2. cvičení z PST

11. října 2017

2.1 (srovnání výběru s opakováním a bez opakování)

V loterii je $k = 500$ výher a $n = 10^7$ účastníků. Jaká je pravděpodobnost, že Alice získá nějakou výhru, pokud

(a) každý může vyhrát nejvýše jednou,

(b) každý může vyhrát opakovaně.

Řešení:

Z hlediska výsledku je jedno budeme-li uvažovat uspořádaný nebo neuspořádaný výběr (protože i při neuspořádaném výběru musíme stejně vzít v úvahu všechny uspořádané možnosti, ze kterých daná neuspořádaná možnost vznikne - např. pro $k = 3$ odpovídají usp. trojice (A, A, B), (A, B, A) a (B, A, A) jedné neuspořádané možnosti, že A bylo vybráno $2\times$ a B bylo vybráno $1\times$).

Z hlediska výpočtu to ale není pokaždé stejné a bývá snadnější používat uspořádaný výběr.

(a) Uvažujme neuspořádaný výběr bez opakování. Pravděpodobnost spočítáme přes doplňkový jev. Počet všech možností je $\binom{n}{k}$. Počet nepříznivých možností je $\binom{n-1}{k}$ (vynecháme Alici). Pravděpodobnost p_1 je tedy

$$p_1 = 1 - \frac{\binom{n-1}{k}}{\binom{n}{k}} = 1 - \frac{n-k}{n} = \frac{k}{n} = \frac{500}{10^7} = 5 \cdot 10^{-5} \ .$$

(b) Uvažujme uspořádaný výběr s opakováním. Pravděpodobnost opět spočítáme přes doplňkový jev. Počet všech možností je n^k. Počet nepříznivých možností je $(n-1)^k$. Pravděpodobnost p_2 je tedy

$$p_2 = 1 - \frac{(n-1)^k}{n^k} = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k = 1 - (0.9999999)^{500} \doteq 1 - 0.999950001 = 4.9999 \cdot 10^{-5} \ .$$

Jak je vidět, pravděpodobnosti jsou téměř stejné. To můžeme vysvětlit buď pomocí binomického rozvoje

$$p_2 = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k = 1 - \left(1 - \frac{k}{n} + \binom{k}{2}\frac{1}{n^2} - \cdots\right) = \underbrace{\frac{k}{n}}_{p_1} - \binom{k}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots$$

nebo pomocí limity (pro k pevné a n rostoucí nade všechny meze)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_2}{p_1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k}{\frac{k}{n}} = \left[x = -\frac{1}{n}\right] = \frac{1}{k} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^k - 1}{x} = \frac{1}{k} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x)^k_{|x=0} = \frac{1}{k} \cdot k = 1 \ .$$

Současně tento výsledek odpovídá intuitivní představě, že v obrovském množství účastníků n se už v limitě (tj. pro $k << n$) ztratí to, jestli je losujeme opakovaně (tj. vlastně neměníme podmínky) nebo ne (tj. daného výherce vždy vyřadíme).

2.2 (podmíněná pravděpodobnost)

Pravděpodobnost toto, že napětí v elektrické síti překročí standardní hodnotu, je rovna $p_1 > 0$. Při přepětí je pravděpodobnost poruchy elektrického spotřebiče rovná p_2. K poruše přístroje může dojít jen při přepětí. Určete pravděpodobnost poruchy přístroje.

Řešení:
Označme si

$A =$ ”*napětí překročí standardní hodnotu*”,

$B =$ ”*dojde k poruše přístroje*”.

Ze zadání víme, že $P(A) = p_1$, $P(B|A) = p_2$ a $B \subseteq A$. Zajímá nás hodnota $P(B)$. Ze vztahu $B \subseteq A$ plyne, že $B \cap A = B$. Pomocí definice relativní pravděpodobnosti teď můžeme psát

$$P(B) = P(B \cap A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \cdot P(A) = P(B|A) \cdot P(A) = p_2 \cdot p_1 \ .$$

2.3 (nezávislé jevy)

Dva střelci střílí na terč po jedné ráně. Pravděpodobnost, že se první trefí je $p_1 = 0.7$. Pravděpodobnost, že se trefí druhý střelec je $p_2 = 0.8$. Jaká je pravděpodobnost, že

(a) alespoň jeden střelec zasáhne cíl?

