosti $\boldsymbol{p}(\infty)$.

Proč tomu tak je: Platí:

- (Podmíněná) pravděpodobnost $P\big(\underbrace{i \to \cdots \to j}_{n \text{ kroků}}\big)$ toho, že se po *právě* n krocích ze stavu i přesuneme do stavu j je
$$P\big(\underbrace{i \to \cdots \to j}_{n \text{ kroků}}\big) = \Big(\mathbf{P}^n\Big)_{i,j}\ .$$
To se snadno ukáže indukcí.
- Jestliže i_* je *absorpční* stav, pak (podmíněná) pravděpodobnost $P\big(\underbrace{i \to \cdots \to i_*}_{\leq n \text{ kroků}}\big)$ toho, že se po *nejvýše* n krocích ze stavu i přesuneme do stavu i_* je
$$P\big(\underbrace{i \to \cdots \to i_*}_{\leq n \text{ kroků}}\big) = P\big(\underbrace{i \to \cdots \to i_*}_{n \text{ kroků}}\big) = \Big(\mathbf{P}^n\Big)_{i,i_*}\ .$$
To je proto, že jakoukoliv posloupnost kratší než n můžeme nastavit opakovaným přidáním stavu i_* (protože je absorpční).
- Jestliže i_* je *absorpční* stav, pak (podmíněná) pravděpodobnost $P\big(\underbrace{i \to \cdots \to i_*}_{\text{konečně kroků}}\big)$ toho, že se po *konečně* mnoha krocích ze stavu i přesuneme do stavu i_* je
$$P\big(\underbrace{i \to \cdots \to i_*}_{\text{konečně kroků}}\big) = P\Big(\bigcup_n \underbrace{i \to \cdots \to i_*}_{\leq n \text{ kroků}}\Big) = \lim_{n\to\infty} P\Big(\underbrace{i \to \cdots \to i_*}_{\leq n \text{ kroků}}\Big) = \lim_{n\to\infty} \Big(\mathbf{P}^n\Big)_{i,i_*} = \Big(\mathbf{P}^\infty\Big)_{i,i_*}\ .$$

A protože $\boldsymbol{p}(\infty) = \boldsymbol{p}(0) \cdot \mathbf{P}^\infty$, můžeme tento závěr ekvivalentně vyjádřit přes rozdělení pravděpodobnosti.

Pro výpočet asymptotického rozdělení pravděpodobnosti si opět zapíšeme matici přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{pmatrix},$$

kde

$$\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Opět si určíme matici

$$\mathbf{P}^\infty := \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ (\mathbf{I}_3 - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{R} & \mathbf{0} \end{pmatrix} .$$

Spočítáme fundamentální matici $\mathbf{F} = \left(\mathbf{I}_3 - \mathbf{Q}\right)^{-1}$:

$$\left(\mathbf{I}_3 - \mathbf{Q} \;\middle|\; \mathbf{I}_3\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & -1/3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \cdots \sim$$

$$\sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 6 & 9 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right) = \left(\mathbf{I}_3 \;\middle|\; \left(\mathbf{I}_3 - \mathbf{Q}\right)^{-1}\right) .$$

Tedy

$$\mathbf{F} = \left(\mathbf{I}_3 - \mathbf{Q}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 0 \\ -2/3 & 1 & -1/3 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 6 & 9 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

a

$$\left(\mathbf{I}_3 - \mathbf{Q}\right)^{-1}\mathbf{R} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 6 & 9 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 14 & 1 \\ 12 & 3 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} .$$

Celkem tedy dostaneme

$$\mathbf{P}^\infty = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 14/15 & 1/15 & 0 & 0 & 0 \\ 12/15 & 3/15 & 0 & 0 & 0 \\ 8/15 & 7/15 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pravděpodobnost, že Alice vše prohraje, pokud na začátku měla 3000 dolarů, nyní odpovídá hodnotě

$$\left(\mathbf{P}^\infty\right)_{5,1} = \frac{8}{15} .$$

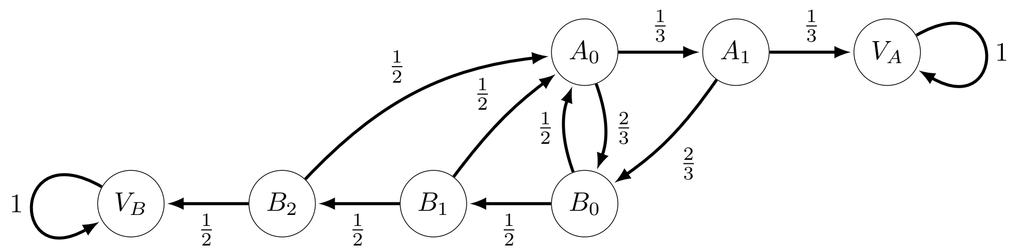
14.3 (Aplikace Markovových řetězců - asymptotické pravděpodobnosti stavů)
Alice trefí terč s pravděpodobností $1/3$, Bob s pravděpodobností $1/2$. Pokud hráč zasáhne terč, střílí dále, pokud mine, je na řadě druhý hráč. Začíná Alice. Alice vyhrává, pokud trefí terč $2\times$ za sebou, Bob vyhrává, pokud trefí terč $3\times$ za sebou. Pro oba hráče stanovte pravděpodobnosti výhry.