(b) první střelec se trefí a druhý ne?

Řešení:
Uvažujme jevy

$S_1 =$ ”*první střelec se trefí*”,

$S_2 =$ ”*druhý střelec se trefí*”.

Tyto jevy jsou nezávislé, $P(S_1) = 0.7$ a $P(S_2) = 0.8$.

(a) Pro jev

$A =$ ”*alespoň jeden střelec zasáhne cíl*”

máme $A = S_1 \cup S_2$ a tedy

$$P(A) = P(S_1 \cup S_2) = P(S_1) + P(S_2) - P(S_1 \cap S_2) \overset{\text{(nezav.)}}{=}$$
$$\overset{\text{(nezav.)}}{=} P(S_1) + P(S_2) - P(S_1) \cdot P(S_2) = 0.7 + 0.8 - 0.7 \cdot 0.8 = 0.94 \ .$$

(a) Pro jev

$B =$ ”*první střelec se trefí a druhý ne*”

máme $B = S_1 \cap \overline{S_2}$ a tedy

$$P(B) = P(S_1 \cap \overline{S_2}) \overset{\text{(nezav.)}}{=} P(S_1) \cdot P(\overline{S_2}) = 0.7 \cdot (1 - 0.8) = 0.14 \ .$$

2.4 (nezávislé jevy)

Revizor že zkušenosti ví, že zhruba v 26% tramvají při kontrole najde alespoň jednoho černého pasažéra. Kolik tramvají musí zkontrolovat, aby s pravděpodobností alespoň 95% našel alespoň jednoho černého pasažéra?

Řešení:
Nejdříve je potřeba správně interpretovat zadání: pravděpodobnost, že revizor v dané tramvaji najde alespoň jednoho černého pasažéra je 0.26. Mějme teď jevy

$$A_n = \text{ "revizor v } n\text{-té tramvaji najde alespoň jednoho černého pasažéra"}$$

$$B_n = \text{ "revizor v prvních } n \text{ tramvajích najde alespoň jednoho černého pasažéra"}$$

Dále budeme předpokládat, že všechny jevy A_n jsou navzájem nezávislé pro $n \in \mathbb{N}$ (bez tohoto vcelku přirozeného předpokladu bychom neměli dost informace pro další výpočet). Pak platí, ze i jevy $\overline{A_n}$ jsou navzájem nezávislé pro $n \in \mathbb{N}$ a tedy speciálně platí, že

$$P\Big(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}\Big) = \prod_{k=1}^{n} P\Big(\overline{A_k}\Big) \ .$$

My chceme znát nejmenší $n \in \mathbb{N}$ takové, že $P(B_n) \geq 0.95$. Víme, že $P(A_n) = 0.26$ a

$$B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \ .$$

Jednodušší bude pracovat s doplňkovým jevem:

$$P\left(\overline{B_n}\right) = P\left(\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k}\right) = P\Big(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}\Big) = \prod_{k=1}^{n} P(\overline{A_k}) = (1-0.26)^n$$

$$0.05 = 1 - 0.95 \geq 1 - P(B_n) = P(\overline{B_n}) = (0.74)^n$$

$$\log 0.05 \geq n \log 0.74$$

$$9.95 \doteq \frac{\log 0.05}{\log 0.74} \leq n$$

Pozor, logaritmus je záporný pro hodnoty menší než 1. Revizor tedy musí projít alespoň 10 tramvají.

V tomto příkladě jsme pracovali pouze s jevy, aniž bychom znali konkrétní Kolmogorův model. Taková situace je poměrně běžná - Kolmogorův model se většinou nesestavuje, protože není k samotnému výpočtu potřeba. Slouží pak jen k tomu, abychom se ujistili, že v zadání nejsou rozpory - tj. existuje (alespoň jeden) model, ve kterém je zadání splněno.

2.5 (geometrická pravděpodobnost)
Tyč délky ℓ se náhodně rozpadne na 3 části. Jaká je pravděpodobnost, že z částí lze sestavit trojúhelník?