Řešení:
Pokud bychom rozlišovali nejen to, který hráč je na řadě, ale i kolik již má úspěšných pokusů, potřebovali bychom 7 stavů:

- V_A - vyhrála Alice,
- V_B - vyhrál Bob,

- A_i - Alice má právě za sebou i úspěšných pokusů $i \in \{0, 1\}$,
- B_i - Bob má právě za sebou i úspěšných pokusů $i \in \{0, 1, 2\}$.

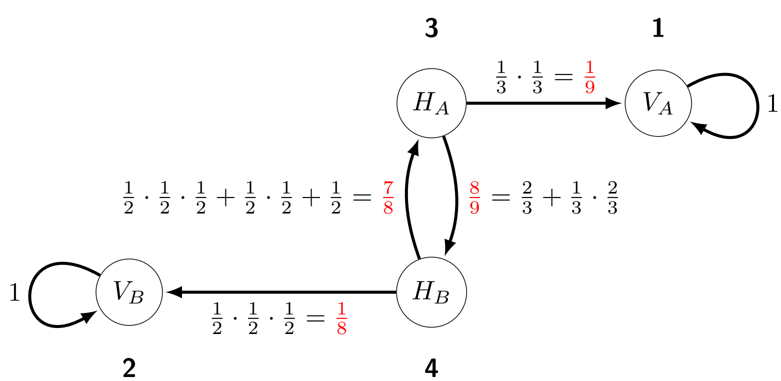
Odpovídající diagram by byl tento:



Protože nás zajímají pouze pravděpodobnosti výhry obou hráčů, můžeme si situaci popsat jednodušším způsobem a to tak, že rozlišíme pouze stavy:

- V_A - vyhrála Alice,
- V_B - vyhrál Bob,
- H_A - na řadě je Alice,
- H_B - na řadě je Bob,

kde celou sérii úspěšných pokusů daného hráče považujeme za jeden krok. Tento krok pak končí výhrou hráče s pravděpodobností $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ pro Alici, $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ pro Boba, nebo se na řadu dostává druhý hráč:



Stavy si opět očíslujeme tak, aby první byly ty absorpční a teprve po nich následovali ty přechodné:

$1 := V_A$ (vyhrála Alice), $2 := V_B$ (vyhrál Bob), $3 := H_A$ (na řadě je Alice), $4 := H_B$ (na řadě je Bob).

pravděpodobnosti výher Alice a Boba opět zjistíme z asymptotického rozdělení pravděpodobnosti $\boldsymbol{p}(\infty)$ s počátečním rozdělením

$$\boldsymbol{p}(0) = (0, 0, 1, 0) \ .$$

Je tedy opět potřeba spočítat $\mathbf{P}^{\infty}$ pro matici přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/9 & 0 & 0 & 8/9 \\ 0 & 1/8 & 7/8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{pmatrix},$$

kde

$$\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1/9 & 0 \\ 0 & 1/8 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 8/9 \\ 7/8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Fundamentální matice tohoto řetězce je

$$\mathbf{F} = \left(\mathbf{I}_2 - \mathbf{Q}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -8/9 \\ -7/8 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = (9/2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 8/9 \\ 7/8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/2 & 4 \\ 63/16 & 9/2 \end{pmatrix}$$

a tedy

$$\left(\mathbf{I}_2 - \mathbf{Q}\right)^{-1}\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 9/2 & 4 \\ 63/16 & 9/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/9 & 0 \\ 0 & 1/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 7/16 & 9/16 \end{pmatrix}.$$

Celkem tedy dostaneme

$$\mathbf{P}^{\infty} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \left(\mathbf{I}_2 - \mathbf{Q}\right)^{-1}\mathbf{R} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 7/16 & 9/16 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a asymptotické rozdělení tak je

$$\boldsymbol{p}(\infty) = \boldsymbol{p}(0) \cdot \mathbf{P}^{\infty} = (0,0,1,0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 7/16 & 9/16 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (1/2, 1/2, 0, 0) \ .$$

Zjistili jsme tak (vcelku překvapivě), že pravděpodobnosti výhry Alice i Boba jsou stejné (a sice $\frac{1}{2}$), pokud bude začínat Alice jako první.

Poznámka: Uvažujme následující obecnější případ. Pro $n, m, a, b \in \mathbb{N}$ předpokládejme, že

- Alice má pravděpodobnost zásahu $\frac{1}{n}$ a k výhře musí mít sérii a úspěšných pokusů a podobně
- Bob má pravděpodobnost zásahu $\frac{1}{m}$ a k výhře musí mít sérii b úspěšných pokusů a dále, že
- $\left(\frac{1}{n}\right)^a < \left(\frac{1}{m}\right)^b$ a proto opět necháme začít Alici.

Kdybychom opět chtěli, aby Alice a Bob měli stejné šance na výhru, zjistíme, že to nastane právě když bude platit

$$n^a - m^b = 1 \ .$$

V rámci teorie čísel se řešeními této rovnice zabýval Eugène Charles Catalan a v roce 1844 vyslovil hypotézu (tzv. Catalan's conjecture), že jediné řešení této rovnice v kladných přirozených číslech je právě jen $3^2 - 2^3 = 1$. Hypotézu potvrdil Preda Mihăilescu v roce 2002.

14.4 (Asymptotické pravděpodobnosti)

Při obnovování paměti přepisujeme binární informaci, přičemž s pravděpodobností 1% přepíšeme 0 jako 1, s pravděpodobností 2% přepíšeme 1 jako 0. Jaké bude rozdělení pravděpodobností po velkém počtu kroků?

Řešení:

Cvičení 2.10: http://cmp.felk.cvut.cz/~navara/stat/MarkovCvic_print.pdf