Řešení:
Tyč se rozpadne na části o délkách a, b a c, kde $0 < a, b, c$ a $a+b+c = \ell$. Za jevové pole si tak vezmeme

$$\Omega = \big\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < a,b,c \quad \wedge \quad a+b+c = \ell\big\} \ .$$

To je rovnostranný trojúhelník o straně délky ℓ. Jeho plocha tak je $\mathrm{vol}(\Omega) = \frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2$. Abychom mohli sestavit trojúhelník, musí platit trojúhelníková nerovnost. Zajímá nás tedy jev

$$A = \{(a,b,c) \in \Omega \mid a+b > c \quad \wedge \quad b+c > a \quad \wedge \quad a+c > b\} \ ,$$

který v množině Ω vytváří trojúhelník, jehož vrcholy jsou středy stran trojúhelníku Ω. Velikost plochy A tak zřejmě je $\mathrm{vol}(A) = \frac{1}{4}\mathrm{vol}(\Omega)$. Proto máme

$$P(A) = \frac{\mathrm{vol}(A)}{\mathrm{vol}(\Omega)} = \frac{1}{4} = 0.25 \ .$$

K výpočtu lze použít také jevové pole $\Omega' = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < a,b \ \ \& \ \ a+b < \ell\}$, kde původní elementární jev (a,b,c) popíšeme pouze prvními dvěma složkami (a,b) a třetí je jednoznačně určena jako $c = \ell - (a+b)$. Množina Ω' je tentokrát rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník s přeponou délky ℓ. Odpovídající jev sestrojení trojúhelníku pak je

$$A' = \{(a,b) \in \Omega' \mid a+b > \ell - (a+b) \quad \wedge \quad b + \ell - (a+b) > a \quad \wedge \quad a + \ell - (a+b) > b\} =$$

$$= \left\{(a,b) \in \Omega' \mid a+b > \frac{\ell}{2} \quad \wedge \quad a,b < \frac{\ell}{2}\right\} \ .$$

Množina A' je opět trojúhelník s vrcholy ve středech stran trojúhelníku Ω'.

Co není u těchto příkladů ihned zřejmé, je to, zda oba přístupy budou dávat stejný výsledek. Zde zřejmě ano. Důvod je obecněji ten, že máme zobrazení $\varphi : \Omega' \to \Omega$, $\varphi(a,b) = (a,b,\ell - a - b)$ které parametrizuje původní množinu Ω pomocí množiny Ω' a přitom platí $\varphi(A') = A$. Toto zobrazení je vlastně "natažení" trojúhelníku Ω' do podoby trojúhelníku Ω. Množina A' se přitom natáhne stejným způsobem (do množiny A) a proto poměry velikostí zůstanou zachovány. Tedy pravděpodobnost vyjde stejně.

2.6 (geometrická pravděpodobnost)

Dva přátelé A a B si domluví schůzku mezi 9.00 a 10.00. Jejich příchody na dané místo jsou náhodné v rámci smluveného časového intervalu. Každý bude čekat 10 minut a pak odchází. Jaká je pravděpodobnost, že dojde k setkání?

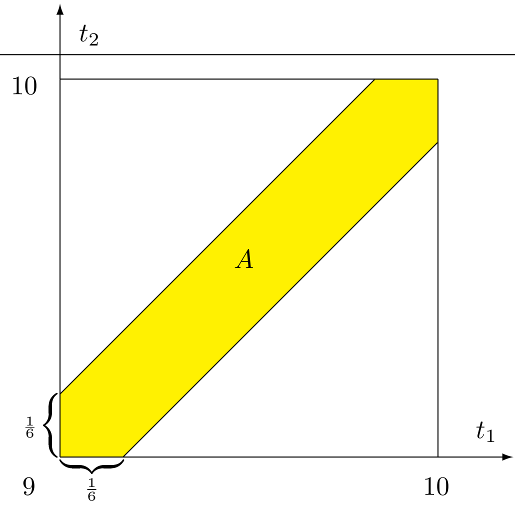
Řešení:

V rámci geometrické pravděpodobnosti pracujeme vždy v $\mathbb{R}^n$, kde máme obvyklý n-rozměrný objem $\mathrm{vol}(\cdot)$ (a tudíž pracujeme s množinami, kterým nějaký objem přiřadit lze - tzv. borelovské). Kolmogorovým modelem pak bude $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, kde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je borelovská množina taková, že $\mathrm{vol}(\Omega) < \infty$, $\mathcal{B}$ je σ-algebra tvořena všemi borelovskými množinami obsaženými v Ω a $P(A) = \frac{\mathrm{vol}(A)}{\mathrm{vol}(\Omega)}$.

V našem konkrétním případě si jako elementární jev zvolíme dvojici (t_1, t_2), která znamená příchody jednotlivých osob v jednotkách *hodin*. Tedy $\Omega = \langle 9, 10\rangle \times \langle 9, 10\rangle$. Jev $A \subseteq \Omega$ setkání obou přátel bude pak

$$A = \{(t_1, t_2) \in \Omega \mid \ |t_1 - t_2| \leq 1/6\}$$

(za jednotku jsme si zvolili hodinu, takže 10 min $= \frac{1}{6}$ hod). Z grafického znázornění množin v $\mathbb{R}^2$



snadno zjistíme, že $\mathrm{vol}(A) = 1 - (\frac{5}{6})^2 = \frac{11}{36}$ a $\mathrm{vol}(\Omega) = 1$, takže

$$P(A) = \frac{11}{36} \ .$$

Na tomto příkladě je vidět, že pojmu σ-algebra (a dalším definicím spojeným s pravděpodobností) se prostě nelze vyhnout, pokud máme pracovat s plochou nebo objemem množin (a později s integrováním funkcí).

2.7 (geometrická pravděpodobnost)

Dva parníky přijíždějí jednou denně do přístavu a musí přirazit ke stejnému kotvišti. Příjezdy obou parníků jsou nezávislé a stejně možné během celého dne (tj. 24 hodin). První parník zůstává v přístavu 1 hodinu a druhý 2 hodiny. Určete pravděpodobnost, že jeden z parníku bude muset čekat na uvolnění kotviště.

Řešení:

Příklad je podobný jako předchozí, ale tentokrát musíme uvažovat to, že příjezdy probíhají každý den.

Opět si jako elementární jev zvolíme dvojici (t_1, t_2), která znamená příjezdy jednotlivých parníků v jednotkách *hodin*. Jevové pole bude tentokrát $\Omega = \langle 0, 24\rangle \times \langle 0, 24\rangle$.

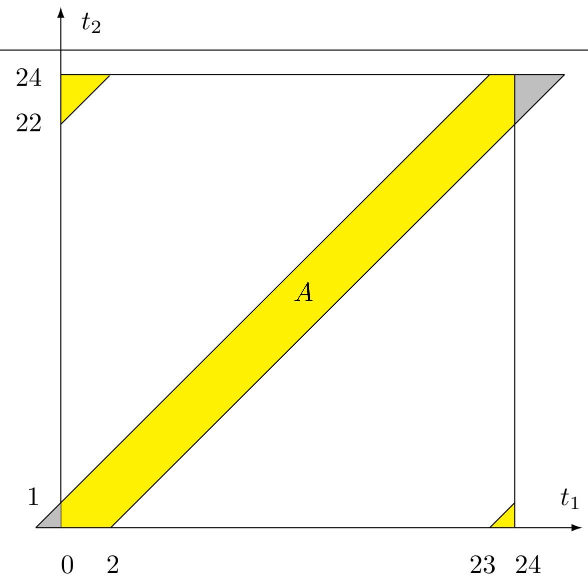
Protože uvažujeme to, že příjezdy probíhají každý den a události na sebe mohou navazovat, jev $A \subseteq \Omega$ představující to, že jeden z parníku musí čekat, tak budou takové dvojice $(t_1, t_2) \in \Omega$, že nastává jedna z následujících možností

- pro $t_1 \in \langle 0, 23\rangle$ je $t_2 \in \langle t_1, t_1 + 1\rangle$
- pro $t_1 \in \langle 23, 24\rangle$ je $t_2 \in \langle t_1, 24\rangle \cup \langle 0, t_1 + 1 - 24\rangle$
- pro $t_2 \in \langle 0, 22\rangle$ je $t_1 \in \langle t_2, t_2 + 2\rangle$
- pro $t_2 \in \langle 22, 24\rangle$ je $t_1 \in \langle t_2, 24\rangle \cup \langle 0, t_2 + 2 - 24\rangle$

Výsledek jsou jen tyto 4 případy:

$$A : \Big(t_1 \leq t_2 \leq t_1 + 1\Big) \ \vee \ \Big(t_2 \leq t_1 - 23\Big) \ \vee \ \Big(t_2 \leq t_1 \leq t_2 + 2\Big) \ \vee \ \Big(t_1 + 22 \leq t_2\Big) \ .$$

Z grafického znázornění množiny A v $\mathbb{R}^2$



snadno zjistíme, že plocha A je vlastně plocha kosodélníku se základnou 3 a výškou 24. Tedy

$$P(A) = \frac{3 \cdot 24}{(24)^2} = \frac{1}{8} = 0.125\ .$$

Pro názornější představu cykličnosti událostí si můžeme představit, že okraje intervalu $\langle 0, 24\rangle \times \langle 0, 24\rangle$ jsou slepené tak, že vznikne povrch toru neboli "pneumatika".

2.8 (Kolmogorův model)

Zjistěte, zda $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je Kolmogorův model pravděpodobnosti, je-li dáno:

- $\Omega = \{1, 2, 3\}$,
- $\mathcal{A} = \big\{\emptyset, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2, 3\}\big\}$,
- $P(A) = \frac{1}{3}|A|$, $A \in \mathcal{A}$ (kde $|A|$ je počet prvků množiny A).

Řešení:

Pro Kolmogorův model je potřeba ověřit, že $\mathcal{A}$ je σ-algebra:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$,
- $A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$,
- $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$,

a že $P : \mathcal{A} \to \langle 0, 1\rangle$ je pravděpodobnost:

- $P(\Omega) = 1$,
- $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}$ & A_n jsou navzájem disjunktní $\;\Rightarrow\; P\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$,

První dvě podmínky pro σ-algebru jsou zřejmě splněny, poslední ne, protože

$$\{2\}, \{3\} \in \mathcal{A}, \quad \text{ale} \quad \{2\} \cup \{3\} \notin \mathcal{A}\ .$$

Množina $\mathcal{A}$ tedy *není* σ-algebra a $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ proto *není* Kolmogorův model.

Tuto nedokonalost, ale můžeme spravit tak, že k $\mathcal{A}$ přidáme prvky, které chybí: tedy prvek $\{2\} \cup \{3\} = \{2,3\}$ a $\overline{\{2,3\}} = \{1\}$. Dostaneme tak celou potenční množinu $\mathcal{A}' = \exp(\Omega)$, která σ-algebrou určitě je.
Teď ještě ukážeme, že $P : \mathcal{A}' \to \langle 0, 1 \rangle$ je v tomto případě pravděpodobnost. Zřejmě

$$P(\Omega) = \frac{3}{3} = 1$$

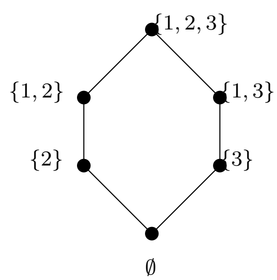
a dále pro $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \exp(\Omega)$ navzájem disjunktní máme

$$P\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \frac{1}{3}\left|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right| = \frac{1}{3}\sum_{n\in\mathbb{N}} |A_n| = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)\ .$$

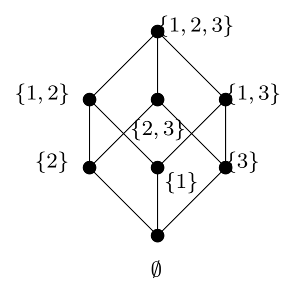
To, že jsme ukázali, že P je pravděpodobnost nakonec není žádné překvapení, protože to celé je prostě Laplaceův model pravděpodobnosti (tj. počet příznivých případů ku počtu všech.)

Uspořádané množiny (v našem případě inkluzí) můžeme ještě zakreslit tzv. Hasseovým diagramem (větší prvky se zakreslují nad menší a spojují se čárkou, pokud už mezi nimi žádné další prvky nejsou). Dostáváme tak:

$\mathcal{A}$:



exp(Ω) :



To, že jsme ve druhém případě dostali obrázek, který vypadá jako krychle, není náhoda. Konečné σ-algebry budou mít vždy Hasseův diagram ve tvaru vícerozměrné krychle.